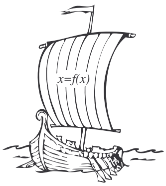
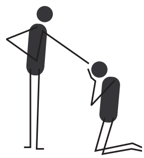
Владение любой научной дисциплиной опирается
на понимание общей картины.
Вызубренное «шаг за шагом» ничего не даёт.

2.1. *КАК СТРОИТЬ ГРАФИКИ-1*

В любой теме важно ощущать себя хозяином положения. Не юнгой, которому любой боцман может сказать: «пойди туда, не знаю куда», — а именно хозяином. Начальником функций и графиков, по крайней мере.



Ожидание чуда от матанализа по части построения графиков нередко обманывает надежды. Причина банальна. Самолет позволяет летать, но добираться до аэродрома надо самому. Так и здесь. Ювелирные инструменты ювелирными, но необходимо умение работать молотком. Требуются простейшие навыки, здравая логика.

Например, общий вид графика функции

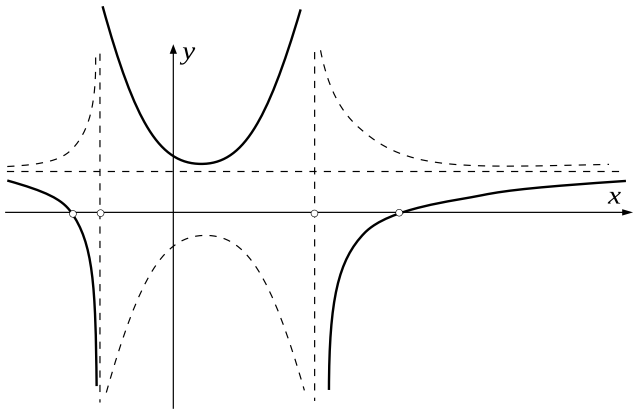
$$y = \frac{x^2+ax+b}{x^2+cx+d} \qquad (1)$$

легко определяется одним лишь здравым смыслом.

Во-первых, при $x \to \infty$

$$\frac{x^2+ax+b}{x^2+cx+d} = \frac{1+\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}}{1+\dfrac{c}{x}+\dfrac{d}{x^2}} \to 1.$$

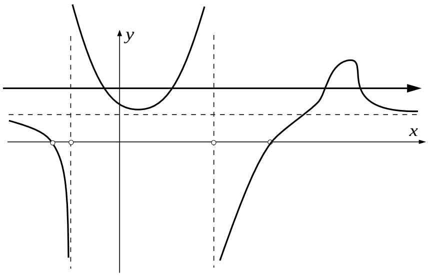
Поэтому на бесконечности график будет приближаться к *горизонтальной асимптоте* $y = 1$. Во-вторых, график будет уходить в бесконечность, когда знаменатель обращается в ноль — поэтому корни знаменателя задают *вертикальные асимптоты.* Остальное определяется взаимным расположением корней числителя и знаменателя. Например, если корни числителя — крайние, то график будет вести себя так, как показано на нижеследующем рисунке сплошной линией.



(2)

Построение графика здесь опирается на простые соображения. При переходе нуля числителя или знаменателя функция y меняет знак. Поэтому, если слева от *вертикальной асимптоты* график уходит вниз, то справа — обязан уходить вверх, и наоборот. Выбрать нижнюю или верхнюю ветвь помогает наличие или отсутствие корня числителя в соответствующем диапазоне.

На первый взгляд не очень ясно, почему график будет плавно монотонным на характерных участках, без всплесков и аномалий. Почему не годится, например, **!**



(3)

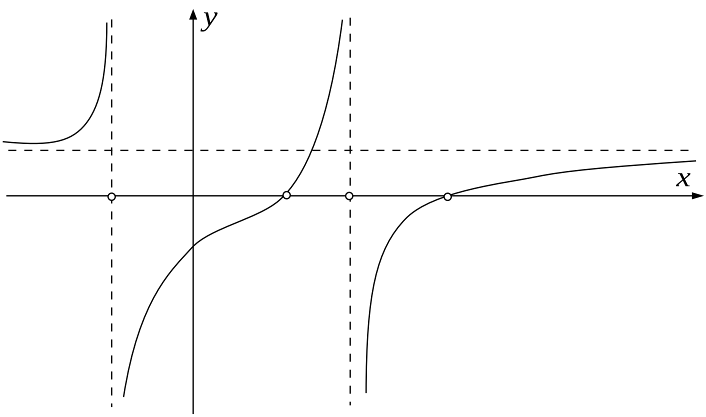
вместо предыдущего? Вопрос поначалу кажется убийственным, но решается просто. — Потому что график функции

$$y = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d} - \gamma \tag{4}$$

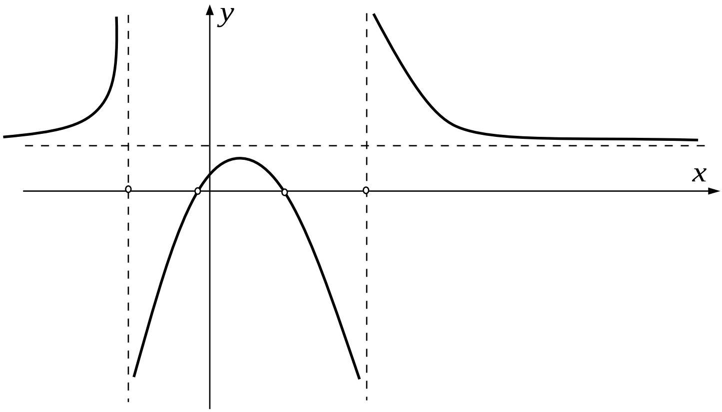
получается смещением графика функции (1) на $\gamma > 0$ вниз, равносильно, поднятием оси иксов на $\gamma > 0$ вверх. При этом у функции (4) при некотором γ может возникнуть 4 нуля, рис. (3), чего быть не может, поскольку (4) — функция того же класса, квадратный многочлен делённый на квадратный. **!**

При отсутствии корней у числителя (1), график будет вести себя так, как показано на рисунке (2) пунктирной линией.

Если же корни числителя и знаменателя, *перемежаются*, то график будет таким:



Корни знаменателя крайние:



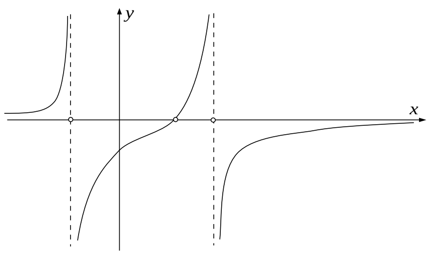
В случае

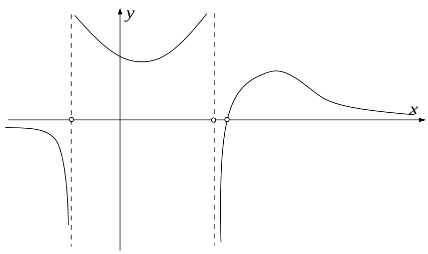
$$y = \frac{ax+b}{x^2+cx+d} \tag{5}$$

при $x \to \infty$

$$\frac{ax+b}{x^2+cx+d} \;=\; \frac{\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}}{1+\dfrac{c}{x}+\dfrac{d}{x^2}} \;\to\; 0.$$

Поэтому горизонтальной асимптотой является ось x. Варианты:





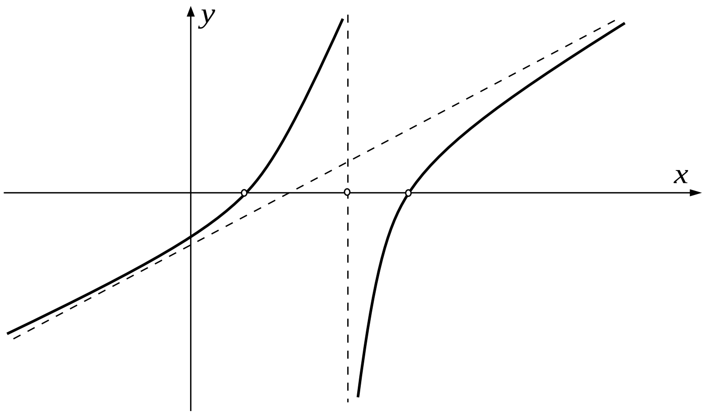
В случае

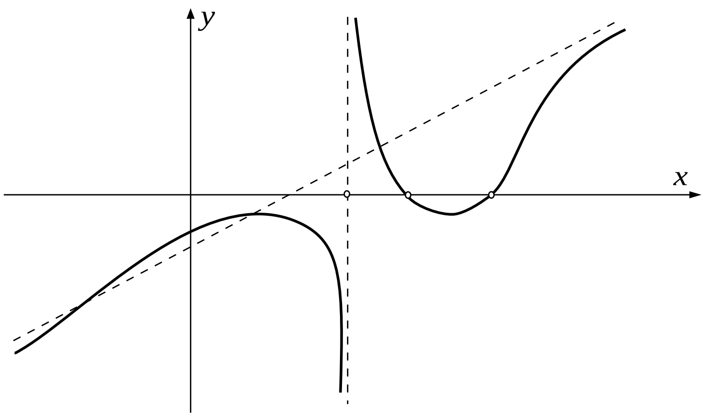
$$y = \frac{x^2+ax+b}{cx+d} \tag{6}$$

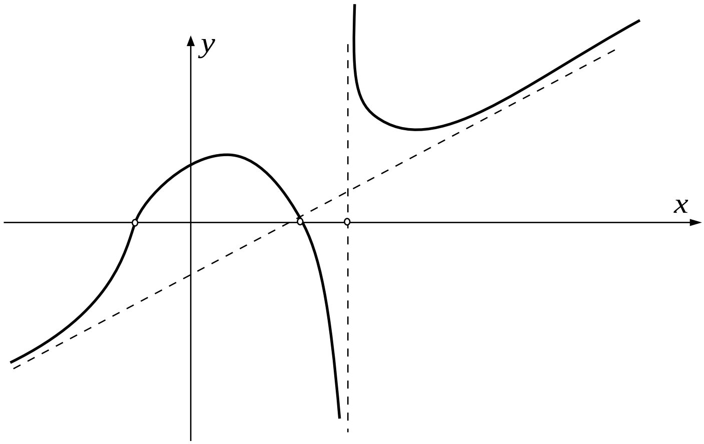
при $x \to \infty$ возникает наклонная асимптота:

$$\frac{x^2+ax+b}{cx+d} = \frac{x+a+\dfrac{b}{x}}{c+\dfrac{d}{x}} \to \frac{x+a}{c}.$$

Логика построения графиков прежняя.






y
x