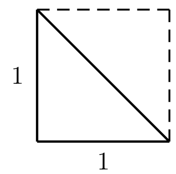
I. Иррациональные числа

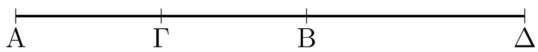
[т.е. здесь: числа без рационального корня]

В школе Пифагора, ок. -450, задались два вопросы о корне из двух: об его величине и об его рациональности.



1) Найти величину $\sqrt{2}$.

Это случилось при помощи следующей теоремы (после у Евклида, ок. -300, $\mathcal{N}^\circ$ II, 10 его *Начал*).



$\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{\Gamma B}$

Пусть отрезок AB, его середина Γ, а BΔ в продолжении AB; тогда:

$$\mathrm{A\Delta}^2 + \mathrm{B\Delta}^2 = 2\,\mathrm{A\Gamma}^2 + 2\,\mathrm{\Gamma\Delta}^2.$$

Если пишем $\mathrm{A\Gamma} = s = \mathrm{\Gamma B}$, $\mathrm{B\Delta} = d$, то имеем тождество

$$(2s+d)^2 + d^2 = 2s^2 + 2\,(s+d)^2$$

откуда

$$(\underline{2s+d})^2 - 2\,(\underline{s+d})^2 = 2s^2 - d^2 = -(\underline{d}^2 - 2\,\underline{s}^2).$$

Тогда, начиная с целых чисел s, d, можно построить таблицу чисел, квадрат одного из них и двойной другого всегда имеют ту же самую разност (по абсолютной величине). Возьмём, как и сами Пифагорейцы, $s = d = 1 = s_1 = d_1$:

$$\begin{array}{lll}
d_1 = \mathbf{1}, & s_1 = \mathbf{1}, & d_1^2 - 2s_1^2 = -1 \\
d_2 = 2s_1 + d_1 = \mathbf{3}, & s_2 = s_1 + d_1 = \mathbf{2}, & d_2^2 - 2s_2^2 = +1 \\
d_3 = 2s_2 + d_2 = \mathbf{7}, & s_3 = s_2 + d_2 = \mathbf{5}, & d_3^2 - 2s_3^2 = -1 \\
 & \dots & \\
d_{n+1} = 2s_n + d_n, & s_{n+1} = s_n + d_n, & d_{n+1}^2 - 2s_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}
\end{array}$$

из последного следует

$$\frac{d_{n+1}^2}{s_{n+1}^2} = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{s_{n+1}^2}$$

так что имеем в пределе (это не пифагорейское!)

$$\frac{d_{n+1}}{s_{n+1}} \longrightarrow \sqrt{2}.$$

Таким образом Пифагорейцы нашли немногие (довольно хорошие) приближения корня двух:

n	d_n	s_n	$\frac{d_n}{s_n}$
1	1	1	1
2	3	2	$\frac{3}{2}$=1,5
3	7	5	$\frac{7}{5}$=1,4
4	17	12	$\frac{17}{12}$=1,$\underline{41}$666...
5	41	29	$\frac{41}{29}$=1,$\underline{41}$379...
6	99	70	$\frac{99}{70}$=1,$\underline{4142}$85...

2) Иррациональность величины $\sqrt{2}$.

Они также умели показать, что никакая из таких дробей не может равнять точной величиной $\sqrt{2}$.

А именно, предположим, что $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, где дробь несократима. От дроби имеем $p^2 = 2q^2$, тогда p^2 чётный, откуда p чётный. Следовательно, $p = 2p'$, а $4p'^2 = 2q^2$, т.е. $q^2 = 2p'^2$ чётный а q тоже чётный. Ибо предположение сокращёния дроби всегда возможно, противоречие происходит от предположения вида $\sqrt{2}$ как дробь. Тогда ясно, что $\sqrt{2}$ иррациональна.

3) Использование корней в текстах.

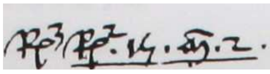
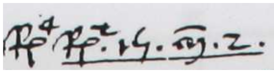
В многих языках окончание слов не изменяется (например французкий, италиянский, арабский в не литературных текстах). Следовательно, произношение таких выражений, как $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ и $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ одинаково ('корень из a плюс корень из b'); во втором случае можно сказать: 'корень из суммы a плюс корень из b', но это не работает, когда имеем большое количество корней. Например, египетский математик Абу Камил (ابو

كامل شجاع بن اسلم, ок. 880) решает задачу второй степени, решение которой имеет такой вид:

$$x=17+\tfrac{27}{39}+\sqrt{315+\tfrac{885}{1521}}+\sqrt{451+\tfrac{1029}{1521}+\sqrt{395'130+\tfrac{2'057'670}{2'313'441}}-\sqrt{31'558+\tfrac{282}{1521}}}$$

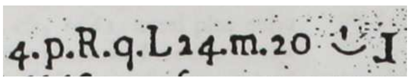
Сегодния сохранится его арабский текст, а также оригинальная рукопись латинского перевода XIV века. Очевидно, что переводчик сперва не понимал, где были начало и конец каждого корня. То же самое случилось безусловно для читателей арабского текста. Следовательно, использование выражений с многими корнями в средних веках очень редко.

Первые исключения этой трудности имеются в конце средних веков. Шюке (Nicolas Chuquet, *Triparty en la science des nombres*, 1483) подчёркивает часть под радикалом:

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{15-2}} \qquad\qquad \sqrt[4]{\sqrt[2]{15-2}} \qquad \Big(\mathcal{R} \;=\; \surd\,,\ \bar{\mathrm{m}} \;=\; -\Big)$$

Бомбелли (Rafael Bombelli, *Algebra*, 1572) заключает часть под радикалом в скобках (а именно $\lfloor$ и $\rfloor$):


4.p.R.q.L24.m.20 $\overset{1}{\smile}$ ⌋

$$4+\sqrt{24-20x} \qquad \Big(\mathrm{p} \;=\; +,\ \mathrm{R.q.} \;=\; \sqrt[2]{\ }\,,\ \mathrm{m} \;=\; -,\ \overset{1}{\smile} \;=\; x^1=x\Big)$$

II. Отрицательные числа

До XVI века математики использовают исключительно три типа квадратного, чаще приведённого, уравнения, где коэффициенты всегда большие нуля.

(1) $ax^2+bx=c$; $\;x^2+px=q$, $\;x=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}$. У этого типа есть всегда одно положительное решение. Второе, отрицательное, не надо: для математиков этого времени, одного решения достаточно.

(2) $ax^2 = bx + c$; $x^2 = px + q$, $x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$. То же самое годится для второго типа.

(3) $ax^2 + c = bx$; $x^2 + q = px$, $x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$. Здесь имеем либо два положительных решения, либо никакого, а именно если дискриминант меньше ноля.

Остальной тип, т.е. $x^2 + px + q = 0$ (всё ещё $p, q > 0$) не встречается, так как у него каждое решение отрицательно (если действительно).

Важно здесь запомнить, что вычитаемое число не то же самое, что отрицательное число. Правило знаков использовали уже древние математики.

Первое рассмотрение отрицательного решения находится у Фибоначчи (Leonardus Pisanus Fibonacci, ок. 1220). В своей книге о прикладных арифметике и алгебре (*Liber abaci*), он решает большее количество систем линеиных уравнений. Результаты для каждой системы почти всегда все положительны; но (редко) случится, что некое неизвестное имеет отрицательное значение (очевидно, что это намеренно). Вот такой пример, написанный в нашей символике: x_i значит сумму денег i-ого человека, а y цену некоторого товара.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + y = 2\,(x_3 + x_4 + x_5) & (*) \\ x_2 + x_3 + y = 3\,(x_4 + x_5 + x_1) \\ x_3 + x_4 + y = 4\,(x_5 + x_1 + x_2) \\ x_4 + x_5 + y = 5\,(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_5 + x_1 + y = 6\,(x_2 + x_3 + x_4). \end{cases}$$

Преобразование каждого (здесь например первого) уравнения такое (исключительно словами у Фибоначчи)

$$(*) \qquad x_1 + x_2 + y = 2\,(x_3 + x_4 + x_5) \qquad \Big| \quad + (x_3 + x_4 + x_5)$$

$$\left(S = \sum x_i\right) \quad S + y = 3\,(x_3 + x_4 + x_5), \quad x_3 + x_4 + x_5 = \tfrac{1}{3}\,(S + y)$$

Таким образом имеем после преобразования остальных уравнений:

$$\begin{cases} x_3 + x_4 + x_5 = \frac{1}{3}\,(S+y) \\ x_4 + x_5 + x_1 = \frac{1}{4}\,(S+y) \\ x_5 + x_1 + x_2 = \frac{1}{5}\,(S+y) \\ x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{6}\,(S+y) \\ x_2 + x_3 + x_4 = \frac{1}{7}\,(S+y). \end{cases}$$

Возьмём, как Фибоначчи, $S+y = 420$ (наименьший общий знаменатель); будет:

$$\begin{cases} x_3 + x_4 + x_5 = 140 & (1) \\ x_4 + x_5 + x_1 = 105 & (2) \\ x_5 + x_1 + x_2 = \ 84 & (3) \\ x_1 + x_2 + x_3 = \ 70 & (4) \\ x_2 + x_3 + x_4 = \ 60. & (5) \end{cases}$$

Тогда $(1) + (2) + (3) + (4) + (5) = 3\,S = 459, \quad S = 153, \quad y = 267;$

а $(2) + (4) = x_1 + S = 175$, итак $x_1 = 22$;

$(1) + x_1 = S - x_2 = 162$, итак $x_2 = S - 162 = 153 - 162$. Его заключение: *Quare hec questio est insolubilis nisi ponamus secundum hominem habere debitum 9, que sunt a 153 in 162* (поэтому эта задача неразрешима, если не полагаем, что есть у второго человека долг девяти, т.е. с 153 до 162).

Другими словами, имеем у Фибоначчи две возможности: либо отказ от отриcанеnьных чисел, либо изменение начальных уравнений, т.е. начальных условий; тогда все неизвестные положительны, как следует. Точно то же самое имеется в его других примерах этого сорта; либо они невозможны, либо сумма денег делатся долгом, или принятие денег делатся воровством денег. Подводя итог, при помощи обратного смысла сводится отрицательная величина к положительной. В нашем примере, это значит следующее изменение оригинальной системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + y = 2\,(x_3 + x_4 + x_5) \\ x_2 + x_3 + y = 3\,(x_4 + x_5 + x_1) \\ x_3 + x_4 + y = 4\,(x_5 + x_1 + x_2) \\ x_4 + x_5 + y = 5\,(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_5 + x_1 + y = 6\,(x_2 + x_3 + x_4) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + y = 2\,(x_3 + x_4 + x_5) \\ -x_2 + x_3 + y = 3\,(x_4 + x_5 + x_1) \\ x_3 + x_4 + y = 4\,(x_5 + x_1 - x_2) \\ x_4 + x_5 + y = 5\,(x_1 - x_2 + x_3) \\ x_5 + x_1 + y = 6\,(-x_2 + x_3 + x_4) \end{cases}$$

Это, кажется, не очень важно. Напротив. Таким образом ясно, что в конкретных задачах отрицанелное решение иногда может иметь смысл, а нельзя всегда его просто немедленно отказать.

Неявный отказ таких результатов видный уже в древности. В начале своей книги об алгебре Диофант (Διοφάντος, ок. 250) решает несколько школьных задач; они просты, и совсем не типичны для Диофанта: они только имеют целью введение в алгебраические язык и способ с помощью знакомых примеров. Между такими школьными задачами имеются эти две системы (здесь, как обыкновенно у Диофанта, все неизвестные просто числа, т.е. без какого-либо конкретного смысла):

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}\,(x_2 + x_3) = y \\ x_2 + \frac{1}{4}\,(x_3 + x_1) = y \\ x_3 + \frac{1}{5}\,(x_1 + x_2) = y, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}\,(x_2 + x_3 + x_4) = y \\ x_2 + \frac{1}{4}\,(x_3 + x_4 + x_1) = y \\ x_3 + \frac{1}{5}\,(x_4 + x_1 + x_2) = y \\ x_4 + \frac{1}{6}\,(x_1 + x_2 + x_3) = y. \end{cases}$$

В обеих случаях первая дробь $\frac{1}{3}$ а не $\frac{1}{2}$. Принимая во внимание вид похожих систем в древней математике, так и в математике средних веков, где последовательность известних коэффициентов совсем регулярна и начинается с самых простых чисел, это странно и необычно. Вот причина этого выбора.

Вообще, такая неопределённая система уравнений имеет вид

$$x_j + m_j \sum_{i \neq j} x_i = y,$$

где m_j правильные дроби а $i, j = 1, \ldots, n$. После преобразования и сложения уравнений, найдём общий вид решения

$$x_j = (S - y)\left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - m_i} \; - \; \frac{1}{1 - m_j}\right] \quad \Big(\text{где } \; S = \sum_{i=1}^{n} x_i\Big).$$

Так как система неопределённа, можно выбирать (положительное) значение для $S - y$. Очевидно, что тогда знак каждого решения зависит только от знака выражения в квадратных скобках.

Когда начинаем в таких системах с дроби $m_1 = \frac{1}{2}$, то решения x_j все положительные только когда $n = 3$ и $n = 4$; напротив, когда $m_1 = \frac{1}{3}$, решения x_j положительные тоже когда $n = 5$ и $n = 6$. Вот почему у Диофанта первая дробь была $\frac{1}{3}$; если бы была $\frac{1}{2}$, то следующий случай, т.е. $n = 5$, имел бы отрицательное решение. А Диофант сказал в начале своей книги, что читатель должен всегда решать другие похожие примеры таким же образом. Что думал бы читатель, если бы способ Диофанта работал только для его двух примеров?

Именно этот случай, с дробью $m_1 = \frac{1}{2}$, встречается в рукописи XV века на провансальском языке незнакомого автора. Он решает сперва два случая, где $n = 3$, $n = 4$, у которых всё как следует; после он решает также случай $n = 5$,

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = y \\ x_2 + \frac{1}{3}(x_3 + x_4 + x_5 + x_1) = y \\ x_3 + \frac{1}{4}(x_4 + x_5 + x_1 + x_2) = y \\ x_4 + \frac{1}{5}(x_5 + x_1 + x_2 + x_3) = y \\ x_5 + \frac{1}{6}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = y. \end{cases}$$

А здесь будет часть в квадратных скобках

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-m_i} \; < \; \frac{1}{1-m_1}, \quad \text{т.е., численно,} \quad \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{437}{60} = \tfrac{437}{240} < \tfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2,$$

а левая сторона меньше правой; значит, что первое неизвестное отрицательно, независимо от выбора величины $S-y$. Автор выбирает $S-y = 60$, который даёт следующие значения:

$$x_1 = -\left(10 + \tfrac{3}{4}\right), \quad x_2 = 19 + \tfrac{1}{4}, \quad x_3 = 29 + \tfrac{1}{4}, \quad x_4 = 34 + \tfrac{1}{4}, \quad x_5 = 37 + \tfrac{1}{4}.$$

Автор явно пишет, что ‘первый имеет 10 и $\frac{3}{4}$ меньше ничего’ (*lo premier ha 10 e $\frac{3}{4}$ mens de non res*). Об этом (в своё время неподобающем) результате он ничего не объясняет; мы просто видим в этой задаче, и притом только в ней (все другие задачи этой книги имеют исключительно положительные решения), числовую проверку: автор хочет показывать, что эти значения удоблетворяют условиям, то есть уравнениям.

Такой был первый известный пример принятия, по чистой математической причине, отрицательного решения. Позднее, а уже в второй половине XV века, встречаются другие примеры отрицательных решений не особенно редко, либо в конкретных, либо в неконкретных задачах.

III. Мнимые числа

Можно в принципе встретить комплексные числа уже в одном случае квадратного уравнения (см. выше, с. 4). Но такое решение до конца XVI века не принимается во внимание. Вот три примера этого. Они все в виде разделения десяти на две части с некотором добавочноем условием (такие системы встречаются часто в средних веках, а именно уже в древности).

$$\begin{cases} x + y = k \ (= 10) \\ f(x, y) = l. \end{cases}$$

— Пачоли, ок. 1480.

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \frac{y}{x} + x = 5, \end{cases}$$

которая сводится к квадратному уравнению $x^2 + 10 = 6x$. Решение невозможно, 'потому что число больше умножения половины неизвестных на себя' (*perché l'è più el numero che non è la multiplicatione de la* $\frac{1}{2}$ *dele chose in se*): $10 > 3^2$, т.е. дискриминант уравнения меньше нуля.

— Кардано, 1545.

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x \cdot y = 40. \end{cases}$$

Это сводится к уравнению $x^2 + 40 = 10x$. Имеем решение в принципе, а именно $5 + \sqrt{-15}$ и $5 - \sqrt{-15}$, но такое решение 'искусственное' (*solutio sophistica*). А именно 'ясно, что случай или вопрос невозможен' (*manifestum est quod casus seu quæstio est impossibilis*).

— Точно то же самое имеем у Бомбелли (*Algebra*, 1572): $x^2 + 20 = 8x$ имеет в принципе решения $x = 4 + \sqrt{-4}$, $x = 4 - \sqrt{-4}$, но 'это уравнение не может делатся, кроме как искусственным образом' (*questo agguagliamento non si può fare se non in questo modo sofistico*).

Однако именно Бомбелли в этой самой книге будет впервые использовать мнимые числа. Но там эти числа полезны, потому что с ними

Бомбелли умеет найти действительное решение в одном случае уравнения третьей степени. Итак первое появление комплексных чисел — единственно утилитарно. Посмотрим, как это случилось.

В конце четырнадцатого века итальянские математики нашли, как свести приведённое уравнение третей степени с четырьмя членами к уравнению с тремя членами. Эти формы более легки для решения; потом, можно легко запомнить их вид, потому что они похожи на три случая второй степени (с x^3 вместо x^2).

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0 \qquad \xrightarrow{\;y = x - \frac{a}{3}\;} \qquad \begin{cases} (1)\ x^3 + px = q \\ (2)\ x^3 = px + q \\ (3)\ x^3 + q = px, \end{cases}$$

где $a, b, c > 0$ или < 0, но $p, q > 0$.

В начале XVI века решал Scipione dal Ferro первый случай (его дискриминант положительный). Сорока годами позже Кардано нашёл общую формулу (это '*формула Кардана*') с которой имеем немедленно одно решение (здесь в общем случае $x^2 + px + q = 0$, $p, q > 0$ или < 0):

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

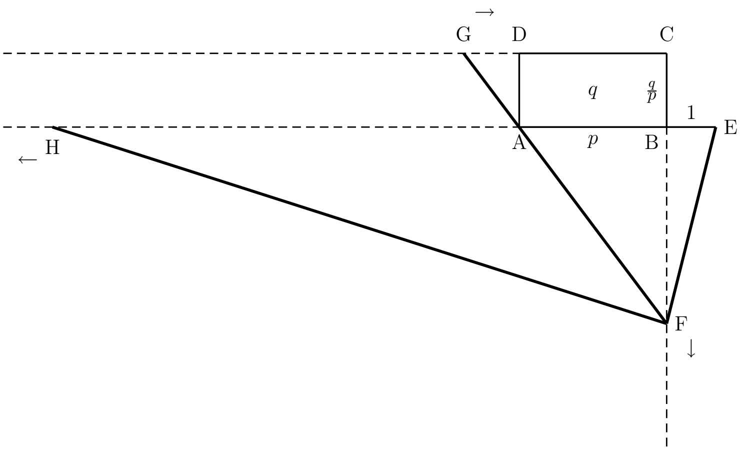
Но когда $p < 0$, т.е. в обоих последных случаях средних веков, может случится, что

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0;$$

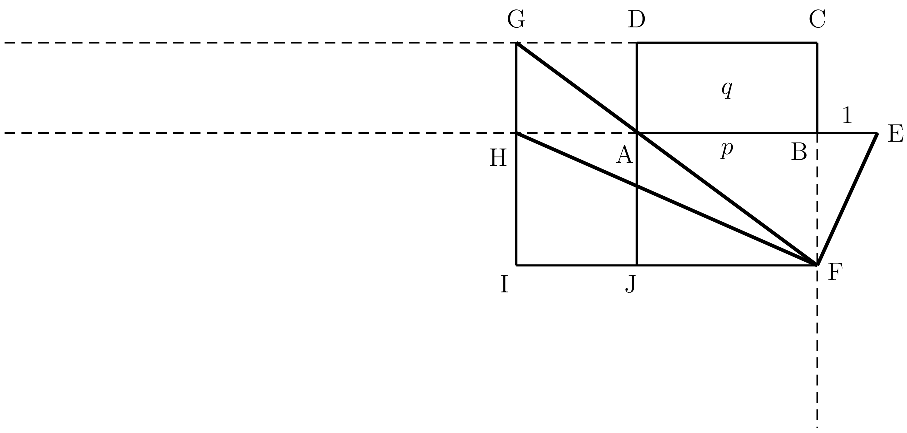
а именно тогда все три решения будут действительны и различны.

Бомбелли занимался втором случаем, потому что он знал, что всегда одно решение положительно. Вот его доказательство.

Пусть $x^3 = px + q$. Мы знаем p и q. Пусть AB $= p$ а BC $= \frac{q}{p}$, так что ABCD $= q$. Пусть BE $= 1$. Пусть F изменчивая точка на продолжении CB. Пусть EFH прямоугольный треугольник. Его стороны меняются, когда F меняется, так что H тоже меняется (E нет, ибо BE постоянно). Наконец, продолженный FA пересекает продолжение CD в G. Когда F двигается, тогда двигается H к одной стороне а G к другой, и наоборот.



Очевидно, что H один раз будет точно под G. Тогда имеем следующее положение:



Тогда, по Бомбелли, BF действительное и, как отрезок, положительное решение уравнения $x^3 = px + q$. Он это обьясняет следующим образом.

ABCD = AHIJ ($= q$) (ибо в равных треугольниках GIF и GCF имеются равные треугольники GHA и GDA, AJF и ABF; это известно из трактата *Начал* Евклида, см. его теорему $\mathcal{N}^\circ$ I, 43).

BHIF = CDJF (ибо BAJF общее сложение).

Рассматриваем эти две площади. Сперва, CDJF $= p \cdot \mathrm{BF} + q$. Потом, BHIF $= \mathrm{HB} \cdot \mathrm{BF}$. Ибо (теорема высоты прямоугольного треугольника) $\mathrm{BF}^2 = \mathrm{HB} \cdot \mathrm{BE} = \mathrm{HB}$, имеем BHIF $= \mathrm{HB} \cdot \mathrm{BF} = \mathrm{BF}^3$. Это значит, что эффективно $\mathrm{BF}^3 = p \cdot \mathrm{BF} + q$.

Тогда Бомбелли рассматривает один числовой пример. Очевидно, что уравнение $x^3 = 15x + 4$ имеет решение $x = 4$. Но формула Кардана даёт (с нашей математической символикой, следовательно $p = -15$, $q = -4$):

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Как можно иметь $x = 4$? Для этого положит Бомбелли во-пербых (вновь с нашей математической символикой):

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + r \cdot \sqrt{-1}$$
$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - r \cdot \sqrt{-1},$$

так что после их сложения $x = 4$, как желательно. Чтобы теперь найти подходящюю величину r, надо возводить каждое из них в куб; для этого Бомбелли будет использовать некое своё новое правило вычисления.

Если k некоторая величина, тогда применялось такое правило:

$$\left(+\sqrt{k}\right) \cdot \left(+\sqrt{k}\right) = +\sqrt{(k)(k)} = \sqrt{k^2} = k.$$

А теперь для положительного k будет применяться его новое правило:

$$\left(+\sqrt{-k}\right) \cdot \left(+\sqrt{-k}\right) = -k,$$

т.е., в сегодняшней математической языке,

$$(+i \cdot k)(+i \cdot k) = -1 \cdot k.$$

Об этом правиле он пишет: *qual sorte di R.q. ha nel suo algorismo diversa operatione dall'altre* (этот сорт квадратных корней имеет при своём вычислении операцию, которая различается от другого [т.е., обычного]). При помощи этого правила можно теперь вычислять наши выражения:

$$\begin{aligned} 2 + 11\sqrt{-1} &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot r \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot r^2 \cdot (\sqrt{-1})^2 + r^3 \cdot (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 + 12 \cdot r \cdot \sqrt{-1} - 6r^2 - r^3 \cdot \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 - 11\sqrt{-1} &= 2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot r \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot r^2 \cdot (\sqrt{-1})^2 - r^3 \cdot (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 - 12 \cdot r \cdot \sqrt{-1} - 6r^2 + r^3 \cdot \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Тогда всё будет в порядке в каждом выражении с выбором $r = 1$; а после сложения этих двух выражений, Бомбелли имеет желанное решение.

Таково было первое использование мнимых чисел. Первый шаг к их общему принятию случился лет пятьдесять после, во время открытия основной теоремы алгебры (A. Girard, *Invention nouvelle en l'algebre*, 1629: toutes les equations d'algebre reçoivent autant de solutions, que la denomination de la plus haute quantité le demonstre). А именно, чтобы иметь все n корней одного уравнения n-ой степени, нужно включить комплексные числа.

[*Всё это описается подробно в (моей) Une introduction à l'histoire de l'algèbre* (Lausanne 1999) или (перевод) *An Introduction to the History of Algebra* (Providence 2009).]