©*В.И.Опойцев* 2015

Стратегия без тактики —
это самый медленный путь к победе.
Тактика без стратегии — суета перед поражением.

Сунь-Цзы

1.3. *ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ*

Линейной вообще-то принято называть *функцию* $f(x)$, удовлетворяющую требованию

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \tag{1}$$

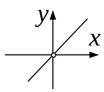
для любых чисел α, β, x, y. Если особо не умничать, то *свойству суперпозиции* (1) удовлетворяет лишь $y = kx$. Но в школе *линейной* называют *функцию* $y = kx + c$, и с этим пока едва ли стоит спорить.

вы чо?

К рассмотрению *линейной функции* (ЛФ)

$$y = kx + c, \tag{2}$$

целесообразно подойти «от печки». График $y = x$ — прямая линия



, и в этом имеет смысл разобраться самостоятельно, не вызывая скорую помощь. В случае $y = kx$ меняется только угол наклона. Если в $y = kx$ перейти к новым переменным (штрихованным)

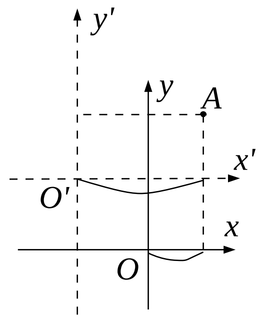
$$x = x',$$
$$y = y' - c,$$

то $y = kx$ перейдёт в $y' = kx' + c$, т. е. в *линейную функцию* (2) общего вида. Поэтому графиком ЛФ всегда служит прямая линия. Всё это можно разыграть и в обратном направлении, от ЛФ общего вида к $y = kx$.

При этом полезно отвлечься на созерцание и обдумывание *замены переменных*,

$$x = x' + \alpha,$$
$$y = y' + \beta, \qquad (3)$$

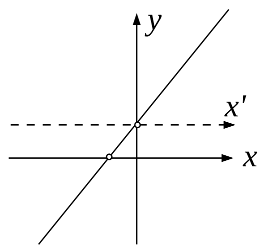
с параллельным смещением осей координат.



Замена переменных (*системы координат*) — очень продуктивная идея. Важная и широко применимая. Но впитывать её лучше по ходу дела. А то как сконцентрируешься на ней, так её и завалят сопутствующие факторы. Боковое зрение намного эффективнее[1]. Именно поэтому настоящее Знание формируется в основном побочными влияниями.

Но вернёмся к нашим баранам, контролируя ЛФ визуально. График $y = kx + c$ — прямая линия. Точки её пересечения с осями координат помечены кружочками. Смещение оси x вверх в положение x' приводит к замене координат

$$x' = x,$$
$$y' = y - c.$$



При этом $y = kx + c$ переходит в $y' = kx'$.

Всё это — очень просто. И в таких условиях накатывающей ясности «писателям» часто хочется разжевать и в рот положить. Не потому даже, что они набрели на доступный пониманию предмет. А потому, что появляется возможность нечто легко объяснить[2]. В результате игровое поле засоряется деталями, в глазах рябит, и слушатели начинают думать, что здесь прячется что-то таинственное. Ничего такого тут

[1] Его сознание не успевает перехватывать, и «данные» проваливаются в подсознание, устраиваясь прямо «под ложечкой».

[2] Крутые виражи проходят скороговоркой, дабы не мучить/ся.

нет. Возьмите карандаш, бумагу, и проиграйте несколько вариантов. Это освободит вас на всю жизнь от необходимости таскать за собой шпаргалки.

Взаимосвязь функции $y = kx + c$, равносильно[3] $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, с её *графиком*, — очень важное соответствие. От формул $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ мы можем переходить к прямым линиям на плоскости, делать выводы визуально, а потом переводить их обратно в формулы.

Алгебру и геометрию привёл во взаимодействие *Рене Декарт*[4] (1596 – 1650) , придумавший *декартовы координаты*, и сдвинувший с мёртвой точки многие науки. Его первоначальной идеей было алгебраическое решение геометрических задач. Но жизнь задействовала разработанный аппарат в обратном направлении, от алгебры к геометрии. Теперь о формулах предпочитают думать геометрически, что подключает к мышлению визуальное сопровождение. Вот как это происходит.

Допустим, нас интересует разрешимость системы уравнений (СУ)

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0, \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0. \end{array} \right. \tag{4}$$

Каждому уравнению (4) на плоскости (x, y) отвечает прямая линия[5], решению (4) — пересечение прямых. Поэтому, если прямые непараллельны, например, $\alpha_1/\beta_1 \neq \alpha_2/\beta_2$ при условии $\beta_1, \beta_2 \neq 0$, — решение обязательно есть. Если параллельны, то вопрос сводится к тому, совпадают они или нет, что опять-таки легко выясняется в терминах коэффициентов. **(?)** Не подумайте только, что финтифлюшка (4) даёт хоть какое-то представление о потенциале геометрического мышления в алгебре. Она даёт лишь намёк.

[3] С точностью до обозначений.

[4] Выдающийся учёный, успехи которого, по его собственному свидетельству, были следствием пяти (!) решённых в молодости задач.

[5] Точки на прямой удовлетворяют соответствующему уравнению.

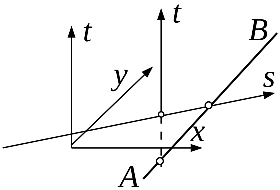
Примером ЛФ может служить зависимость

$$s = vt + s_0 \tag{5}$$

пройденного пути s от времени t точки, движущейся с постоянной скоростью v. Либо скорости v от времени t точки, движущейся с постоянным ускорением w,

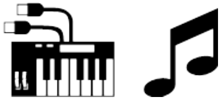
$$v = wt + v_0.$$

Все переменные, кроме времени, могут быть *векторами.*



Если точка движется в плоскости (x, y), то рисуем ось s в направлении движения и пристраиваем перпендикулярно (x, y) ось времени t. Движение (5) в плоскости (s, t) будет некоторой прямой AB.

Отвлекаясь теперь от всех этих хлопот, можно сказать и по-другому: прямолинейное движение с постоянной скоростью в плоскости (x, y) описывается прямой в трёхмерном пространстве (x, y, t). Пересечению двух таких виртуальных[6] прямых соответствует встреча движущихся точек. Безделица вроде бы, но в некоторых проявлениях довольно крепко бьёт по мозгам, см. далее задачу.



Задача. *Четыре корабля A, B, C, D плывут по морю-океану строго прямолинейно, каждый со своей постоянной скоростью. Никакие два курса не параллельны, никакие три — не пересекаются в*

[6]Пространство-то (x, y, t) выдуманное.

одной точке. Известно, что A, B, C попарно встречались между собой, а D встречался с A и B. Доказать, что D встретится с C.

Задача становится прозрачной в пространстве (x, y, t). Оси x, y расположены на поверхности океана, ось t устремлена перпендикулярно вверх. Графиками движения кораблей будут четыре прямых линии, которые обозначим теми же буквами A, B, C, D. Поскольку корабли A, B, C попарно встречаются, соответствующие прямые A, B, C попарно пересекаются, и потому лежат в некоторой плоскости $\mathcal{P}$. Прямая D, по условию, пересекается с прямыми A и B — поэтому двумя точками лежит в $\mathcal{P}$, а значит и вся принадлежит $\mathcal{P}$. Следовательно, (из-за непараллельности курсов) пересекает C.

Обратите внимание, как мы легко разделались с задачей, только лишь рассуждая.