Математический анализ
1-й семестр 1-го курса НМУ 2015-2016 учебного года.
М. Э. Казарян
Программа

1. **Рациональные и вещественные числа.** *Рациональное число как класс эквивалентности пар целых чисел. Рациональное число как прямая на плоскости. Вещественное число как сечение на множестве рациональных чисел. Сравнение вещественных чисел. Операции над вещественными числами. Представление вещественного числа десятичной дробью. Теория цепных дробей - наилучших приближений вещественных чисел рациональными. p-адические числа.*

2. **Предел последовательности. Сумма ряда.** *Предел суммы и произведения последовательности. Замечательные пределы. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши. Предел монотонной ограниченной последовательности. Метрические пространства. Предел последовательности в метрическом пространстве. Полные метрические пространства.*

3. **Топология прямой.** *Открытые и замкнутые множества на прямой. Внутренность и замыкание множества. Замкнутость множества предельных точек. Компактные множества и их характеризация. Плотные множества. Связные множества.*

4. **Мощность множества.** *Счетные множества. Континуум. Мощность множества подмножеств.*

5. **Непрерывные функции на прямой.** *Эквивалентность определений непрерывной функции. Обратная функция. Теорема о достижении максимума и минимума. Теорема о промежуточном значении. Непрерывность элементарных функций.*

6. **Степенные ряды.** *Радиус сходимости ряда. Теорема Абеля. Формулы Коши и Даламбера.*

7. **Дифференцирование.** *Дифференцирование произведения. Производная композиции. Производная обратной функции. Формулы конечных приращений. Правило Лопиталя. Разложение Тейлора.*

Независимый Московский Университет

Математический анализ 1-й курс, листок 1

9 сентября 2015 года

1. Докажите *неравенство Бернулли*:

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx \qquad (n \text{ -- натуральное}, x \geqslant -1).$$

2. Укажите такое натуральное $n > 1$, что $2^n > n^{1000}$.

3. Укажите такое натуральное n, что $1,0001^n > 1000000$.

4. Докажите, что $\sqrt[100]{2} < 1,01$.

5. При каком натуральном k величина $\frac{k^2}{1{,}001^k}$ максимальна?

Определение. *Отношением* на множестве M называется подмножество множества пар $M \times M$. Отношение $R \subset M \times M$ называется *отношением эквивалентности*, если оно

- *симметрично*, т.е. $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$;
- *транзитивно*, т.е. $(x, y) \in R, (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$;
- *рефлексивно*, т.е. $(x, x) \in R \quad \forall x \in M$.

Множество попарно эквивалентных относительно R элементов множества M называется *классом эквивалентности.*

6. Дайте определение рационального числа как класса эквивалентности. Определите операции над рациональными числами.

Определение. *Рациональным числом* называется целочисленная прямая на плоскости, проходящая через начало координат и не совпадающая с осью ординат.

7. Докажите эквивалентность приведенного определения рационального числа вашему. Определите сложение и умножение целочисленных прямых.

8. Что такое $\sqrt{2}$?

9. Докажите, что $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ иррационально.

(Доказательство: $\sqrt{2}+\sqrt{3} = 1,41\cdots + 1,73\cdots = 3,14\ldots$ – иррационально.)

10. Докажите, что сумма $a_1\sqrt{b_1}+\cdots+a_k\sqrt{b_k}$ иррациональна, если a_i целые, а b_i различные положительные целые, свободные от квадратов.

11. Рационально ли число $\sin 20^o$?

12. Целочисленные точки на плоскости окружены кружками радиусом 10^{-10}. Докажите, что любая прямая, проходящая через начало координат, пересекает а) еще хотя бы один кружок; б) бесконечно много кружков.

13. Есть ли рациональные корни у многочленов а) $16+8x+2x^2+2x^3+x^4$; б) $6+2x^2+3x^3+6x^4$; в) $10+5x+10x^2+2x^4$?

14. Докажите, что существуют два иррациональных числа a и b, такие что а) $a+b, ab$ рациональны; б) a^b рационально.

15. Докажите, что а) существует пара целых чисел m и n, такая что $|m - n\sqrt{2}| < 10^{-10}$; б) таких пар бесконечно много.

Цепные дроби.[1] Пары (m, n) из последней задачи дают приближение $\sqrt{2} \approx \frac{m}{n}$ с высокой точностью (порядка $\frac{1}{10^{10}n}$). Ниже описаны способы получения наилучших приближений иррациональных чисел рациональными.

Метод вбивания колышков. Изобразим число α (положительное, для определенности) лучом $y = \alpha x$ в первом квадранте плоскости. Отметим целые точки (k, n), $k, n \in \mathbb{Z}^+$. Обозначим через Γ^+ и Γ^- ломаные, являющиеся частями границ выпуклых оболочек множеств целых точек, расположенных выше и ниже луча соответственно (рисунок необходим). Занумеруем единой нумерацией вершины $u_k = (q_k, p_k)$ обеих ломаных, $u_{2k-1} \in \Gamma^-$, $u_{2k} \in \Gamma^+$.

16. Докажите, что числа p_k/q_k приближают α с ошибкой, не превышающей $1/(q_k)^2$.

Метод вытягивания носов. Мы строим последовательность параллелограммов, натянутых на векторы Ou_{k-1}, Ou_k. Вершина N с координатами $u_{k-1} + u_k$, противоположная вершине O, называется «носом». Начальный параллелограмм — единичный квадрат, $u_{-1} = (0, 1)$, $u_0 = (1, 0)$. Далее поступаем так: перемещаем отрезок $u_{k-1}N$ вдоль прямой, на которой он лежит, до тех пор, пока точка N не пересечет исходный луч, и еще немного, чтобы концы сдвинутого отрезка попали в целые точки. Начало сдвинутого отрезка обозначим через u_{k+1}. Это и задает новый параллелограмм.

17. Докажите, что полученные точки u_k — те же, что и в методе вбивания колышков.

18. Докажите, что все параллелограммы имеют одинаковую площадь 1. Выведите отсюда равенство $|p_k/q_k - p_{k+1}/q_{k+1}| = 1/(q_k q_{k+1})$, приводящее к той же оценке на порядок приближения числа α, что и выше.

Цепной дробью называется бесконечная дробь вида $a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$, $a_i \in \mathbb{N}$ $(a_1 \geqslant 0)$.

19. Докажите, что каждое иррациональное число допускает единственное представление в виде бесконечной цепной дроби (цепная дробь конечна тогда и только тогда, когда она представляет рациональное число).

Если в бесконечной цепной дроби отбросить все члены, начиная с $(n+1)$-го, то получатся рациональные приближения исходного иррационального числа.

20. Докажите, что полученные рациональные приближения совпадают с приближениями, полученными методами вбивания колышков и вытягивания носов. Как при помощи этих методов определить числа a_k?

Пусть, например, $\alpha = \sqrt{2}$. Воспользовавшись многократно равенством $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$, получаем

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}$$

Таким образом, цепная дробь для числа $\sqrt{2}$ бесконечна, что дает альтернативное доказательство иррациональности числа $\sqrt{2}$.

21. Найдите разложение в цепную дробь чисел $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$.

В действительности, последовательность a_k коэффициентов разложения числа α в цепную дробь периодична, начиная с некоторого места, тогда и только тогда, когда число α представимо в виде $\alpha = a + \sqrt{b}$, где a и b рациональны, иными словами, когда α является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

---

[1] Изложенный ниже материал и задачи 15–21 факультативны. Больше о цепных дробях можно узнать из книг: В. И. Арнольд. Цепные дроби. - М.: МЦНМО, 2000; А. Я. Хинчин. Цепные дроби. - М.: ГИФМЛ, 1960.

Независимый Московский Университет

Математический анализ 1-й курс, листок 2

15 сентября 2015 года

Определение ε-*окрестностью* точки a называется множество точек $U_\varepsilon(a) = \{x | a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$. Точка a называется *пределом* последовательности $\{a_n\}$ (обозначение: $a = \lim a_n$), если для любого $\varepsilon > 0$ все члены последовательности, начиная с некоторого, находятся в ε-окрестности точки a.

1. Сформулируйте, что означает, что число a *не* является пределом последовательности $\{a_n\}$. Докажите, что 1 не является пределом последовательности $\frac{1}{n}$.
2. Докажите, что у последовательности не может быть больше одного предела.

Определение. Последовательность a_n называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех $n, m > N \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$.

3. Докажите, что всякая последовательность, имеющая предел, фундаментальна.
4. Приведите пример фундаментальной последовательности на множестве рациональных чисел, не имеющей предела.

Аксиома полноты в множестве действительных чисел.

1) *Любая последовательность вложенных отрезков имеет общую точку.*
2) *Любая фундаментальная последовательность имеет предел.*
3) *Любая монотонно возрастающая ограниченная последовательность имеет предел.*
4) *Любое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань.*

5. Докажите, что эти формулировки аксиомы полноты эквивалентны между собой.
6. Докажите, что ваша любимая модель действительных чисел удовлетворяет аксиоме полноты.

Определение. *Предельной точкой множества* называется точка, в любой ε-окрестности которой имеются элементы этого множества. *Предельной точкой последовательности* называется точка в любой ε-окрестности которой содержится бесконечное число ее членов.

7. Докажите, что предел сходящейся последовательности является единственной ее предельной точкой.
8. Докажите, что у любой последовательности точек отрезка $[0, 1]$ имеется предельная точка.
9. Найдите предельные точки множеств

   а) $\frac{(2+(-1)^n)}{n}$; б) $\{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} |\ m, n \in \mathbb{N}\}$; в) $\{\sin n\}$.

10. Выясните, какие из следующих последовательностей имеют пределы, и (для пунктов а-ж) найдите эти пределы.
а) $(n+1)^{100}/(n^{100}+1)$;
б) $n^{100}/2^n$;
в) $a^{1/n}$;
г) $n!/n^n$;
д) $\sqrt[n]{\frac{2^n+3^n+4^n}{5^n+6^n}}$;
е) $\frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})}$;
ж) $\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}$;
з) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$;
и) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$;
к) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots\pm\frac{1}{n}$.

Независимый Московский Университет

Математический анализ 1-й курс, листок 3

23 сентября 2015 года

1. Для произвольного множества M положим $\rho(x,x)=0$, $\rho(x,y)=1$ при $x\neq y$. Докажите, что определенная таким образом функция является метрикой.

2. Докажите, что следующие функции для пространства $\mathbb{R}^n$ являются метриками:
(а) $\rho_2(x,y)=\sqrt{\sum(x_i-y_i)^2}$ (пространство $\mathbb{R}^n_2$);
(б) $\rho_1(x,y)=\sum|x_i-y_i|$ (пространство $\mathbb{R}^n_1$);
(в) $\rho_\infty(x,y)=\max|x_i-y_i|$ (пространство $\mathbb{R}^n_\infty$);
(г) $\rho_p(x,y)=(\sum|x_i-y_i|^p)^{1/p}$, $p>1$ (пространство $\mathbb{R}^n_p$).
Докажите, что $\lim\limits_{p\to\infty}\rho_p(x,y)=\rho_\infty(x,y)$. Является ли метрикой $\rho_p(x,y)$ при $p<1$?

3. Опишите, как выглядит шар единичного радиуса в $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ относительно каждой из приведенных метрик.

4. На пространстве $\mathbb{N}$ натуральных чисел 10-адическая метрика задается равенством $\rho(a,b)=10^{-k}$, если последние k цифр чисел a и b совпадают. Докажите, что ρ — метрика.

5. Докажите, что на пространстве отрезков $I=[a,b]$ на прямой следующие функции являются метриками:
(а) $\rho([a,b],[c,d])=|a-c|+|b-d|$;
(б) $\rho(I_1,I_2)=|I_1|+|I_2|-2|I_1\cap I_2|$ (где $|I|$ — длина отрезка).

Определение. Последовательность a_n в метрическом пространстве M с метрикой ρ называется *сходящейся* к точке $a\in M$, если $\forall\varepsilon{>}0\ \exists N\ \forall n{>}N\ \rho(a_n,a){<}\varepsilon$. Последовательность называется *фундаментальной*, если $\forall\varepsilon{>}0\ \exists N\ \forall m,n{>}N\ \rho(a_n,a_m){<}\varepsilon$.

6. Докажите, что всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.

Метрическое пространство *полно*, если всякая фундаментальная последовательность сходится.
Пополнением пространства M называется полное пространство $\widetilde{M}$, если $M\subset\widetilde{M}$ — подпространство, и всякая точка в $\widetilde{M}$ является предельной для M.
Проверьте, являются ли полными следующие пространства. Если нет, определите их пополнения:

7. Пространство $M=\mathbb{R}$ с метрикой $\rho(x,y)=|\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y|$.

8. Пространство отрезков на прямой с одной из метрик приведенной выше задачи 5.

9. Сфера $x^2+y^2+z^2=1$ в $\mathbb{R}^3$ с обычным расстоянием.

10. График функции $y=\sin\frac{1}{x}$, рассматриваемый как подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$.

11. Докажите, что у каждого пространства существует, и при том, единственное (с точностью до изоморфизма) пополнение.

12. Пространство $\mathbb{Z}_{10}$ 10-адических чисел состоит из формальных бесконечных последовательностей
$$\cdots a_3\,a_2\,a_1\,a_0\ ,\quad a_i\in\{0,1,\dots,9\}\ .$$
Докажите, что $\mathbb{Z}_{10}$ является пополнением пространства $\mathbb{N}$ по 10-адической метрике. Определите сложение, умножение и вычитание в $\mathbb{Z}_p$. (Заметим, что в N вычитание не определено!)

13. Определите пространство $\mathbb{Q}_{10}$ рациональных 10-адических чисел. Всегда ли в нем определено деление на число, отличное от нуля?

Определение. *Окрестностью* точки $x \in M$ называется произвольный открытый шар $U = \{y \in M,\ \rho(x, y) < r\}$. Подмножество $A \subset M$ *открыто*, если всякая точка этого множества содержится в A вместе с некоторой окрестностью.

14. Как выглядит открытое подмножество на прямой $\mathbb{R}$?

15. Открыто ли подмножество в $\mathbb{R}^2$, заданное неравенством $(x^2 + y^2)^2 < x^2 - y^2$?

16. Покажите, что объединение любого семейства открытых подмножеств открыто. Верно ли то же самое для пересечения открытых множеств?

    Множество A *замкнуто*, если оно содержит все свои предельные точки.

17. Замкнуто ли пересечение любого семейства замкнутых подмножеств? А объединение?

18. Проверьте, что замкнутый шар в 10-адических числах открыт.

19. Докажите, что A замкнуто тогда и только тогда, когда дополнение к A — открыто.

Независимый Московский Университет
Математический анализ 1-й курс, листок 4
30 сентября 2015 года

1. В каких точках непрерывны функции: $\sin\frac{1}{x}$; $x\sin\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x}\sin x$; $(-1)^{[1/x]}$; $\frac{1}{[1/x]}$.

2. Опишите все непрерывные функции на прямой, удовлетворяющие тождеству

$$\text{а) } \phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y); \qquad \text{б) } \psi(x+y) = \psi(x)\,\psi(y).$$

3. Рассмотрим следующие теоремы о множестве действительных чисел:

   - теорему о существовании точной верхней грани ограниченного множества;
   - теорему о существовании общей точки у системы вложенных отрезков;
   - теорему о существовании у ограниченной последовательности сходящейся подпоследовательности;
   - теорему о существовании у покрытия отрезка интервалами конечного подпокрытия.

   Рассмотрим следующие свойства функции f, непрерывной на отрезке $[a, b]$:

   - функция ограничена;
   - функция достигает своего максимума;
   - если $f(a) < 0 < f(b)$, то $f(x) = 0$ для некоторого $x \in [a, b]$;
   - функция равномерно непрерывна:
     $\forall\varepsilon{>}0\ \exists\delta{>}0 : \forall x, y{\in}[a, b]\ |x - y|{<}\delta \Rightarrow |f(x) - f(y)|{<}\varepsilon$.

   (а) (Слабая формулировка.) Докажите приведенные свойства непрерывной функции.
   (б) (Сильная формулировка.) Выведите каждое из приведенных свойств непрерывной функции из каждой приведенной теоремы о действительных числах (этот пункт включает $4 \times 4 = 16$ задач).

4. Дайте три определения непрерывного отображения метрических пространств (по аналогии с определениями непрерывной функции) и докажите их эквивалентность.

   Отображение метрических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда полный прообраз любого открытого множества открыт.
   Определение. Метрическое пространство M называется *линейно связным*, если для любых двух точек $a, b \in M$ существует непрерывное отображение $f : [0, 1] \to M$, такое, что $f(0) = a$, $f(1) = b$.
   Пространство M называется *связным*, если его нельзя представить как объединение двух непересекающихся непустых открытых подмножеств. Иными словами, если единственными подмножествами, являющимися одновременно открытыми и замкнутыми, являются M и $\emptyset$.

5. Докажите, что отрезок является связным и линейно связным.

6. Докажите, что линейно связное пространство связно.

7. Опишите все связные подмножества а) прямой $\mathbb{R}$; б) пространства $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел.

8. Пусть $Ж \subset \mathbb{R}^2$ есть объединение графика функции $y = \sin 1/x$ и отрезка $x = 0, -1 \leqslant y \leqslant 1$. Покажите, что $Ж$ является связным, но не линейно связным пространством.

9. Докажите, что непрерывная функция на связном пространстве принимает все промежуточные значения.

10. Докажите, что образ связного пространства при непрерывном отображении связен.

    Имеется следующие три определения компактности (из которых основным является последнее): пространство M *компактно*, если
    (а) M есть замкнутое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$;
    (б) из любой последовательность точек в M можно выбрать сходящуюся подпоследовательность;
    (в) из любого покрытия M открытыми подмножествами можно выбрать конечное подпокрытие.

11. Докажите, что в) $\Rightarrow$ б). Докажите, что для подмножеств в $\mathbb{R}^n$ все три определения равносильны.

12. Докажите, что непрерывная функция на компактном пространстве
    (а) ограниченна;
    (б) достигает максимума и минимума;
    (в) равномерно непрерывна.

13. Докажите, что если непрерывное отображение компактного пространства взаимно однозначно, то обратное отображение, заданное на образе исходного, также непрерывно.

Независимый Московский Университет

Математический анализ 1-й курс, листок 5

7 октября 2015 года

Множество M называется *счетным*, если существует взаимно однозначное соответствие $M \leftrightarrow \mathbb{N}$ (говорят также, что M имеет мощность $\aleph_0$).

1. Докажите, что следующие множества счетные:
   (а) множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел;
   (б) множество $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ n-ок рациональных чисел;
   (в) множество слов русского языка, т.е. конечных последовательностей
$$a_1a_2\ldots\ , \quad a_i \in \{\text{а}, \ldots, \text{я}\}\ .$$
2. Докажите, что следующие множества несчетные:
   (а) множество бесконечных последовательностей из нулей и единиц
$$a_1a_2\ldots\ , \quad a_i \in \{0, 1\}\ ;$$
   (б) множество бесконечных последовательностей рациональных чисел;
   (в) множество слов русского языка бесконечной длины.
3. Можно ли на плоскости расположить несчетное количество попарно непересекающихся
   (а) кругов;
   (б) восьмерок (фигур вида «∞»);
   (в) букв «$\top$»;
   (г) букв «$\wedge$»?
4. Может ли функция на прямой иметь более чем счетное множество строгих локальных максимумов?

   Говорят, что *множество имеет мощность континуума*, если существует его взаимно однозначное соответствие с множеством $\mathcal{D}^\infty$ бесконечных последовательностей из нулей и единиц.
5. Докажите следующую **теорему Шредера-Бернштейна**: если существуют вложения множеств $A \hookrightarrow B$ и $B \hookrightarrow A$ то существует и взаимно однозначное соответствие $A \leftrightarrow B$.
6. Докажите, что следующие множества имеют мощность континуума:
   (а) отрезок $[0, 1]$;
   (б) множества задачи 2;
   (в) пространство $C[a, b]$ функций, непрерывных на отрезке;
   (г) множество замкнутых подмножеств в $\mathbb{R}$; в $\mathbb{R}^2$.
7. Докажите, что ограниченная функция на отрезке непрерывна тогда и только тогда, когда ее график замкнут.
8. Докажите, что множество точек разрыва монотонной функции не более, чем счетно.
9. Приведите пример функции с разрывами во всех рациональных точках и непрерывную в иррациональных а) какой-нибудь; б) монотонной.

Пусть $K_1 = [0,1] \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $K_2 = K_1 \setminus \left(\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right), \ldots$. K_{i+1} получается выкидыванием средней трети каждого отрезка, из которых состоит K_i. *Канторовым множеством* называется пересечение $K = \bigcap K_i$.

10. Покажите, что
(а) K замкнуто и ограниченно;
(б) точки K находятся во взаимно однозначном соответствии с бесконечными последовательностями, состоящими из нулей и единиц;
(в) количество точек в K несчетно;
(г) K не содержит ни одного отрезка ненулевой длины;
(д) K не может быть представлено как объединение конечного или счетного набора непересекающихся отрезков.

11. Чему равна длина канторова множества? Придумайте (и назовите своим именем) пример множества канторовского типа ненулевой длины.

12. Пусть канторово множество покрыто интервалами. Всегда ли можно выбрать из этого покрытия конечное подпокрытие?

13. Докажите, что множество предельных точек любой последовательности вещественных чисел замкнуто. Более того, всякое замкнутое множество на прямой является множеством предельных точек некоторой последовательности.

14. Всегда ли замкнуто подмножество плоскости, заданное уравнением $f(x,y) = 0$ для некоторой непрерывной функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$? Всякое ли замкнутое подмножество плоскости может быть задано таким образом?

15. Какие из следующих свойств непрерывного отображения всегда справедливы? Докажите справедливые утверждения и приведите контрпримеры для ошибочных.
(а) образ открытого подмножества открыт;
(б) образ замкнутого подмножества замкнут;
(в) образ компактного подмножества компактен;
(г) прообраз компактного подмножества компактен;
(д) те же утверждения (а-г) для непрерывного отображения *компактных* пространств.

16. Докажите, что метрическое пространство $C[a,b]$ функций, непрерывных на отрезке, полно.

17. Опишите топологию в пространстве (всех) функций на отрезке, в которой сходящимися последовательностями являются поточечно сходящиеся последовательности функций (это т.н. *слабая топология*, или *топология поточечной сходимости*). Замкнуто ли в этой топологии подпространство непрерывных функций?

Независимый Московский Университет

Математический анализ 1-й курс, листок 6

14 октября 2015 года

1. Докажите, что если ряд $\sum a_n$ сходится, то $a_n \longrightarrow 0$. Верно ли обратное?

2. При каких значениях параметров сходятся ряды $\sum q^n$; $\sum \frac{1}{z^n}$.

3. Докажите, что
(а) ряд $\sum \frac{1}{n^2}$ сходится;
(б) ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится;
(в) при каких α сходится ряд $\sum \frac{1}{n^\alpha}$?

4. Сходятся ли ряды
(а) $\sum \frac{n^2-10n+1}{n^3+17n}$, $\sum \frac{n^3}{n^5-17}$;
(б*) $\sum \frac{1}{n \ln n}$, $\sum \frac{1}{n \ln^2 n}$, $\sum \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$?

5. Докажите **критерий Даламбера**: пусть существует предел $\lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$. Тогда при $q > 1$ ряд $\sum a_n$ расходится, при $q < 1$ — сходится.

6. Докажите **критерий Коши**: пусть существует предел $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$. Тогда при $q > 1$ ряд $\sum a_n$ расходится, при $q < 1$ — сходится.

7. Докажите, что следующий ряд сходится и найдите его сумму
$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots$$
Переставьте члены ряда так, чтобы полученный ряд сходился к 7.

Определение. Ряд $\sum a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum |a_n|$.

8. Докажите, что абсолютно сходящийся ряд сходится.

9. Докажите, что при любой перестановке членов абсолютно сходящегося ряда его сумма не меняется.

10. Докажите следующую **теорему Римана**: если ряд сходится, но не абсолютно (говорят, *условно*), то можно переставить его члены так, чтобы полученный ряд сходился к любому наперед заданному числу.

11. Сходится ли, а если да, то абсолютно или нет ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$?

12. Докажите, что абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать, $(\sum a_n)(\sum b_m) = \sum a_n b_m$. Что означает запись $\sum a_n b_m$? В каком порядке суммировать эту двухиндексную последовательность чисел?

13. Перемножьте следующие ряды
$$(1 + x + x^2 + \dots)^2 ,$$
$$(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots)(1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \cdots) .$$
Постарайтесь догадаться, чему равна сумма ряда $\sum \frac{x^n}{n!}$.

Независимый Московский Университет

Математический анализ 1-й курс, листок 7

21 октября 2015 года

Определение (аналитическое). Производной функции f в точке a называется предел $p = f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, если он существует.

Определение (геометрическое). Производной функции f в точке a называется такое число p, что для функции f в окрестности точки a имеется разложение

$$f(x) = f(a) + p(x-a) + o(x-a).$$

1. Докажите равносильность определений. Докажите, что если функция имеет производную в некоторой точке, то она непрерывна в ней.

2. Вычислите производную $(\operatorname{tg} x)'$; $(\operatorname{arctg})'$.

3. Сколько производных существует у функций $x^{5/2}$; $x^3\sin(1/x)$, доопределенных в нуле нулем?

4. Под каким углом пересекаются гиперболы $\begin{cases} x^2-y^2=a \\ xy=b \end{cases}$?

5. Докажите
$f'\equiv 0 \Leftrightarrow f = \mathrm{const}$;
$f' = \mathrm{const} \Leftrightarrow$ f — линейная функция;
$f^{(N)} \equiv 0$ для некоторого N (в частности, все производные до порядка N определены) $\Leftrightarrow f$ — многочлен.

6. Для дифференцирования степенных рядов нужно знать только производную степенной функции $(x^k)'$. Вычислите $(e^x)'$.

7. Дан ряд $f(x) = \sum a_n x^n$ с радиусом сходимости R.
Какой радиус сходимости ряда $\sum n a_n x^{n-1}$?
Докажите, что $f'(x) = \sum n a_n x^{n-1}$ в интервале сходимости.

8. Докажите следующую формулу, выражающую правило дифференцирования композиции, обратной функции, изменение производной при замене координаты:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x).$$

9. (Алгебраическое определение производной). Зададим на множестве многочленов операцию, сопоставляющую многочлену f оп переменной x новый многочлен $\Delta(f)$, при помощи следующих аксиом:
линейность, $\Delta(\lambda f + \mu g) = \lambda\Delta(f) + \mu\Delta(g)$
(λ, μ — числа); *правило Лейбница*, $\Delta(fg) = \Delta(f)g + f\Delta(g)$;
нормировка, $\Delta(x) = 1$.
Докажите,
$\Delta(1) = 0$.
$\Delta(f) = f'$.
Если последнюю аксиому заменить условием $\Delta(x) = p_0$, то $\Delta(f) = f'p_0$.

10. Рассмотрим на множестве многочленов операцию

$$D = \exp\left(\frac{d}{dx}\right) = 1 + \frac{1}{1!}\frac{d}{dx} + \frac{1}{2!}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \cdots .$$

Вычислите $D(1)$; $D(x)$; $D(f)$ для произвольного многочлена f.

Независимый Московский Университет

Математический анализ 1-й курс, листок 8

28 октября 2015 года

1. Разложите в ряды в начале координат функции

$$e^x\ ; \quad \ln(1+x)\ ; \quad \cos x\ ; \quad \sin x\ ; \quad (1+x)^\alpha\ .$$

2. То же для функций $e^{\alpha x}\sin\beta x\ ; \quad \operatorname{arctg} x\ ; \quad \dfrac{1}{1-3x+2x^2}\ .$

3. Найдите первые 3 ненулевых коэффициента разложения в нуле функции $\operatorname{tg} x$ следующими способами и сравните результаты:

   а) рассматривая частное $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$;

   б) обращая известный ряд для обратной функции $\operatorname{arctg} x$;

   в) при помощи рекуррентной формулы на коэффициенты разложения, вытекающей из дифференциального уравнения $f'(x) = 1 + f(x)^2$ на его решение $f(x) = \operatorname{tg}(x)$.

4. Найдите первые несколько членов разложения y как функции от x, заданной неявно уравнением $x^3 + 3xy + y^3 = 0$.

5. Найдите $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\operatorname{sh} x) - \operatorname{sh}(\sin x)}{x^7}$.

6. Найдите $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\operatorname{tg} x) - \operatorname{tg}(\sin x)}{\arcsin(\operatorname{arctg} x) - \operatorname{arctg}(\arcsin x)}$.

Независимый Московский Университет

Математический анализ 1-й курс, листок 9

11 ноября 2015 года

1. Докажите следующую **теорему Лагранжа**, дающую оценку на степень близости функции своему многочлену Тейлора: если функция непрерывно дифференцируема необходимое число раз на отрезке $[0, x]$, то для некоторой точки $\xi \in [0, x]$ выполняется равенство
$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}.$$
2. Постройте такие бесконечно дифференцируемые функции f на прямой $\mathbb{R}$, что

   $f^{(k)}(0) = 0$ для всех k, но $f(x) \neq 0$ при $x \neq 0$;

   $f(x) \equiv 0$ при $|x| \geqslant 1$, и $f(x) > 0$ при $|x| < 1$;

   $f(x) \equiv 0$ при $x \leqslant -1$, и $f(x) \equiv 1$ при $x \geqslant 1$.

   $f(x) \equiv 0$ при $|x| \geqslant 1$, и $f(x) \equiv 1$ при $|x| \leqslant 1/2$.
3. Для произвольной заданной последовательности чисел $a_0, a_1, \ldots$ постройте бесконечно дифференцируемую функцию f на прямой такую, что $f^{(k)}(0) = a_k$.
4. Докажите, что существуют бесконечно дифференцируемая на всей числовой прямой фукнция $y = f(x)$, удовлетворяющая соотношению
$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$$
(одно из «уравнений Бесселя»), $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, и найдите ее разложение в степенной ряд.
Указание. С нахождения ряда и начните.
5. Найдите разложение в точке $t = 0$ с точностью до $o(t^8)$ решения $x(t)$ «уравнения физического маятника» $\ddot{x} = -\sin x$ с начальными данными $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$, и сравните с аналогичным разложением решения «уравнения математического маятника» $\ddot{x} = -x$.
6. Найдите пропущенный член разложения в бесконечности
$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + ? + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$
7. Найдите неизвестные константы разложения в единице
$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} + A\,(1-x)^{\alpha} + B\,(1-x)^{\beta} + o\Big((1-x)^{\beta}\Big).$$
8. Обозначим через p_n количество «up-down последовательностей», то есть перестановок $k \mapsto a_k$ чисел $1, 2, \ldots, n$, таких что
$$a_1 < a_2 > a_3 < a_4 > \ldots.$$
а) Докажите рекуррентную формулу для этих чисел с нечетными номерами
$$p_{2r+1} = \sum_{n+k=r-1} C_{2r}^{2n+1} p_{2n+1} p_{2k+1}, \qquad p_1 = 1.$$
Выведите из нее дифференциальное уравнение $f' = 1 + f^2$ на функцию $f(t) = \sum_{r \geqslant 0} p_{2r+1} \frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!}$ и получите, окончательно, $f(x) = \operatorname{tg} x$.
б) Выведите аналогичным образом рекуррентное соотношение на числа p_{2r}, перепишите это соотношение как дифференциальное уравнение на функцию $g(x) = 1 + \sum_{r \geqslant 1} p_{2r} \frac{x^{2r}}{(2r)!}$, решите это уравнение и дайте формулу для функции $g(x)$.