Листок 3.

Пусть N, M – векторные пространства над $\mathbb{R}$. Отображение $L\colon N \mapsto M$ называется линейным, если $L(\alpha x+\beta y)=\alpha L(x)+\beta L(y)$ для всех $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ и $x,y\in N$. Линейное отображение еще называют линейным оператором. Далее предполагаем, что N, M – нормированные пространства.

Задача 1. Пусть $L(x)=x(0)$ – линейное отображение из $C[0,1]$ в $\mathbb{R}$. Является ли оно непрерывным, если на $C[0,1]$ задана норма a) $\|x\|=\max_{[0,1]}|x(t)|$, b) $\|x\|=\int_0^1|x(t)|\,dt$?

Задача 2.* Докажите, что нормированное пространство N конечномерно тогда и только тогда, когда всякое линейное отображения из N в $\mathbb{R}$ непрерывно.

Положим

$$\|L\|=\sup_{x\colon \|x\|\le 1}\|L(x)\|$$

Задача 3.

(i) Докажите, что величина $\|L\|$ конечна тогда и только тогда, когда L – непрерывный оператор.

(ii) Докажите, что $\|L\|$ – норма на линейном пространстве непрерывных линейных операторов.

(iii) Докажите, что $\|L_1\circ L_2\|\le\|L_1\|\|L_2\|$.

(iv) Покажите на примере, что в определении $\|L\|$ нельзя sup заменить на max.

Задача 4. Пусть $L(x)=Ax\colon\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^n$, где A – матрица $n\times n$ и рассматривается пространство $\mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой. Докажите, что $\|L\|$ равна $\sqrt{\lambda}$, где λ – наибольшее собственное значение матрицы AA^*.

Отображение $f\colon N\mapsto M$ называется дифференцируемым (по Фреше) в точке $a\in N$, если f определено в окрестности точки a и существует такой линейный непрерывный оператор $L_a\colon N\mapsto M$, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|f(a+h)-f(a)-L_a(h)\|}{\|h\|}=0.$$

Линейный оператор L называют дифференциалом отображения f в точке a и обозначают через $df(a,h)$.

Задача 5. Докажите, что следующие отображения дифференцируемы на своей области определения и найдите их дифференциалы:

(a) $f(x)=L(x)$ – линейный непрерывный оператор;

(b) $f\colon\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$, $f(x)=\|x\|^2=x_1^2\ldots+x_n^2$;

(c) $f\colon M^n\mapsto M^n$, $f(x)=x^k$, где M^n – матрицы $n\times n$;

(d) $f\colon M^n\mapsto M^n$, $f(x)=x^{-k}$;

(e) $f\colon M^n\mapsto M^n$, $f(x)=e^x$;

(f) $f\colon M^n\mapsto\mathbb{R}$, $f(x)=\det x$;

(g) $f\colon C[0,1]\mapsto\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^1|x(t)|^2\,dt$.

Предел

$$\partial_h f(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+th)-f(a)}{t}$$

называют производной по вектору h. Если $\|h\|=1$, то $\partial_h f(a)$ называют производной по направлению h. Если существует такой линейный непрерывный оператор $L_a\colon N\mapsto M$, что $\partial_h f(a)=L_a(h)$ для всякого $h\in N$, то говорят, что отображение $f\colon N\mapsto M$ дифференцируемо по Гато в точке $a\in N$.

Задача 6. (i) Докажите, что дифференцируемость по Фреше влечет дифференцируемость по Гато, но обратное неверно.

(ii) Приведите пример функции $f\colon\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$, у которой для всякого h существует $\partial_h f(0)$, но функция f не дифференцируема по Гато в $x=0$.

(iii) Пусть $f\colon N\mapsto\mathbb{R}$ дифференцируема по Гато в окрестности точки a и отображение $b\mapsto L_b$ непрерывно в точке a. Докажите, что f дифференцируема по Фреше в точке a.

Пусть $f\colon\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$ дифференцируема в точке a. Тогда $df(a,\cdot)$ – линейное отображение $\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$ и его можно записать в виде $df(a,h)=c_1h_1+\ldots+c_nh_n$. Вектор $(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ называется градиентом функции f точке a и обозначается через $\nabla f(a)$ или $\mathrm{grad} f(a)$.

Задача 7. Докажите, что

(a) $c_k = \partial_{e_k} f(a)$, где $e_k = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots 0)$ (выражение $\partial_{e_k} f(a)$ обозначают через $\frac{\partial f(a)}{\partial x_k}$ и называют частной производной по x_k);

(b) $\max_{\|h\|=1} \partial_h f(a) = \|\mathrm{grad} f(a)\|$.

Задача 8. (i) Пусть кривая $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $t \in [0, 1]$, задана непрерывно дифференцируемыми функциями $x_k(t)$ Предположим в каждой точке кривой вектор скорости $\dot\gamma$ перпендикулярен градиенту функции f. Докажите, что f постоянна γ.

(ii) Опишите все дифференцируемые функции $f(x, y)$, удовлетворяющие уравнению $a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, где a, b – некоторые числа.

Заметим, что dx_k (дифференциал функции $f(x) = x_k$) является линейной функцией на $\mathbb{R}^n$, причем всякая линейная функция L может быть записана в виде $L = a_1dx_1 + a_2dx_2 + \ldots + a_ndx_n$. Если задано отображение $\omega\colon x \mapsto L_x$, сопоставляющее каждой точке открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ линейную функцию L_x, то говорят, что на U задана 1-форма ω или дифференциальная форма ω степени 1. Далее пишем $\omega(x) = a_1(x)dx_1 + \ldots + a_n(x)dx_n$. Типичный пример 1-формы – дифференциал функции f. Форму ω можно проинтегрировать по гладкому пути $\gamma\colon [0, 1] \mapsto U$ следующим образом:

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 a_1(\gamma(t))\dot x_1(t) + \ldots + a_n(\gamma(t))\dot x_n(t)\,dt.$$

Кривую можно параметризовать различными способами. Непрерывно дифференцируемая функция $t(\tau)$, отображающая $[0, 1]$ на $[0, 1]$, называется допустимой заменой параметра, если $t' \neq 0$.

Задача 9. Докажите, что модуль выражения $\int_\gamma \omega$ не зависит от допустимой замены параметра $t(\tau)$, а знак меняется или не меняется в зависимости от отрицательности или положительности t'.

Задача 10. Докажите, что $\displaystyle\int_\gamma df = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$.

Задача 11. Пусть γ – гладкая замкнутая ($\gamma(0) = \gamma(1)$) кривая на плоскости, не проходящая через $(0, 0)$. Докажите, что выражение

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

равно целому числу. Найдите это число для случая, когда $\gamma(t) = (\cos nt, \sin nt)$. Каков геометрический смысл этого целого числа?

Указание: вычислите $d\Big(\mathrm{arctg}\frac{y}{x}\Big)$.

Если форма является дифференциалом некоторой функции, то говорят, что эта форма точная. Из задачи 11 видно, что не всякая 1-форма является точной.

Задача 12. Пусть $a_k(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции на $\mathbb{R}^n$. Предположим, что $\frac{\partial a_k}{\partial x_i} = \frac{\partial a_i}{\partial x_k}$. Докажите, что форма $a_1dx_1 + \ldots + a_ndx_n$ является дифференциалом некоторой функции f.

Указание: $f(x) = \displaystyle\int_0^1 x_1a_1(tx) + \ldots + x_na_n(tx)\,dt$.