Всякая новая идея
производит сильное впечатление поначалу,
но потом тускнеет
от частого употребления.

1.7. *ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ*

Считая в ситуации $c = a^b$ одно число фиксированным, другое аргументом, третье функцией, мы получаем несколько вариантов зависимостей:

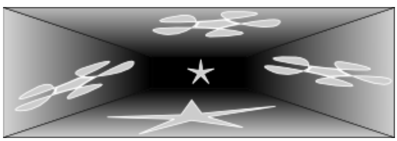
$$y = x^b \qquad \textit{степенная функция},$$

$$y = a^x \qquad \textit{показательная функция},$$

$$x = a^y \qquad \textit{логарифмическая функция}: \quad y = \log_a x.$$

Далее речь идёт о *показательной функции*, которая проходит через всю математику, а значит и через всё житейское море.

Функция $y = k{\cdot}a^x$ также считается *показательной* (*exponential*), а рост $k \cdot a^x$ *экспоненциальным.* В случае целочисленного аргумента, $x = n$, последовательность $k{\cdot}a^n$ называется *геометрической прогрессией.* Содержательно аргументом показательной функции часто бывает время, $x = t$. В случае $x = n$ можно также говорить о времени, *дискретном.*


Экспоненциальные процессы очень широко распространены в природе. Основная причина заключена в том, что скорость роста многих величин пропорциональна самим этим величинам. Численность популяции, например, от поколения к поколению меняется по закону[1]

$$x(n) = q \cdot x(n-1). \tag{1}$$

[1]До тех пор пока не проявляются эффекты насыщения, связанные с нехваткой пищи, пространства; загрязнением среды, эпидемиями.

Решением (1) является *экспоненциальная функция* $x(n) = x(0)q^n$, представляющая собой *геометрическую прогрессию* со *знаменателем* q.

Занимаясь любой темой, на любом витке спирали, полезно хотя бы бегло оглянуться назад, охватывая истоки и забытые определения.

Свойства:

Для рациональных $x = \dfrac{p}{q}$ значение a^x определяется как

$$a^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p. \qquad (2)$$

Основание a показательной функции a^x обычно предполагается положительным, $a > 0$. Иногда добавляют $a = 0$, но тогда значение 0^x при $x \leqslant 0$ не определено. Значения $a < 0$ исключаются[2]. Усвоить необходимо *до автоматизма*:

$$a^0 = 1, \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x},$$

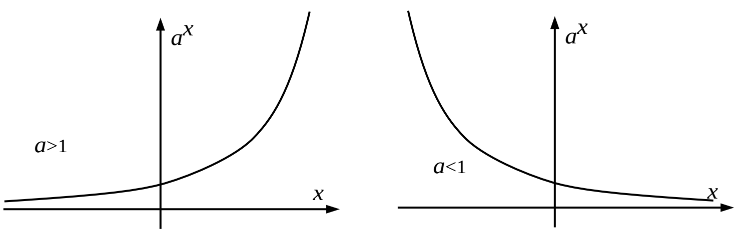
$$a^{u+v} = a^u a^v; \qquad (a^u)^v = a^{uv}; \qquad (ab)^x = a^x b^x.$$

Очень важное свойство:

Из (2) следует $a^x > 1$, если $a > 1$ и $x > 0$. Поэтому

$$a^x - a^z = a^z\left(a^{x-z} - 1\right) > 0, \text{ если } x > z,$$

откуда следует, что a^x *монотонно возрастает* по x. А это позволяет понять, что графики показательной функции $y = a^x$ выглядят так:



(3)

[2]Несмотря на то что при целых x значения a^x всегда определены, исключая 0^x при $x \leqslant 0$.

Дело в том, что благодаря монотонности отдельные вычисленные точки $y = a^x$ можно более-менее плавно (монотонно) соединить кривой, дающей верное качественное представление о зависимости $y = a^x$.

Знакомиться с показательной функцией очень важно не по Википедии[3]. Основная трудность **овладения** любым Знанием не в грубой информации, которая легко может быть записана даже на заборе, а в ощущении единства. В понимании взаимосвязи частей, их работоспособности, происхождения. Почему всё оформилось так, а не иначе? Начинаешь вдумываться и понимаешь, что по-другому было бы неудобно, противоречиво. Короче, перечисленные выше свойства необходимо продумать в рамках естественного сценария. Сначала взаимоувязка свойств для целых показателей степени. Затем определение корней целой степени, и уже затем повторение сценария для дробных показателей, каковой сводится к повторению прежней схемы для целых p на числами $\sqrt[q]{a}$, — см. видео. Всё это должно приводить к ощущению владения предметом, а не знакомства.

Принципиальный здесь момент — введение корней $\sqrt[q]{a}$, для вычисления каковых имеются эффективные методы. Скажем, итерационный метод Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n),$$

решающий уравнение $f(x) = 0$, в случае $f(x) = x^2 - 2$ вычисляет $\sqrt{2}$, давая последовательные приближения[4]

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}.$$

Казалось бы, ничего особенного, однако дюжина итераций, начиная, допустим, с $x_0 = 1$, даёт тысячу(!) верных знаков после запятой.

[3]Википедия — замечательный интернет-ресурс, но он создан для других целей. Не для обучения, хотя в некоторой степени может способствовать этому процессу. Но чаще вредит, особенно на первом этапе, создавая иллюзию что всё известно.

[4]Здесь $f'(x) = (x^2 - 2)' = 2x$. Геометрическая подоплека метода объясняется в видео.