Листок 7.

Пусть $(X, \mathcal{A}_\mu, \mu)$ – измеримое пространство с конечной неотрицательной мерой μ.

Функции $\varphi = \sum_{k=1}^n c_k I_{A_k}$, где через I_{A_k} обозначаются индикаторы измеримых множеств A_k, а $c_k \in \mathbb{R}$, называются *простыми*. Для простой функции $\varphi = \sum_{k=1}^n c_k I_{A_k}$ положим по определению

$$\int \varphi\, d\mu = \sum_{k=1}^n c_k \mu(A_k).$$

Для произвольной неотрицательной измеримой функции f интеграл Лебега определяется формулой

$$\int f\, d\mu = \sup \int \varphi\, d\mu,$$

где супремум берется по всем простым функциям $\varphi \le f$. Функция f интегрируема, если такой супремум конечен. Наконец в общем случае измеримая функция f интегрируема, если интегрируемы ее положительная часть $f^+ = \max\{0, f\}$ и отрицательная часть $f^- = \max\{0, -f\}$. В случае интегрируемости

$$\int f\, d\mu = \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu.$$

Задача 1. Проверьте, что интеграл от простой функции определен корректно: если $\sum_k c_k I_{A_k} = \sum_j q_j I_{B_j}$, то $\sum_k c_k \mu(A_k) = \sum_j q_j \mu(B_j)$. Докажите, что для интеграла от простых функций верны свойства

$$\int (\alpha\varphi + \beta\psi)\, d\mu = \alpha \int \varphi\, d\mu + \beta \int \psi\, d\mu, \quad \varphi \le \psi \Rightarrow \int \varphi\, d\mu \le \int \psi\, d\mu.$$

Задача 2. Пусть f – ограниченная измеримая функция на $(X, \mathcal{A}_\mu, \mu)$.

(a) Докажите, что f интегрируема по мере μ.

(b) Докажите, что если $f \ge 0$, то существует последовательность простых функций f_n такая, что $f_n \ge 0$, $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$, f_n равномерно сходится к f и интегралы от f_n сходятся к интегралу от f.

(c) Докажите, что если последовательность простых функций равномерно сходится к f, то и интегралы от них стремятся к интегралу от f. Выведите из этого свойства линейности и монотонности интеграла от ограниченных функций.

Задача 3. (Простейший вариант теоремы Лебега) Пусть f_n, f – измеримые функции на измеримом пространстве $(X, \mathcal{A}_\mu, \mu)$ с конечной неотрицательной счетно-аддитивной мерой μ. Если $|f_n| \le C$ для всех n и некоторой константы C и последовательность f_n сходится к f по мере μ (в частности это так, если f_n сходится к f почти всюду), то

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = \int f\, d\mu.$$

Приведите пример последовательности измеримых функций f_n, которые сходятся почти всюду к нулю на $[0,1]$ с мерой Лебега, но последовательность интегралов от f_n по $[0,1]$ не сходится.

Задача 4. Пусть f_n – последовательность измеримых функций, которые почти всюду сходятся к функции f отрезке $[0,1]$ с мерой Лебега. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) e^{-f_n^2(x)}\, dx = \int_0^1 f(x) e^{-f^2(x)}\, dx.$$

Задача 5. Предположим, что задана ограниченная функция f на отрезке $[0,1]$. Пусть $\mathbb{T}_n$ – последовательность разбиений отрезка $[0,1]$ точками $x_k^n = k/2^n$, $\Delta_k^n = [x_{k-1}^n, x_k^n)$ при $k < 2^n$ и $\Delta_n^k = [x_{n-1}^k, x_n^k]$ при $k = 2^n$. Положим

$$h_n = \sum_k \inf_{\Delta_k^n} f I_{\Delta_k^n}, \quad g_n = \sum_k \sup_{\Delta_k^n} f I_{\Delta_k^n}.$$

(a) Докажите, что $h_n \le f \le g_n$, $h_n \le h_{n+1}$ и $g_{n+1} \le g_n$.

(b) Докажите, что f интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (g_n - h_n)\, dx = 0.$$

(c) Докажите, что для почти всех $x \in [0,1]$ по мере Лебега $g_n(x) - h_n(x) \to \omega(f,x)$, где $\omega(f,x)$ – колебание f в точке x.

(d) Докажите критерий Лебега: ограниченная функция интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда она почти всюду непрерывна.

Задача 6. Докажите, что если функция f интегрируема на $[0,1]$ по Риману, то она интегрируема по Лебегу и интегралы совпадают.

Задача 7. Пусть f – неотрицательная измеримая функция (не предполагаем, что она ограниченна). В следующих упражнениях можно пользоваться только определением интеграла и свойствами интеграла от ограниченных функций.

(a) Докажите, что если $f \le g$, то $\displaystyle\int f\,d\mu \le \int g\,d\mu$.

(b) Докажите, что если $g \ge 0$, то $\displaystyle\int f\,d\mu + \int g\,d\mu \le \int (f+g)\,d\mu$.

(c) Докажите, что f интегрируема тогда и только тогда, когда интегралы от $[f]_N = \min\{f, N\}$ равномерно ограниченны. Покажите, что в случае интегрируемости интегралы от $[f]_N$ сходятся к интегралу от функции f.

(d) Пусть $g \ge 0$. Проверьте, что $[f+g]_N \le [f]_N + [g]_N$. Докажите, что интеграл от суммы двух неотрицательных функций равен сумме интегралов.

(e) Пусть $h_n \ge 0$ – последовательность ограниченных функций и $\displaystyle\int |h_n - f|\,d\mu \to 0$. Докажите, что интегралы от h_n сходятся к интегралу от функции f.

Задача 8. Пусть f – измеримая функция (не предполагаем, что она ограниченна или постоянного знака). В следующих упражнениях можно пользоваться только определением интеграла, свойствами интеграла от ограниченных функций и задачей 7.

(a) Докажите, что функция f интегрируема по мере μ тогда и только тогда, когда функция $|f|$ интегрируема по μ.

(b) Докажите, что если f интегрируема, то интегралы от $[f]_N := [f^+]_N - [f^-]_N$ стремятся к интегралу от функции f и $\displaystyle\int \Big|[f]_N - f\Big|\,d\mu \to 0$.

(c) Пусть функция f интегрируема. Докажите, что если h_n – последовательность ограниченных функций и $\displaystyle\int |h_n - f|\,d\mu \to 0$, то интегралы от h_n сходятся к интегралу от f.

(d) Выведите свойства линейности и монотонности интеграла Лебега.

Задача 9. Пусть f_n – измеримые и неотрицательные функции. Докажите, что если ряд $\displaystyle\sum_n \int f_n(x)\,d\mu$ сходится, то ряд $\sum_n f_n(x)$ сходится почти всюду и его сумма является интегрируемой функцией.

Задача 10. (a) Докажите, что если функция f абсолютно интегрируема по Риману в несобственном смысле на $(0,1]$, то она интегрируема по мере Лебега на $[0,1]$ и интегралы совпадают.

(b) Приведите пример функции, которая интегрируема по Риману в несобственном смысле на $(0,1]$, но не является интегрируемой на $[0,1]$ по мере Лебега.

(c) Выясните при каких $\alpha > 0$, $\beta > 0$ функция $f(x)$ интегрируема на $[0,1]$ по мере Лебега, где (i) $f(x) = x^\alpha |\ln x|^\beta$, (ii) $f(x) = x^\alpha \sin(x^{-\beta})$.

Задача 11. Пусть $g_n \le f_n \le h_n$, $g_n \to g$, $h_n \to h$ и $f_n \to f$ почти всюду, интегралы (по мере μ) от g_n сходятся к интегралу от g и интегралы от h_n сходятся к интегралу h. Докажите, что интегралы от f_n сходятся к интегралу от f.

Задача 12. Пусть $f_n \ge 0$, f_n почти всюду сходится к f и

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu.$$

Тогда $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|\,d\mu = 0$. Покажите, что без условия $f_n \ge 0$ это утверждение не выполняется.