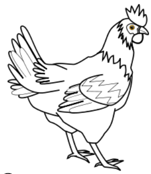
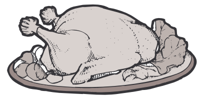
Существует достаточно света для тех,
кто хочет видеть,
и достаточно мрака для тех,
кто — не хочет.

Блез Паскаль

1.1. ***ЧИСЛА И АРИФМЕТИКА***

И на Земле, , и в Раю, , число есть ЧИСЛО — явление абстрактное и до некоторой степени первичное, см. далее. О глубине понятия поначалу лучше не задумываться, дабы не раздражать Бегемотика[1]. Ибо по идее всё просто, и с этого целесообразно начинать.

Вместо того чтобы подкрадываться к понятию числа, можно посмотреть на него как на первичное понятие[2]. Но идея взаимно однозначного соответствия, обычно используемая при «поимке числа», представляет собой всё же интерес сама по себе, и на ней стоит остановиться.

Речь идёт об опоре на понятие *множества* как совокупности своих *элементов*, каковые первичны, неопределяемы и могут быть объектами любой природы. Например,

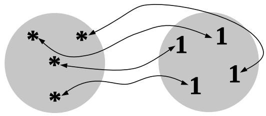
$S = \{$ , ,  $\}$, $K = \{1, 8, 3\}$, $L = \{\Theta, \Phi, \Omega\}$,

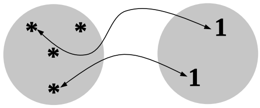
или $M = \{*, *, *\}$, $N = \{1, 1, 1\}$.

[1]Глуби́ны первичных понятий начинают явно ощущаться с появлением седых волос. У кого-то это связано с приходом понимания, у кого-то — непонимания. В любом случае эти откровения нельзя навязывать среднестатистическому персоналу репродуктивного возраста, дабы не нарушать порядок вещей во Вселенной.

[2]В некоторых вариантах *Теории Чисел* так и делают.

Определение «$X \sim Y$». *Множества X, Y называются эквивалентными, пишут $X \sim Y$ или $|X| = |Y|$, если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие.*

Вот пример такого соответствия: , между X, состоящим из единичек, и Y, состоящим из звёздочек. Описанные выше множества S, K, L, M эквивалентны друг другу. В случае

  (1)

установить взаимно-однозначное соответствие не удаётся.

Отношение «$\sim$», поскольку *рефлексивно* и *транзитивно*[3], позволяет разбить все множества на *классы эквивалентности*[4]. Класс эквивалентности множества X называют его **мощностью**, или **кардинальным числом**, и обозначают как $|X|$. Множества можно упорядочить по мощности с помощью следующего трюка.

Множество X меньше Y по мощности (менее мощно), пишем $|X| < |Y|$, а иногда и просто $X < Y$, если взаимно-однозначное соответствие можно установить между X и некоторым подмножеством $Z \subset Y$, где в Z входят не все элементы Y. Пока мы говорим о конечных множествах. Левое множество на рис. (1) мощнее правого.

Далее в каждом *классе эквивалентности* выбираем по стандартному представителю — например, по множеству, элементами которого являются только единички, и располагаем эти множества в порядке возрастания,

$$\{1\}, \quad \{1,1\}, \quad \{1,1,1\}, \quad \dots, \quad \{1,\dots 1\}, \quad \dots \tag{2}$$

Затем членам последовательности (2) сопоставляем какие-нибудь символы, скажем, $1, 2, 3, \dots$, и получается **натуральный ряд**

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}, \tag{3}$$

[3]Т. е. $X \sim Y \ \Leftrightarrow \ Y \sim X$ и $X \sim Y,\ Y \sim Z \ \Rightarrow \ X \sim Z$.

[4]На множества эквивалентных множеств.

члены которого называют *натуральными числами.*

Следующая фундаментальная идея — введение отрицательных чисел, нуля и *расширение* натурального ряда до *множества целых чисел*

$$\mathbb{Z} = \{\, \dots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\ \dots \}. \qquad (4)$$

Главное при этом — в подоплёке. Расширение *игровой площадки* $\mathbb{N}$ до $\mathbb{Z}$ вводится для того, чтобы уравнения

$$a + x = b \qquad \to \qquad x = b - a$$

всегда решались в целых числах[5]. Причём, и это самый важный момент, если $a, b \in \mathbb{Z}$ («$\in$» означает «принадлежит»), то и $a \pm b \in \mathbb{Z}$. Другими словами, складывать и вычитать на $\mathbb{Z}$ можно без опасений, что результат $a \pm b$ уйдёт за пределы $\mathbb{Z}$. Т. е. $\mathbb{Z}$ оказывается ***замкнутой*** *игровой площадкой*, что даёт образец, стереотип мышления, действуя по которому вводят *дробные, действительные* и *комплексные числа.*

И эта идея пронизывает всю математику. Её полезно обдумать на простейших примерах. В данном случае на сложении/вычитании. В том смысле, что в фокус внимания попадают операции $+/-$, и площадка, на которой они действуют, должна быть удобной, чтобы складывать и вычитать, не заботясь о последствиях. Начинается-то всё, разумеется со сложения, но в таких случаях всегда автоматом вводится ***обратная операция*** — минус[6]. А далее берётся какая-

[5] А не для того, чтобы движение вправо помечать знаком «$+$», влево — «$-$», и тогда «$+a$» шагов вправо, «$-b$» влево, — дают в итоге результирующее местоположение $a - b = (+a) + (-b)$, что удобно, и свидетельствует о пользе отрицательных чисел. Объяснение тупиковое. От него круги по воде не расходятся. Настоящая причина целесообразности перехода к игровой площадке $\mathbb{Z}$ остаётся вне поля зрения.

[6] Дабы к любому a можно прибавить или отнять b, т. е. $+b$ или $-b$, и так, чтобы $+b - b$ ничего не меняло, для обозначения чего вводится нуль, $+b - b = 0$.

никакая игровая площадка и расширяется до тех пор, пока не ***замкнётся по сложению и вычитанию***[7].

Делается это для того, чтобы потом можно было свободно обращаться с равенствами и неравенствами, упрощая их или вообще приводя к виду, удобному для тех или иных целей.

ДРОБИ

Итак, *отрицательные числа* появились для того, чтобы уравнения $\boxed{x + a = b}$ всегда решались. Дабы $x = b - a$ всегда имело смысл, в том числе при $b < a$. Дробные числа возникают из требования разрешимости уравнения

$$\boxed{x \cdot a = b} \tag{5}$$

Решением служит $x = \dfrac{b}{a}$. Тут, правда, есть червоточинка — ограничение $a \neq 0$, которое часто портит кровь, особенно физикам[8]. Но что важно, уравнение (5) в итоге оказывается разрешимым и для дробных a и b. Могло быть хуже. Инкарнация дробей, как решений (5) при целых a и b, могла бы не обеспечить разрешимости (5) уже при дробных a и b. И это в некотором роде была бы катастрофа. Пришлось бы вводить новые числа: дроби, потом дроби дробей и т. д. Слава богу — не потребовалось. И ещё один существенный момент: сумма и произведение дробей — тоже дроби, т. е.

$$\alpha \frac{b}{a} + \beta \frac{p}{q}$$

дробь в случае дробных α и β, в том числе отрицательных. Иначе говоря, множество *рациональных чисел* (дробей), обозначаемое символом $\mathbb{Q}$, **замкнуто в арифметике**, т. е. относительно арифметических операций.

---

[7]Кстати, расширение до *замыкания по сложению* множества $\{1\}$, состоящего всего из одной единички, также приводит к $(\mathbb{Z})$.

[8]Хороший человек, как известно, большой подлости при малой выгоде не сделает. Выгода от деления на ноль у физиков бывает слишком велика — и они тогда делят.

КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

Устраиваясь поудобнее, хотелось бы также разрешимости уравнения $\boxed{x^2 = b}$ при любом b. Решением $x^2 = 4$ является $x = 2 = \sqrt{4}$. Но как быть в случае $x^2 = 5$? Может быть найдётся несократимая дробь $\dfrac{b}{a} = \sqrt{5}$? Не найдётся[9]. Поэтому при желании располагать решениями уравнения $\boxed{x^2 = b}$ квадратные корни $\sqrt{b}$ приходится добавить к множеству (*полю*) $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Но вот с *замкнутостью в арифметике* выходит загвоздка, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ не является корнем из какого-либо p, а добавление к $\mathbb{Q}$ всевозможных сумм $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ не даёт замкнутости, поскольку $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$, например, не представимо в виде $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Поэтому с иррациональностями не всё так просто, и вопрос имеет смысл отложить. Но бесхитростное использование квадратных корней в арифметике даёт всё же свои плоды.

Интересно, что «двумерные» числа $a + b\sqrt{3}$ с рациональными a, b образуют замкнутую арифметическую площадку[10] (проверьте). Такую же удобную площадку образуют и числа вида $a + b\sqrt{-3}$, если, не мудрствуя лукаво, считать $(\sqrt{-3})^2 = -3$.

Очень важно понимать, что «числа» из всяких «расширений» упрощают жизнь и расширяют инструментальные возможности. Вот простенькая иллюстрация.

Рассмотрим числовой ряд

$$1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 11,\ 21,\ \ldots, \tag{6}$$

устроенный по правилу

$$s_{n+2} = s_{n+1} + 2s_n. \tag{7}$$

Поиск n-го члена в виде $s_n = x^n$ после подстановки в (7) даёт $x^{n+2} - x^{n+1} - 2x^n = 0$, что после сокращения на x^n приводит к необходимости решения квадратного уравнения

$$x^2 - x - 2 = 0,$$

---

[9] Из $\dfrac{b}{a} = \sqrt{5}$ следует $b^2 = 5a^2$, откуда вытекает, что b^2 делится на 25, а значит a делится на 5, что противоречит несократимости $\dfrac{b}{a}$.

[10] Со скидкой на запрет деления на нуль.

корни которого $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. Поэтому закону (7) удовлетворяет как $s_n = x_1^n$, так и $s_n = x_2^n$, а также их линейная комбинация

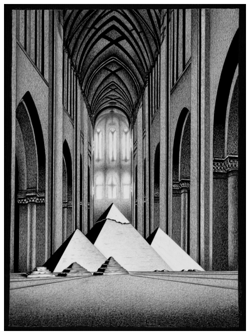
$$s_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n$$

при любых α и β. Выбирая α и β из условия $s_1 = s_2 = 1$, получаем

$$s_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}. \tag{8}$$

Обратим внимание, что ряд (6) содержит только числа натурального ряда. А вот искомая формула (8) включает и отрицательные числа, и дроби. И без «расширений» вообще не могла быть найденной.





Рисунки *А. Фоменко*