

## Листок 10.

Пусть  $f$  определена в окрестности точки  $a$ . Говорят, что  $f$  дифференцируема в точке  $a$ , если существует конечный предел  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ , который называют производной функции  $f$  и обозначают через  $f'(a)$ .

Задача 1. Докажите, что  $f$  дифференцируема в точке  $a$  тогда и только тогда, когда

$$f(a + h) - f(a) = Ah + \alpha(a, h)h, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \alpha(a, h) = 0.$$

Линейную функцию  $h \mapsto Ah$  называют дифференциалом функции  $f$  в точке  $a$ .

Задача 2. Докажите, что функция Кантора не имеет производной в точках канторовского множества.

Задача 3. (а) Пусть  $f$  всюду дифференцируемая функция и  $F = \{x : f(x) = 0\}$ . Докажите, что множество  $x \in F$ , для которых  $f'(x) \neq 0$ , не более чем счетно.

(б)\* Пусть  $f$  — непрерывна на  $[a, b]$  и  $f'(x) = 0$  для всех  $x$  кроме не более чем счетного множества. Докажите, что  $f = \text{const}$ .

Задача 4. Что больше:  $e^\pi$  или  $\pi^e$ ?

Задача 5. Докажите, что функция  $f(x) = e^{-1/x^2}$  при  $x > 0$  и  $f(x) = 0$  при  $x \leq 0$  бесконечно дифференцируема на  $\mathbb{R}$ .

Задача 6. Пусть  $f \in C^\infty(-1, 1)$ ,  $f$  отлична от нуля в любой проколотой окрестности  $x = 0$  и  $f^{(k)}(0) = 0$  для всякого  $k \geq 0$ . Докажите, что  $\sup_{k, x} |f^{(k)}(x)| = +\infty$ .

Задача 7. Докажите, что для всякого замкнутого множества  $F$  на числовой прямой существует бесконечно дифференцируемая функция  $f$  такая, что  $F = \{x : f(x) = 0\}$ .

Задача 8. Пусть  $f$  — непрерывно дифференцируемая функция на  $[0, +\infty)$  и  $f(0) = 1$ . Вычислите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(\frac{t}{n}))^n$  для всякого  $t \geq 0$ .

Задача 9. Найдите значение предела

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(shx) - sh(\sin x)}{x^7}.$$

Задача 10.

(а) Пусть  $x = x(t)$  — корень уравнения  $x^5 + x = t$ . Найдите первые три члена разложения функции  $x(t)$  в точке  $t = 0$ .

(б) Найдите первые три члена асимптотики  $n$ -ого корня уравнения  $tg(x) = x$ .

(с) Найдите первые два члена асимптотики последовательности  $a_{n+1} = \sin a_n$ ,  $a_1 = 1$ .

Задача 11. Для произвольной последовательности  $\{a_k\}$  докажите, что существует бесконечно дифференцируемая функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , такая что  $f^{(k)}(0) = a_k$ .

Задача 12. (а) К реке шириной  $a$  построен под прямым углом канал шириной  $b$ . Какой максимальной длины суда могут входить в этот канал?

(б) Чашку цилиндрической формы с чаем вращают вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Найдите форму поверхности чая.