Там где нет уловимой причины,
Барабан лотереи не в счет,
Миром косвенно правят глубины,
Нисходя из небесных высот.

1.8. *ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ РОСТ*

Функция a^x растёт очень быстро, как говорят — *экспоненциально. Экспоненциальный рост* необходимо включить в арсенал *ангела интуиции*[1]. Потому что сей ангел воспитан в основном на *пропорциональном*, $y = kx$, и *обратно пропорциональном*, $y = k/x$, *росте.* Увеличение площади посева вдвое увеличивает урожай также вдвое. А если в три раза быстрее соображать, то на решение задач будет уходить в три раза меньше времени.

При экспоненциальном росте изменение параметров носит «взрывной характер», представляя некоторую опасность. За день-другой до катастрофы нет признаков для беспокойства. Загрязнение среды не настораживает, но «вдруг» показатели неблагополучия резко возрастают, и всё летит в пропасть. При этом нет времени на принятие мер.

Примеры

1. **Эпидемия/пандемия.** Если число больных неким смертельным заболеванием за сутки увеличивается вдвое, то через месяц, $2^{30} \simeq 10^9$, их будет миллиард! А ещё через три дня — всё население Земли. Причём за неделю до «конца света» больных (или уже умерших) всего-то не более одного процента. И в этом

2. **Сложные проценты.** Допустим, мы нашли банк, начисляющий на вклад 10% ежедневно[2]. То есть из каждого рубля назавтра

[1] То есть — в подсознание, которое мало что понимает, но быстро и точно реагирует.

[2] Конечно, мы тут губы маленько раскатали, но кто запретит надувать паруса фантазий.

получается рубль и 10 копеек, а через два дня — $1,1^2 = 1,21$, т. е. во второй день рубль увеличивается на 11 копеек. Невелика добавка, кажется. Однако через год из **одного** рубля получается

$$1,1^{365} = 1\,283\,305\,580\,313\,352 \text{ рублей}, \tag{1}$$

т. е. больше *квадриллиона* (10^{15}). При таких деньгах можно задуматься о покупке Соединённых Штатов Америки. А чтобы купить целиком, вкупе с *Пентагоном и Аляской*, естественно задаться вопросом, как увеличить итог. Положить сначала в банк 100 рублей? Это увеличит конечный результат в 100 раз, что неплохо, но на фоне чисел типа (1) выглядит слабовато. А вот если подождать ещё полгода, то получится $1,1^{547} \simeq 4,4 \cdot 10^{22}$, что уже сопоставимо с *числом Авогадро*, и хватит для покупки чего угодно.

3. **Экология, ресурсы.** *Римский клуб*[3] довольно энергично пугает человечество катастрофическими перспективами в отношении экологии и обеспеченности ресурсами. Загрязнение (в том числе тепловое) окружающей среды увеличивается, а запасы питьевой воды, чистого воздуха, нефти, угля, руды, — тают. И в этом росте/убывании первую скрипку играют экспоненциальные тенденции. Тенденции, а не экспоненциальные процессы в чистом виде, потому что когда становится худо (тесно, грязно, голодно, больно), в действие вступают другие факторы. Кто-то бьёт в колокола, кто-то спохватывается, одни накладывают штрафы, другие их платят, третьи строят очистительные сооружения и т. п. В результате рост/убывание замедляется.

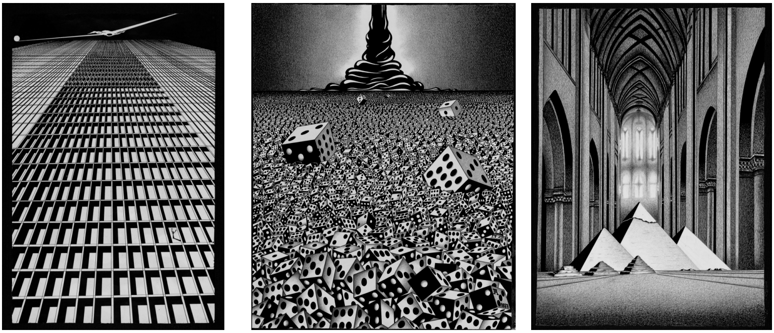
Заметим, что экспоненциальное **убывание** запасов даже предпочтительней линейного. Скажем, если бы 100 единиц «чего-то» мы бы расходовали по единице в год, то через 100 лет Оно бы кончилось. А если бы по 1% в год, то через 100 лет осталось бы всё же

$$100 \cdot 0,99^{100} \simeq 37 \text{ единиц}.$$

Задумаемся, о чём мы с вами говорим с точки зрения математики? — Ни о чём. О показательной функции всё необходимое сказано в **1.7**. Вроде бы. Но всякий математический феномен проявляется далеко за пределами. Также как невидимый глазом стрептококк заставляет бить в колокола — лечить, хоронить, строить. И глядя в микроскоп на

[3]Международная организация, см. интернет.

этого микро-головастика, приходится думать о последствиях космического масштаба, по крайней мере о больницах и эпидемиях. Точно также круги по воде от математических моделей уходят за горизонт, и там приходится наблюдать за симптомами подспудных течений. Узнавать их (течения), упреждать.



Рисунки *А. Фоменко*

Другими словами, изучая математику, необходимо **осваивать** её нематематическую часть. Особенно в тех случаях, когда абстрактные модели имеют прямой выход в реальность и отражают новые феномены, незнакомые или малознакомые. А такое освоение возможно только на уровне подсознания, а не ума. Так что примеры типа рассмотренных надо прокручивать в голове не один раз, варьируя и наслаждаясь. Фантазируя до тех пор, пока вдруг не начнёте ощущать, что экспоненциальный рост вы уже «чувствуете», и узнаёте его «по походке», и знаете, чем всё кончится.

Конечно, если учиться только для галочки, можно обойтись без этих хлопот. Но тогда и без результатов. Примерно как с иностранным языком. Слова знаю, предложения строю, — говорить не умею. Математику тоже можно знать на таком уровне. Процентами владею, логарифмы знаю, — на работу нигде не берут.

Так что на a^x имеет смысл фокусироваться крепче. В переносном, конечно, смысле. Но так или иначе процесс надо доводить до конца. В противном случае попадаем в ситуацию, когда силы потрачены, а толку нет. Поэтому в поисках a^x оглядываемся по сторонам, ищем. В *комбинаторике*, например, заметны следы очень быстрого роста. Там то и дело мелькают *факториалы*:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n,$$

$n!$ читается как *эн факториал*, и приближённо вычисляется по *формуле Стирлинга*,

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

что немного быстрее экспоненциального роста, но из той же оперы. Проблематика рассматривается отдельно в **7.1.**

Обратить внимание имеет смысл на запись больших чисел. Атомов воздуха в банке порядка числа Авогадро, $\sim 10^{23}$, а в атмосфере Земли всего лишь $\sim 10^{40}$, аргумент 10^n подрос не более чем вдвое. А ещё «немного» — и получается число всех атомов Солнца, $\sim 10^{58}$. А ещё «чуть-чуть» — и получается число элементарных частиц во Вселенной, $\sim 10^{100}$. То есть залп из 10^n накрывает всю Поднебесную всего лишь при $n = 100$.

При обсуждении a^x невозможно обойти молчанием особую функцию e^x, где e — это знаменитое число

$$e \simeq 2,72.$$

Красок для полной картины у нас пока не хватает, поэтому ограничимся небольшим замечанием. Если $x(t)$ — это зависимость «*численности популяции*» x от непрерывного времени t, то аналогом процесса $x(n) = q \cdot x(n-1)$ является

$$\dot{x} = kx, \tag{2}$$

где $\dot{x}$ обозначает производную $x(t)$, т. е. мгновенную скорость в момент t. Решением *дифференциального уравнения*

(2) служит как раз функция[4] $x(t) = e^{kt}$ (*экспонента*). При $k = 1$ будет экспонента в чистом виде, $x(t) = e^t$. Т. е. e^t — это такая функция, скорость изменения которой в момент t равна значению самой функции, см. **14.1.**

[4]Обратим внимание, что для аргумента и функции буквы можно выбирать любые. Этой свободой выбора стоит время от времени пользоваться, чтобы форма не прилипала к содержанию.