Кое-что о каустиках
Задачи к лекциям
Летняя школа “Современная математика”
(Дубна, 2015 г.)

С. К. Ландо

1 Каустики плоских кривых

Задача 1.1 *Найдите точки пересечения*

- *каустики параболы* $y = x^2$ *с параболой;*
- *каустики эллипса* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *с эллипсом.*

Задача 1.2 *Уравнение каустики эллипса имеет вид*

$$(x^2 + Ay^2 - B)^3 + Cx^2y^2 = 0.$$

Найдите значения параметров A, B *и* C *в зависимости от длин* a *и* b *полуосей эллипса.*

Задача 1.3 *Уравнение каустики эллипса имеет вид*

$$\frac{|x|^{\frac{2}{3}}}{A} + \frac{|y|^{\frac{2}{3}}}{B} = 1.$$

Найдите значения параметров A *и* B *в зависимости от длин* a *и* b *полуосей эллипса.*

Задача 1.4 *Найдите значения полуосей* a *и* b *эллипса* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$*, при которых две вершины его каустики лежат на эллипсе.*

Задача 1.5 *Докажите дискретные версии теоремы о четырех вершинах:*

- *в последовательности длин сторон многоугольника, все углы которого равны, есть по меньшей мере два локальных минимума и два локальных максимума;*
- *в последовательности величин углов выпуклого многоугольника, все стороны которого имеют одинаковую длину, есть по меньшей мере два локальных минимума и два локальных максимума*

- *сопоставим каждой вершине выпуклого многоугольника окружность, проходящую через эту вершину и две соседние с ней. Докажите, что если никакие четыре вершины многоугольника не лежат на одной из таких окружностей, то среди этих окружностей есть по крайней мере две, внутри которых находятся все вершины многоугольника, и по крайней мере две, внутри которых нет ни одной вершины многоугольника.*

Задача 1.6 *Существует ли локально выпуклая самопересекающаяся кривая с двумя вершинами?*

Задача 1.7 *Докажите, что вершины каустики выпуклой кривой с четырьмя вершинами образуют параллелограмм.*

2 Каустики двумерных поверхностей

Задача 2.1 *Нарисуйте каустику эллипсоида вращения (т.е. эллипсоида, две полуоси которого имеют одинаковую длину).*

Задача 2.2 *Найдите явное уравнение каустики поверхности*

$$z = x^2 + y^2 + ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3.$$

Для эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a > b > c > 0;$$

положим

$$\sigma = \frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}.$$

Задача 2.3 *Докажите, что каустики эллипсоидов с совпадающими значениями параметра σ переводятся друг в друга растяжением координат (с, быть можем, различным коэффициентом растяжения по разным осям).*

Задача 2.4 *Докажите, что каустики эллипсоидов, отвечающие значениями параметра σ и $1/\sigma$, переводятся друг в друга растяжением координат (с, быть можем, различным коэффициентом растяжения по разным осям).*

Задача 2.5 *Найдите значения параметра σ, при которых среди линий возврата каустики эллипсоида есть пересекающиеся.*