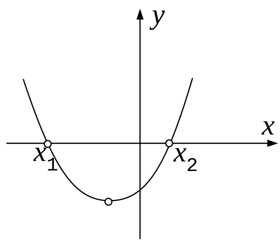
***Час, затраченный на понимание,
экономит год жизни.***

1.5. *КВАДРАТНЫЙ МНОГОЧЛЕН*

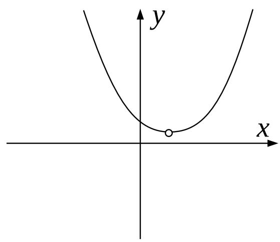
Занимаясь уравнением $ax^2 + bx + c = 0$, естественно заинтересоваться поведением его левой части при изменении икса, т. е. посмотреть на функцию

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{1}$$

Её графиком оказывается *парабола*. Картинка при $a > 0$:



либо



При $a < 0$ ветви параболы уходят вниз.

Размышление над (1) целесообразно начинать с набившего оскомину преобразования:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - a\cdot\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c =$$

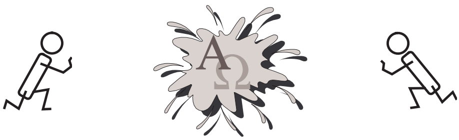
$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right], \tag{$*$}$$

откуда накатанным образом возникают корни

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \tag{2}$$

и становится понятным разложение

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$



Из (*) видно, что при $x = -\dfrac{b}{2a}$ функция (1) принимает *минимальное* (при $a > 0$) или *максимальное* (при $a < 0$) значение, равное $-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$, где $\boxed{D = b^2 - 4ac}$ — *дискриминант* уравнения (2).

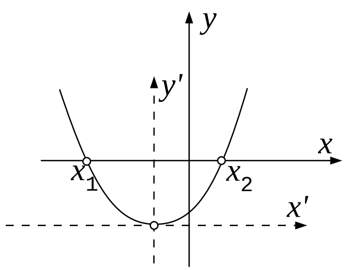
Поэтому в переменных

$$x' = x + \frac{b}{2a},$$
$$y' = y + \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

квадратичная функция (1) принимает канонический вид

$$y' = a\,(x')^2\,. \tag{3}$$

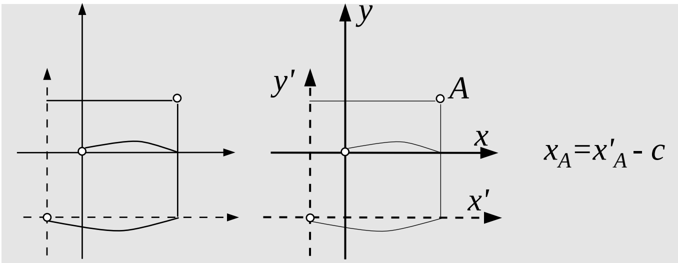
Понятно, проделанный путь можно пройти в обратном направлении, от (3) к (1). И тогда вид графика (1) причинно проясняется, поскольку его можно получить из графика (3) переносом начала координат в минимум, рис. справа.



Отдельно полезно помедитировать над *заменой переменных*,

$$x = x' - c,$$
$$y = y' - d,$$

соотнося знаки c, d с направлением сдвига начала координат.



(4)

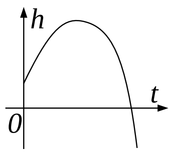
В качестве упражнения имеет смысл повозиться с квадратным многочленом, возникающим при описании движения тела брошенного вертикально со скоростью v_0,

$$h = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + h_0.$$

Если тело брошено вверх, и ось h направлена вверх, то

$$h = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + h_0,$$

а h_0 зависит, разумеется, от выбранного нулевого уровня h и от точки нахождения тела в момент $t = 0$ (откуда брошено). График выглядит

следующим образом  .

Здесь возникает серия вопросов. В какой момент тело окажется на высоте h_1? Для этого необходимо решить квадратное уравнение

$$-\frac{gt^2}{2} + v_0 t + h_0 = h_1.$$

На какую максимальную высоту тело поднимется и при каком t это произойдёт? Мотивация таких вопросов существенно возрастает при рассмотрении движения тела, брошенного под углом к горизонту (стрельба из пушки).

Что касается возможностей использования дискриминанта, интересно обратить внимание на следующий пример.

Неравенство Коши–Буняковского

$$(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2 \leqslant (x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2) \qquad (5)$$

изящно и просто доказывается так. Очевидно,

$$(x_1 - \lambda y_1)^2 + \ldots + (x_n - \lambda y_n)^2 \geqslant 0.$$

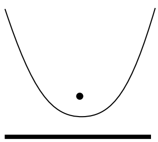
После раскрытия скобок и приведения подобных, имеем квадратный многочлен относительно λ,

$$\lambda^2(y_1^2 + \ldots + y_n^2) - 2\lambda(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n) + (x_1^2 + \ldots + x_n^2) \geqslant 0,$$

положительный при любом λ. Когда это возможно? Только при неположительности дискриминанта — а это и есть (5).

Выстреливает «школьный» факт, тогда как (5) — это один из краеугольных камней n-мерной геометрии, см. **15.3**.

Заметим наконец, парабола знаменита не тем, что служит графиком квадратичной функции. Причины её триумфального существования под солнцем более весомы.



Пучок лучей, параллельных оси симметрии параболы, отражаясь в параболе, собирается в её *фокусе*. И наоборот, свет от источника, находящегося в фокусе, отражается параболой в пучок параллельных оси лучей. Мысли о прожекторах, фарах, узконаправленных антеннах, — появляются автоматически. Формально, *парабола* определяется как геометрическое место точек, равноудалённых от *фокуса* (точки) и *директрисы* (прямой). Это на плоскости. *Параболоид вращения* в пространстве образуется вращением параболы вокруг оси симметрии.

Как видите, вся теория здесь, включая *корни, графики, теорему Виета, положение минимума и сам минимум*, укладывается в 15–20 минут. Что касается задач, то на территории квадратного многочлена игра всегда идёт на двух-трёх аккордах. А разнообразие достигается искусством комбинирования и эквилибристикой. Если думаете, что это бесполезно, вспомните: жонглирование мечом помогает использовать меч в бою.