Час, затраченный на понимание,
экономит год жизни.

1.4. *КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ*

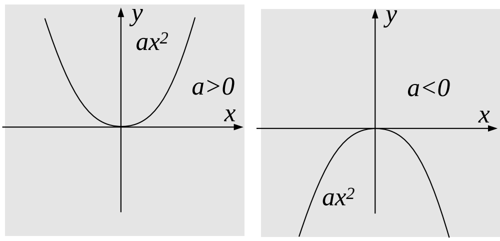
Пусть будут под рукой две формулы: *разности квадратов*

$$\boxed{u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)} \tag{1}$$

и *квадрата суммы*

$$\boxed{(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2} \tag{2}$$

и два графика $y = ax^2$:



Рассмотрим *квадратное уравнение* (КУ)

$$x^2 - 6x + 5 = 0, \tag{3}$$

и выделим в левой части (3) полный квадрат

$$\begin{gathered} \underbrace{x^2 - 6x + 9}\,\underbrace{-9+5}, \\ \underbrace{x^2 - 2\cdot 3x + 3^2} - \underbrace{4} \\ \boxed{(x-3)^2 - 2^2} \end{gathered} \tag{4}$$

Далее $(x-3)^2 - 2^2$ раскладываем в произведение множителей по формуле (1) разности квадратов,

$$[(x-3)+2][(x-3)-2],$$

и сводим таким образом уравнение (3) к виду

$$(x-1)(x-5)=0, \tag{5}$$

откуда сразу определяются *корни*

$$x_1=1, \quad x_2=5.$$

Особо обратим внимание, что (5) есть

$$\boxed{(x-x_1)(x-x_2)=0} \tag{6}$$

И если бы в (3) коэффициенты были другие,

$$x^2+px+q=0,$$

мы бы всё равно тем же путём пришли к разложению

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2). \tag{7}$$

Раскрывая справа в (7) скобки и приводя подобные, имеем

$$(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2,$$

т. е.

$$x^2+px+q\equiv x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2,$$

откуда, приравнивая коэффициенты при x и свободные члены, получаем *теорему Виета*

$$\boxed{x_1+x_2=-p, \quad x_1x_2=q}. \tag{8}$$

Из (8) ясно, например, что решать систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=3, \\ xy=4, \end{cases} \tag{9}$$

можно сразу, выписывая квадратное уравнение

$$t^2-3t+4=0$$

и вычисляя корни по известным формулам. А на вопрос, есть ли у (9) решения, — без промедления вычислять *дискриминант* $D = 3^2 - 4 \cdot 4 < 0$, — и отвечать: «нет»[1].

Что могло бы помешать проделанному выше трюку, если бы в (3) коэффициенты были другие? Да ничто. Разве что «неприятность» типа $x^2 - 6x + 10 = 0$. В этом случае, действуя тем же макаром, мы получили бы в итоге

$$(x-3)^2 + 1 = 0,$$

чего при действительных x быть не может. Поэтому не знающие пока *комплексных чисел* упираются в непреодолимый барьер. «Знающие» двигаются тем же курсом, потому что для них сумма квадратов и разность квадратов — одно и то же,

$$a^2 + b^2 = a^2 - (ib)^2 = (a+ib)(a-ib).$$

Но фокусы с мнимой единицей — отдельная тема, см. **5.1**.

вы чо тут делаете

Итак, исполненный выше трюк показывает, что найти корни КУ непосредственно — так же легко, как вычисляя их по известным формулам. Да и формулы мгновенно восстанавливаются. Пусть $x^2 + px + q = 0$. Проторённым путём:

$$y = x^2 + px + q = \left(x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q,$$

$$y = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4},$$

где

$$D = \frac{p^2 - 4q}{4}$$

тот самый член, называемый *дискриминантом*[2], знак которого определяет ситуацию: $D \geqslant 0$ — корни x_1, x_2 действительны; $D < 0$ — x_1, x_2

[1] Нет *действительных* решений. Есть *комплексные*, но об этом как-нибудь — факультативно.

[2] *Дискриминантом* чаще называют не (10), а числитель (10), т. е. величину $p^2 - 4q$. Принципиального значения это не имеет, поскольку в наших «играх» роль играет только знак дискриминанта.

комплексные. В случае $D = 0$ корни равны, $x_1 = x_2$. Ну и для памяти:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}} \tag{10}$$

Заодно оговоримся насчёт уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{11}$$

которое сводится к $x^2 + px + q = 0$ делением (11) на a. Корни (11):

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \tag{12}$$

Формулы (10), (12), или одну из них, обычно запоминают. Но это не должно выключать память о самой идее их получения.

Источником квадратных уравнений бывают задачи достаточно «высокого полёта» (см. также **4.1**).

Например, *ряд Фибоначчи*,

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ \ldots,$$

устроен по правилу

$$\varPhi_{n+2} = \varPhi_{n+1} + \varPhi_n, \tag{13}$$

т. е. каждое последующее число равно сумме двух предыдущих.

надо же

Подберём геометрическую прогрессию, удовлетворяющую (13). Подстановка $\varPhi_n = x^n$ в (13) даёт $x^{n+2} - x^{n+1} - x^n = 0$, что после сокращения на x^n приводит к квадратному уравнению

$$x^2 - x - 1 = 0, \tag{14}$$

корни которого $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Поэтому закону (13) удовлетворяют геометрические прогрессии $\varPhi_n = x_1^n$ и $\varPhi_n = x_2^n$, а также их линейная комбинация

$$\varPhi_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n$$

при любых α и β. Выбирая α и β из условия $\varPhi_1 = \varPhi_2 = 1$, получаем в итоге для (13) *формулу Бинэ*

$$\varPhi_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

Исполненный фокус существенно опирается на решение квадратного уравнения (14). Интересно, что следующая аналогичная задача в школе «почему-то» не решается.

Рассмотрим вместо *ряда Фибоначчи* числовую последовательность a_n,

$$1,\ 1,\ 0,\ -2,\ -4,\ -4,\ 0,\ 8,\ 16,\ 16,\ 0,\ -32,\ \ldots, \tag{15}$$

устроенную по правилу

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n \tag{16}$$

со стартовыми условиями $a_0 = a_1 = 1$.

Действуя по тому же рецепту, как и для (13), после подстановки $a_n = x^n$ в (16) приходим в итоге к квадратному уравнению

$$x^2 - 2x + 2 = 0, \tag{17}$$

у которого дискриминант отрицателен, и потому, по школьному законодательству, корней нет. Попробуем всё же воспользоваться стандартными формулами корней чисто формально. Корни (17) оказываются «странными»

$$x_1 = 1 + \sqrt{-1}, \quad x_2 = 1 - \sqrt{-1},$$

и формула для a_n при условии $a_0 = a_1 = 1$ получается такой

$$a_n = \frac{(1+\sqrt{-1})^n + (1-\sqrt{-1})^n}{2}. \tag{18}$$

Любопытно, что все нелегальные $\sqrt{-1}$ в нечётных степенях здесь взаимно уничтожаются, и a_n получаются действительными, причём в точности реализующими последовательность (15). Странная картина возникает, даже криминальная в некотором роде. Манипуляции абсолютно незаконны, а результат в итоге —правильный.

Такого рода чудеса должны мобилизовать внимание. Где-то поблизости может таиться открытие. Здесь тот самый случай.