Существует достаточно света для тех,
кто хочет видеть,
и достаточно мрака для тех,
кто — не хочет.

Паскаль

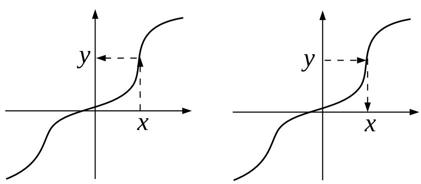
1.9. *ЛОГАРИФМЫ*

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ обратна к показательной, т. е.

$$x = a^y \quad \leftrightarrows \quad y = \log_a x \tag{1}$$

Традиционно для обозначения аргумента используется буква x, функции — y. Поэтому мы пишем $x = a^y$, чем функцию $y = f(x) = \log_a x$ задаём ***неявно***. Таким образом, $y = \log_a x$ — это решение уравнения $x = a^y$ относительно y.

Функция и её обращение. Здесь уместно кое-что напомнить. Функция $f(x)$ — это ***зависимость*** между величинами x и $y = f(x)$, причём сначала указывается x, затем «вычисляется» y. Пример: $y = x^2$. Функция может задаваться также с помощью графика[1], и тогда «вычисление» y сводится к построению, показанному на рисунке слева



(2)

А определение в $y = f(x)$ величины x по значению y — изображено справа. Такая зависимость называется обратной функцией и обозначается как f^{-1}, т. е. $x = f^{-1}(y)$. Разумеется, буквы для обозначения аргумента и функции можно выбирать любые. Из (2) очевидно, что

$$f\left(f^{-1}(z)\right) = z, \qquad f^{-1}(f(u)) = u, \tag{3}$$

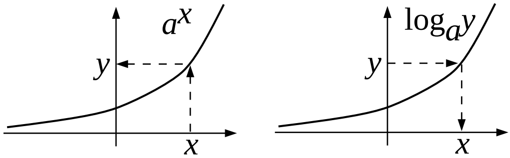
[1] И такой геометрический эквивалент всегда может рассматриваться параллельно с алгоритмическим заданием функции.

что удобнее записывать без скобок,

$$ff^{-1}z = z, \qquad f^{-1}fu = u, \tag{4}$$

мы же с вами не компьютеры, которым нарушение грамматики хуже цианистого калия.

Для тандема экспоненты с логарифмом рис. (2) выглядит так ($a > 1$)

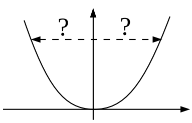


(5)

Тождества (4) в данном случае переходят в

$$a^{\log_a z} = z, \qquad \log_a a^u = u.$$

В случае $f(x) = x^2$ определение f^{-1} сталкивается с многозначностью.



Если мы хотим иметь дело с однозначными функциями, то область определения $f(x) = x^2$ надо ограничить, например, положив $x \geqslant 0$. Тогда $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Соответственно, (4) есть

$$\left(\sqrt{z}\right)^2 = z, \qquad \sqrt{u^2} = u$$

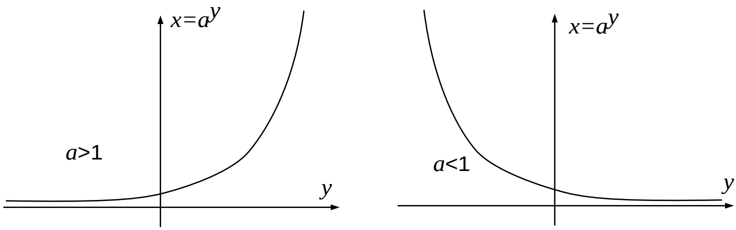
Функция a^x определена при любом x, обратная — только при $x > 0$.

Вернёмся к

$$\boxed{a^{\log_a x} = x},$$

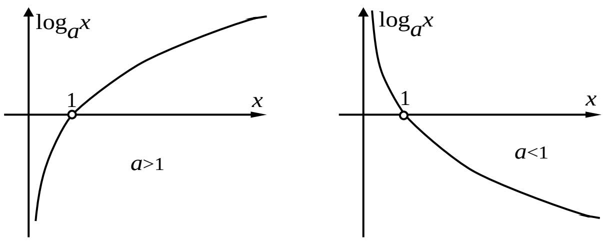
что называют *основным тождеством для логарифмов.*

Поскольку a^x и $\log_a x$ — взаимно обратные функции, возникает впечатление о полном равноправии. Но логарифм, конечно, воспринимается труднее. Как зубную пасту, легче выдавить из тюбика, — так и здесь, проще иметь дело с a^x. Ситуация ещё усугубляется тем, что вместо $x = \log_a y$ обычно приходится писать $y = \log_a x$, меняя буквы местами, ибо этикет требует x — для аргумента, y — для функции. Если бы не это, то даже график логарифма не надо было бы рисовать заново. Он уже изображен на рисунке



(6)

Правда, в обозначениях $x = \log_a y$ и с нестандартным расположением осей. Если же буквы x, y поменять местами, и оси привести в обычное положение (поворот на $90°$ плюс отражение относительно вертикальной оси), то график логарифма будет выглядеть так.



Таким образом, график логарифма и график показательной функции — это одна и та же кривая (с точностью до поворота и отражения).

То же самое можно сказать и о свойствах этих функций. Свойства логарифма — это свойства показательной функции, выраженные на другом языке. Например, «логарифм произведения равен сумме логарифмов»,

$$\boxed{\log_a bc = \log_a b + \log_a c},$$

есть не что иное как $a^\beta a^\gamma = a^{\beta+\gamma}$, а

$$\boxed{\log_a b^c = c \log_a b}$$

— эквивалент $(a^\beta)^\gamma = a^{\beta\gamma}$.

Поскольку зубную пасту вернуть в тюбик не так просто, эти элементарные правила, без привычки, даются не сразу.

Логарифмируя тождество $a^{\log_a b} = b$ по основанию c, получаем

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b,$$

откуда

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}, \tag{7}$$

что называют *формулой перехода к другому основанию*. Полагая в (7) $c = b$, имеем[2]

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}.$$

Наиболее широкое распространение имеют десятичные логарифмы и натуральные (по основанию $e \simeq 2,7$), для которых используются специфические обозначения:

$$\boxed{\log_{10} x = \lg x, \qquad \log_e x = \ln x}.$$

С задачами на логарифмы, разумеется, надо повозиться.

Маленький пример. Решим неравенство

$$\lg x + \lg(x+1) < \lg(2x+6)$$

[2] С учётом $\log_b b = 1$.

Здесь важно обратить внимание и оговорить заранее $x > 0$, что вытекает из присутствия в задаче $\lg x$. Далее

$$\lg x(x+1) < \lg(2x+2),$$

откуда в силу $a > 1$ имеем $x(x+1) < (2x+2)$, что равносильно

$$x^2 - x - 2 < 0.$$

Последнему неравенству удовлетворяют иксы из диапазона $(-1, 2)$, но тут надо вспомнить об условии $x > 0$. Окончательно: $0 < x < 2$.