В любой области первостепенную роль
играет хорошее настроение
и резонанс
с отдалёнными сферами бытия.

1.6. *ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ, ТЕОРЕМА БЕЗУ*

Оперируя многочленами, приходится иметь дело со стандартными приемами — делением многочленов «в столбик», например,

$$\boxed{\begin{array}{ll} x^3+2x^2-x+3 & \underline{|x-1\quad} \\ \underline{x^3-x^2} & x^2+3x+2 \\ \quad 3x^2-x & \\ \quad \underline{3x^2-3x} & \\ \qquad 2x+3 & \\ \qquad \underline{2x-2} & \\ \qquad\quad 5 & \end{array}} \qquad (\pi 1)$$

Произведённое деление даёт тождество

$$x^3+2x^2-x+3=(x-1)(x^2+3x+2)+5.$$

Легко видеть, что в общем случае деление многочлена

$$P_n(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \qquad (1)$$

на $(x-c)$ даст в частном некоторый многочлен $Q_{n-1}(x)$ и некоторое число R в остатке, т. е.

$$\begin{array}{ll} P_n(x) & \underline{|x-c} \\ \underline{\cdots} & Q_{n-1}(x) \\ R, & \end{array} \qquad (2)$$

что равносильно тождеству

$$P_n(x) = (x-c)Q_{n-1}(x) + R, \tag{3}$$

полагая в котором $x = c$, получаем следующий результат.

Теорема Безу. *Остаток R при делении $P_n(x)$ на $(x-c)$ равен $P_n(c)$, т. е.*

$$\boxed{R = P_n(c)}$$

Поэтому, если $\boxed{c}$ корень уравнения $P_n(x) = 0$, то $R = 0$. В конечном итоге это соображение приводит к разложению

$$P_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n), \tag{4}$$

где $x_1, \dots, x_n$ — корни многочлена $P_n(x)$, которые по *основной теореме алгебры*[1] всегда существуют — по крайней мере, в комплексной плоскости. Разложение (4) для $P_2(x)$ возникало элементарно, см. **1.4.**

Вернёмся к примеру ($\pi 1$). Подставив $x = 1$ в $x^3 + 2x^2 - x + 3$, получаем $1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 + 3 = 5$, что согласуется с *теоремой Безу.*

А каков будет остаток от деления $P_n(x)$ на $ax - b$? Нередко такой вопрос ставит в тупик. Потому что в любой теме надо чуть-чуть смотреть по сторонам. Остатки от деления $P_n(x)$ хоть на $ax - b = a\left(x - \dfrac{b}{a}\right)$, хоть на $\left(x - \dfrac{b}{a}\right)$, — одинаковы: $R = P_n\left(\dfrac{b}{a}\right)$, различны *частные.* **(?)**

Следствия и задачи

1. Понятно, что деление в столбик многочлена (1) с целыми коэффициентами на $(x-c)$ при целом c даёт в частном многочлен $Q_{n-1}(x)$ с целыми коэффициентами и целый остаток. А если остаток равен

[1] Будет рассмотрена факультативно.

нулю, то $a_0 - kc = 0$ при некотором целом k, положительном или отрицательном. Отсюда вытекает, что *любой целый корень многочлена* (1) *с целыми коэффициентами является делителем свободного члена* a_0 *со знаком плюс или минус.*

2. *Все рациональные корни* $x = \dfrac{p}{q}$ *многочлена* (1) *с целыми коэффициентами являются целыми*[2].

Подставив $x = \dfrac{p}{q}$ в (1) и умножив на q^n, получим

$$q^n P_n(x) = p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n, \tag{5}$$

что, если рассматривать как многочлен от q, не может обращаться в нуль, поскольку p и q взаимно просты (см. предыдущий пункт), а значит «корень» q не может быть делителем свободного члена p^n.

3. *Если* c — *целый корень многочлена* (1) *с целыми коэффициентами, то для любого целого* m *число* $P(m)$ *делится на* $c - m$.

Дополнительный материал

4*. *Найти остаток от деления* $P_n(x)$ *на* $x^2 + px + q = (x-a)(x-b)$.

Очевидно, $P_n(x)$ при делении на квадратный трехчлен даст в остатке (в общем случае) многочлен первой степени $\gamma x + \delta$, т. е.

$$P_n(x) = (x-a)(x-b)Q_{n-2}(x) + \gamma x + \delta. \tag{6}$$

Подставляя в (6) сначала $x = a$, потом $x = b$, получаем систему уравнений для определения γ и δ:

$$\begin{cases} \gamma a + \delta = A, \\ \gamma b + \delta = B, \end{cases} \tag{$\pi 2$}$$

где (по *теореме Безу*) $A = P_n(a), \quad B = P_n(b)$.

Система ($\pi 2$) легко решается:

$$\gamma = \frac{A - B}{a - b}; \qquad \delta = \frac{aB - bA}{a - b}.$$

[2] При этом существенно, что коэффициент при x^n равен единице, что в предыдущем пункте роли не играло.

В конкретных случаях проще положиться на деление в столбик.

$$\boxed{\begin{array}{ll} x^3+4x^2-5x+7 & |\underline{x^2+x-1} \\ \underline{x^3+x^2-x} & x+3 \\ \quad 3x^2-4x+7 & \\ \quad \underline{3x^2+3x-3} & \\ \qquad -7x+10 & \end{array}} \tag{π3}$$

5. *Показать, что x^m-1 делится на x^n-1 лишь в том случае, когда m делится на n.*

Пусть $m = nk + p$, тогда

$$\frac{x^m-1}{x^n-1} = x^p\frac{(x^n)^k-1}{x^n-1} + \frac{x^p-1}{x^n-1}.$$

Далее надо учесть, что y^k-1 всегда делится на $y-1$,

$$\frac{y^k-1}{y-1} = 1 + y + \cdots + y^{k-1}.$$

6* Часто встречается разложение на множители следующего многочлена трёх переменных:

$$\begin{aligned} &x^3+y^3+z^3-3xyz = \\ &= x^3+3xy(x+y)+y^3+z^3-3xyz-3xy(x+y) = \\ &= (x+y)^3+z^3-3xy(x+y+z) = \\ &= \frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2]. \end{aligned}$$

7*. Раскрытие скобок и приведение подобных в (4) с последующим сопоставлением результата с (1), даёт *теорему Виета* для многочлена n-й степени:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1+\cdots+x_n = -a_{n-1} \\ \displaystyle\sum_{i,j} x_ix_j = a_{n-2} \\ \cdots\cdots \\ x_1\cdots x_n = (-1)^n a_0 \end{array}}$$

Поскольку

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

являются корнями уравнения

$$x^n - 1 = 0,$$

в котором коэффициент $a_{n-1} = 0$. Поэтому (по *теореме Виета*) $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 0$ при любом n, откуда[3]

$$\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{2k\pi}{n} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{2k\pi}{n} = 0.$$

- Проверьте, что[4]

$$\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n} = 0.$$

при любом φ.

[3]Приравнивая отдельно действительную и мнимую часть суммы.
[4]Оттолкнитесь от уравнения $x^n - \cos\varphi - i\sin\varphi = 0$.