VII Летняя школа «Современная математика»

Владимир Андреевич Успенский

Теорема Гёделя о неполноте и четыре дороги, ведущие к ней

Ратмино, 20 июля 2007 года

ПРИМЕР ПЕРВЫЙ

Перечень знаков:

$$(\quad) \quad \Rightarrow \quad \neg \quad \exists \quad = \quad \neq \quad x \quad y \quad 0 \quad '$$

Классификация знаков:
Знаки препинания $)$ $($
Логические знаки $\neg$ $\exists$ $=$ $\neq$.
Знак $\neq$ можно выкинуть: $a \neq b$ есть сокращение для $\neg(a = b)$.
Имя 0
Переменные x y
Знак операции $'$

Правила образования (не приводятся) правильных сочетаний знаков (выражений).
Примеры НЕПРАВИЛЬНЫХ знакочосетаний:

$$) = ($$

$$x \neq \neg$$

$$\exists y 0$$

$$\neg'$$

Примеры ПРАВИЛЬНЫХ знакосочетаний:

$$0''''$$

$$y''$$

$$\exists x \neg(x = x)$$

$$((y'' = 0') \Rightarrow (y = 0))$$

Классификация правильных знакосочетаний:
Термы:

$$0 \quad 0' \quad 0'' \quad \dots \quad x \quad x' \quad x'' \quad \dots \quad y \quad y' \; y'' \quad \dots$$

Формулы:

$$\exists x \neg (x = x)$$

$$((y'' = 0') \Rightarrow (y = 0))$$

$$\exists y (y = 0) \Rightarrow (y = 0''')$$

СИНТАКСИС определяет **допустимые сочетания** знаков.

СЕМАНТИКА определяет **значения** знаков и их сочетаний (термов и формул).

ДЕДУКТИКА определяет **доказуемые формулы**.

АКСИОМЫ:

Аксиома I. $(x' = y') \Rightarrow (x = y)$

Аксиома II. $\neg \exists x (x' = 0)$

ПРАВИЛА ВЫВОДА:

modus ponens (MP)

$$\frac{A \Rightarrow B, \quad A}{B}$$

правило обращения $(\Rightarrow \neg)$

$$\frac{A \Rightarrow B}{\neg B \Rightarrow \neg A}$$

Через $A(m)$ обозначается то, что получается из A подстановкой m вместо x. Через $A(m, n)$ обозначается то, что получается из A одновременной подстановкой m вместо x и n вместо y.

Примеры:
если A есть $(x'' = x')$, то $A(m)$ есть $(m'' = m')$;
если A есть $(x'' = y')$, то $A(m, n)$ есть $(m'' = n')$;

Правило несуществования $\quad (\neg\exists)$

$$\frac{\neg\exists A}{\neg A(m)}$$

Правило подстановки $\quad (\forall)$

$$\frac{A}{A(m, n)}$$

Понятие ДОКАЗУЕМОЙ формулы вводится определением, состоящим из двух частей:

1) каждая аксиома доказуема;

2) если какие-то формулы доказуемы, а другая формула получена из них применением одного из правил вывода, то она тоже доказуема.

Покажем, что формула $\neg(0'''' = 0'')$ доказуема.

1. $\neg\exists x(x' = 0) \quad$ [Ax. II]
2. $\neg(0'' = 0) \quad [1;\ \neg\exists :\ x \to 0']$
3. $(x' = y') \Rightarrow (x = y) \quad$ [Ax. I]
4. $(0''' = 0') \Rightarrow (0'' = 0) \quad [3;\ \forall :\ x \to 0'',\ y \to 0]$
5. $\neg(0'' = 0) \Rightarrow \neg(0''' = 0') \quad [4;\ \Rightarrow \neg]$
6. $(0'''' = 0'') \Rightarrow (0''' = 0') \quad [3;\ \forall :\ x \to 0''',\ y \to 0']$
7. $\neg(0''' = 0') \Rightarrow \neg(0'''' = 0'') \quad [6;\ \Rightarrow \neg]$
8. $\neg(0''' = 0') \quad$ [5, 2; MP]
9. $\neg(0'''' = 0'') \quad$ [7, 8; MP]

Эта цепочка из девяти формул образует

ФОРМАЛЬНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

формулы $\neg(0'''' = 0'')$.

ПРИМЕР ВТОРОЙ

Перечень знаков:
Знаки препинания) (
Логический знак $=$
Переменные x y z
Знак операции $-$

Термы:

1. Всякая переменная есть терм;
2. Если s и t есть терм, то и $(s-t)$ есть терм.

Пример терма:

$$((z-y)-(x-(x-(z-x))))$$

Формулы имеют вид $s=t$, где s и t — термы

АКСИОМЫ:

$$\text{I.} \quad x=(x-(y-y))$$

$$\text{II.} \quad (x-(y-z))=(z-(y-x))$$

ПРАВИЛА ВЫВОДА:

ПРАВИЛО ПОДСТАНОВКИ. Даны: формула, переменная, терм. Разрешается подставить этот терм вместо этой переменной в эту формулу.

ПРАВИЛО ЗАМЕНЫ. Даны две формулы: A и $(s=t)$. Разрешается в любом месте формулы A заменить s на t или t на s.

ЗАДАЧА: построить формальное доказательство формулы $(x - x) = (y - y)$.

РЕШЕНИЕ:

1. $x = (x - (y - y))$ [Ax. I]

2. $(x - (y - z)) = (z - (y - x))$ [Ax. II]

3. $z = (z - (y - y))$ [1; Подст. $x \to z$]

4. $z = (z - (x - x))$ [3; Подст. $y \to x$]

5. $(y - y) = ((y - y) - (x - x))$
[4; Подст. $z \to (y - y)$]

6. $(x - (x - z)) = (z - (x - x))$ [2; Подст. $y \to x$]

7. $(x - (x - (y - y))) = ((y - y) - (x - x))$
[6; Подст. $z \to (y - y)$]

8. $(x - x) = ((y - y) - (x - x))$
[7, 1; Зам. $(x - (y - y)) \to x$]

9. $(x - x) = (y - y)$
[8, 5; Зам. $((y - y) - (x - x)) \to (y - y)$]

ПРИМЕР ТРЕТИЙ

Расссматривается какой-то формализованный (то есть имеющий точный синтаксис) язык.

Среди ПРАВИЛ ВЫВОДА имеется такое:
modus ponens (MP)

$$\frac{X \Rightarrow Y, \quad X}{Y}$$

В число АКСИОМ входит бесконечное число аксиом нижеследующего вида:
Группа I: $X \Rightarrow (Y \Rightarrow X)$

Группа II:

$$(X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)) \Rightarrow ((X \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow Z))$$

Здесь X, Y, Z означают ПРОИЗВОЛЬНЫЕ формулы языка. Именно поэтому количество аксиом бесконечно.

ЗАДАЧА. Предъявлена некоторая формула A. Требуется доказать формулу $A \Rightarrow A$.
ВОТ ЦЕПОЧКА ФОРМУЛ, СОСТАВЛЯЮЩИХ ФОРМАЛЬНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

1. $A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)$ [Гр. I]
2. $(A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)) \Rightarrow$
   $\Rightarrow ((A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$ [Гр. II]
3. $(A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$ [(MP) из 1 и 2]
4. $A \Rightarrow (A \Rightarrow A)$ [Гр. I]
5. $A \Rightarrow A$ [(MP) из 3 и 4]