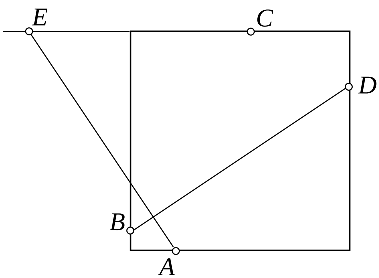
©*В.И.Опойцев* 2015

Там где нет уловимой причины,
Барабан лотереи не в счёт,
Миром косвенно правят глубины,
Нисходя из небесных высот.

1.11. *СЕКРЕТЫ МАСКИРОВКИ*

Видео начинается с обсуждения известной задачи: построить квадрат по четырём точкам. На сторонах квадрата выбираются точки A, B, C, D, каковые остаются, квадрат ликвидируется. Требуется сделать «как было». Там это лучше и смотреть. В сухом остатке решение выглядит так. Точки B, D соединяем отрезком, из A к BD проводим перпендикуляр, откладываем $AE{=}BD$, и через точки E и C проводим прямую, на которой обязана лежать сторона квадрата. Дальнейшее — без проблем[1].



Решение на вид просто, но обычно трудно даётся, и это надо людям объяснять, дабы ни у кого не развивались комплексы. Человеку важно понимать, что ему трудно не из-за его индивидуального слабоумия, а просто задача такая — всем не по карману.

[1]Если вдруг точка E совпадает с C, — решений бесконечно много: через B, D проводим любые параллельные прямые, затем перпендикулярно параллельные через A и C.

Вообще говоря, геометрические задачи на построение в целом трудны. Тип заметания следов ставит человека в тупик. Такого рода ситуации встречаются и в алгебре. Простыми средствами легко удаётся образовать сложные задачи из простых. Эффект достигается маскировкой и заметанием следов. Вот как составляются, например, алгебраические уравнения высоких степеней, которые всё же решаются, если найти верёвочку, за которую надо потянуть.

1. Самая простая идея состоит в перемножении простых уравнений. Например, перемножая

$$x^2 + x - 1 = 0,$$
$$x^2 - x + 1 = 0,$$

получим уравнение

$$x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0, \tag{1}$$

которое не сразу догадаешься свести к

$$(x^2 + x - 1)(x^2 - x + 1) = 0. \tag{2}$$

Правда, если присмотреться, в (1) заложена формула разности квадратов,

$$x^4 - x^2 + 2x - 1 = \left(x^2\right)^2 - (x-1)^2,$$

откуда (2) получается в один клик.

Однако составители задач бывают не очень изощрены, зато крайне злонамеренны[2]. Поэтому нельзя исключать уравнений, полученных перемножением либо $P_2(x) = 0$ на $Q_2(x) = 0$, взятых от фонаря, либо чего-то ещё. И тогда мы попадаем в неприятную ситуацию «пойди туда — не знаю куда, принеси то — не знаю что». Но искать как-то приходится, для чего выдвигаются гипотезы, догадки. Пусть, скажем, многочлен $P_4(x)$ получился в результате перемножения

$$(x^2 - bx + c)(x^2 + x - d). \tag{3}$$

Раскрываем в (3) скобки, приводим подобные, приравниваем коэффициенты при x^k соответствующим коэффициентам в $P_4(x)$, после чего

[2]Бог изощрён, но не злонамерен, — говорил *Эйнштейн*.

проклинаем полученную для b, c, d систему уравнений, поскольку та не хочет решаться. Но может и повезти.

Можно пытаться угадать один из корней $P_4(x) = 0$, что даст возможность понизить порядок уравнения. Наконец, можно плюнуть и пойти играть в футбол[3]. Но в любом случае полезно помнить, что сталкиваясь с задачей, вы боретесь не только с ней самой, но и с автором задачи, стоящим за кадром. Именно в таком положении каждый раз оказывается сыщик-криминалист.

2. Вот другая идея маскировки очевидного: разрушение структуры с помощью *замены переменной.* Уравнение

$$(y-a)^4 + (y+a)^4 = b \tag{4}$$

легко решается, ибо после раскрытия скобок и приведения подобных переходит в *биквадратное*[4]

$$2y^4 + 12a^2y^2 = b.$$

Однако замена $y = x + c$ переводит (4) в

$$(x+c-a)^4 + (x+c+a)^4 = b,$$

т. е.

$$(x+\alpha)^4 + (x+\beta)^4 = b, \tag{5}$$

Раскрытие скобок в (5) уже не сулит ничего хорошего. Надо догадаться произвести предварительную замену

$$x = y - \frac{\alpha+\beta}{2}, \tag{6}$$

хотя до целесообразности замены вида $x = y + \gamma$ любой сыщик рано или поздно додумается. Далее останется подобрать γ.

3. Ещё один пример. Уравнение

$$(x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 + \alpha x + \gamma) = \zeta \tag{7}$$

решается благодаря равенству коэффициентов при x в сомножителях (7), из-за чего после преобразования

$$\left[\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{4}\right]\left[\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \gamma - \frac{\alpha^2}{4}\right] = \zeta$$

[3]Многие потом бегают по зелёному полю до седых волос.

[4]Напомним, *биквадратное* — легко решается, потому что после замены $y^2 = x$ переходит — в квадратное.

и замены $x + \dfrac{\alpha}{2} = z$ оно переходит в биквадратное уравнение.

Для заметания следов в (7) производим разложение

$$x^2 + \alpha x + \beta = (x-a)(x-b); \qquad x^2 + \alpha x + \gamma = (x-c)(x-d),$$

и предлагаем решить уравнение

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = \zeta \tag{8}$$

при условии $a + b = c + d$, что как раз позволяет подняться от (8) к (7), благодаря $a + b = c + d = -\alpha$.

4*. Наконец, уравнение

$$x^{n+1} - 1 = 0 \tag{9}$$

легко решается извлечением корня $(n+1)$-й степени из единицы[5]. Благодаря этому легко решается также уравнение

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 = 0. \tag{10}$$

Надо лишь догадаться домножить (10) на $x-1$, добавляя корень $x = 1$ и переходя к уравнению (9).

Разумеется, перечисленные *продукты маскировки*, — не для всеобщего образования, где мы вынуждены резать по нижнему уровню. По той же причине, кстати, в некоторые таблетки добавляют лечащего вещества в несколько раз меньше, чем надо было бы. Абы чего не вышло. Но там есть выход. В стационаре под контролем врачей применяют совсем другие дозировки. Что же касается образования, то отдушины тоже есть, типа физмат-школ. Но и в средней школе можно и нужно действовать смелее. Не смертельно же, в конце концов, если кому-то пара задач окажется не по зубам. Да и постоянный успех необязателен. А уж рассказать о «вероломстве» составителей задач сам бог велел.

Тем более что такой рассказ может подвигнуть некоторых взять быка за рога. Не боги, дескать, горшки обжигают.

[5] В тригонометрической форме, см. **5.1.**

Главный-то инструмент жития, в самых разных его аспектах, — это ДОГАДКА. Не рутинные методы, каковым учит школа, а способность прозревать — вот что спасает в критических ситуациях, будь то война или экзамен. Умение выдвигать гипотезы, анализировать их, отсеивать, выбираться из тупиков заблуждения, — вот чему хорошо бы учиться.

Первое, что должно приходить в голову, когда на глаза попадается неудобное уравнение, что его придумал злой математик[6], замаскировав какую-нибудь тривиальщину. Вот до неё и надо додуматься, рассуждая примерно так. *Злой м.* не семи пядей во лбу, не умней нас с вами, по крайней мере. Поэтому он мог исходить из трёх вариантов. Насчёт «трёх» можно ошибиться. А насчёт «не умней нас с вами» — так это не наглость, а настрой, который, добавляя уверенности, помогает решать задачу. А не получилось, так свет клином не сошёлся. Прятать легче, чем потом искать.


надо же

Вернёмся к примерам. Решить, скажем, *систему уравнений**

$$\left\{ \begin{array}{l} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = 0. \end{array} \right. \tag{11}$$

рутинными методами сложно. Но если догадаться умножить второе уравнение на мнимую единицу i и сложить с первым, — получится

$$(x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) = 1. \tag{12}$$

Всматриваясь в (12), необходимо заметить, что это

$$(x + iy)^3 = 1, \tag{13}$$

после чего три корня из единицы легко извлекаются, что в итоге даёт три решения системы (11): (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), где конкретное указание всех x_j, y_j — несложное упражнение на извлечение комплексных корней[7]. Разумеется, *злой м.* не такой хитрый, чтобы выдумать (11) из ничего. Он поначалу раскрыл скобки в (13), получил (12), а тогда уже сообразил, что «задача на построение» (11) может доставить нам неприятные минуты. Дай бог ему здоровья.

[6] Добрые-то, наоборот, всё упрощают, чтобы понятно было.

[7] Каковое просто, потому что регламентировано.

Зловредный м. чаще всего предоставляет нам следствия, не раскрывая причин. Камуфлируя банальный факт

$$\zeta_1 - \zeta_2 + \zeta_2 - \zeta_3 + \ldots + \zeta_n - \zeta_{n+1} = \zeta_1 - \zeta_{n+1}, \tag{14}$$

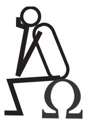
он (если не очень ядовит) может озадачить нас чем-нибудь вроде[8]

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

А может и сильно испортить кровь абитуриентам, требуя доказать[9]

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{1+k+k^2} = \operatorname{arctg} \frac{n}{n+2}. \tag{15}$$

И следствий типа (15) из (14) — не счесть, о чем жизнь то и дело напоминает. Контраст бывает разителен. Грандиозные следствия как бы опираются на ничтожные причины. Вспомните, лежащее в основе механики $ma = f$, а какие сложные бывают физические задачи. Так что, то ли Создатель широко пользовался такой техникой, то ли оно само так получилось, но мы вынуждены постоянно иметь дело с фактами типа (15). Голые причины вида (14) тоже в поле зрения, но их потенциал «не выпирает», связи не видны, и мир — в ловушке кривых зеркал. Следствия дразнят загадочностью, а причины незаметны из-за банальности.



[8]Полагая в (14) $\zeta_k = \dfrac{1}{k}$ и опираясь на $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{(k+1)} = \dfrac{1}{k \cdot (k+1)}$.

[9](15) из (14) возникает в случае $\zeta_k = \operatorname{arctg} k$, с учётом

$$\operatorname{arctg} u - \operatorname{arctg} v = \operatorname{arctg} \frac{u-v}{1+uv}.$$