А. Н. КОЛМОГОРОВ - ГЕОМЕТР

Что такое геометрия?

Однажды в Доме учёных мне довелось организовать диспут на тему: “Развитие геометрии в двадцатом столетии.” Естественно возник вопрос: а что такое геометрия в наше время?

... Девятнадцатый век был веком геометрии. Какие имена! Карл Фридрих Гаусс, Николай Лобачевский, Янош Бойаи, Бернхард Риман — открыватели новых геометрий; их продолжатели Эудженио Бельтрами и Артур Кэли; Феликс Клейн, объединивший разные геометрии единой концепцией; Софус Ли и Эли Картан; Анри Пуанкаре — всеобъемлющий гений, воссоединивший идеи всех упомянутых знаменитых геометров; а кроме них: Огюстен Коши и Герман Минковский — основатели выпуклой геометрии; Карл Якоби и Герман Грассман — создатели многомерной геометрии; дифференциальные геометры, продолжившие труды Гаусса — Миндинг и Петерсон; Юлиус Плюккер и Август Мёбиус; разработавшие аналитико-алгебраические подходы к геометрии; крупнейший синтетический геометр Якоб Штейнер, и, наконец, Давид Гильберт с его “Основаниями геометрии” (вышедшими в свет в 1899 году) — вот неполный список великих геометров позапрошлого века.

А “у нас”, в двадцатом-то веке — кого можно поставить в этот ряд имён? Кого из наших современников можно назвать великим геометром? Что произошло с геометрией в прошлом веке? Геометрия ныне одна или их много? Все эти вопросы стали предметом оживлённой дискуссии в Доме учёных.

По поводу того, что такое геометрия, были высказаны разные мнения. Конечно, предмет, основания которого были заложены в античности, содержание которого — *математическое описание тех фигур, которые стоят перед нашими глазами* и которые могут быть подвергнуты всевозможным мыслимым преобразованиям (аффинным, проективным, непрерывным и т. п.) остался. Но многомерный мир перед нашим взором не стоит, для его исследования применяются методы алгебры, анализа, комбинаторики — геометрия ли это? А маломерная тематика, описание двумерных и трёхмерных фигур, не исчерпана ли она?

Было высказано и другое суждение: геометрия — это *способ мышления*. Очень кстати подоспели новые физиологические исследования, которые выделили две компоненты в строении нашего мозга. Сейчас считается доказанным, что одна половина нашего мозга отвественна, так сказать, за “гармонию” — она ведает интуицией, воображением, восприятием формы и цвета, а другая отвечает за “алгебру” (помните пушкинское: “поверил алгеброй гармонию" — по нынешнему "одной половиной мозга другую"?). Эта "алгебраическая" часть мозга отвечает за логику, трезвый анализ, она ведает всевозможной алгоритмикой в нашем поведении и мышлении. Так что, геометрией, как считают многие, можно считать ту часть математики, где главную роль играет "вообразительная" часть нашего мозга.

Не будем продолжать дискуссию и обратимся к нашей теме: А. Н. Колмогоров, как геометр.

Компоненты математической одарённости по Колмогорову.

Андрей Николаевич на протяжении всей своей жизни размышлял над проблемами одарённости. При этом он выделял три (а не две) компоненты математической одарённости: алгоритмическую ("в смысле умелого преобразования сложных буквенных выражений, нахождения удачных путей для решения уравнений, не подходящих под обычные правила, и т. п. "), логическую (состоящую из искусства "последовательного, правильно расчленённого логического рассуждения") и, наконец, геометрическую. Он писал, что "геометрическое воображение, или, как говорят ¡¡геометрическая интуиция¿¿, играет большую роль при работе почти во всех разделах математики, даже самых отвлечённых." Размышляя о себе, рассказывая о своих возможностях, Колмогоров неизменно подчёркивал, что он сам этой ¡¡геометрической интуицией¿¿ обладал. (В одной черновой тетради, оценивая свои способности, помимо этих трёх видов одарённости, им была названа ещё "интуиция процессов". Алгебро-аналитические способности свои Андрей Николаевич оценивает как "весьма умеренные", около логики и интуиции стоят простые плюсы, а "геометрические конструкции" оценены плюсом с восклицательным знаком.) Надо ещё добавить, что Андрей Николаевич любил рисовать. Его письма и дневники испещрены рисунками пером. П. С. Александров доверял Андрею Николаевичу изготовлять чертежи для его книг. Словом, существовали весомые предпосылки для применения геометрических идей и конструкций в творчестве Колмогорова.

Этот очерк о Колмогорове-геометре состоит из трёх частей. Сначала речь пойдёт о его собственно геометрических работах, работах по геометрии в первом (из двух вышеназванных) смысле этого слова, а далее — о геометрических мотивах в его работах негеометрического содержания. В заключение мы обсудим его замысел реформы школьного геометрического образования.

Работы по геометрии.

Принято считать, что собственно геометрических работ у Колмогорова только две: Zur topologish-gruppenteoretischen Begründung der Geometrie. – Nachr.Ges.Wiss. Göttingen, Fachgr. I (Mathematik), H. 2, 1930; 208 – 210 (О тополого-теоретико-групповом обосновании геометрии) и

Zur Begründung der projektiven Geometrie. – Ann. Math., 1932, vol. 33, p. 175 – 176 (К обоснованию проективной геометрии).

И это действительно работы по геометрии в духе девятнадцатого века, ибо в них речь идёт о двух важнейших геометрических объектах — пространствах постоянной кривизны (которые возникли в соединении трудов Гаусса, Лобачевского – Бойаи, Римана, Бельтрами, Миндинга и других) и проективных пространствах, сыгравших столь великую роль в истории геометрии. (Кэли писал: "Проективная геометрия — это вся геометрия".) Но обе эти работы Колмогорова по своим методам относятся к аксиоматическим теориям, в обеих определяется система аксиом, описывающая названные объекты с некоторой неизвестной к тому времени стороны. Эти работы требовали скорее логических, чем геометрических конструкций, т. е. их следует отнести скорее к "алгебре", чем к "гармонии".

В первой из названных работ Колмогоров характеризует "пространства постоянной кривизны, как единственные топологические пространства с достаточно большой свободой движений." Колмогоров приводит красивую, весьма экономную аксиоматику таких пространств. Вот она.

Пусть X — *метризуемое, локально компактное и связное топологическое пространство, на котором задана группа* Γ *однозначных непрерывных отображений* X *на себя, обладающая свойством равномерной непрерывности.* Первое интересное замечание автора состоит в том, что метризуемость, локальная компактность и равномерная непрерывность дают возможность ввести на X такую метрику, в которой все отображения из Γ становятся изометричными. Это даёт возможность определить *сферы* $S(x)$ *с центром в* x, и тогда автор вводит ещё одну аксиому: *для любых двух различных сфер с общим центром одна из них всегда отделяет другую от центра.* При помощи этой аксиомы доказывается, что инвариантное расстояние обладает таким свойством: *для любых двух точек из* X *найдётся третья, расстояние от которой до первой и до второй равно половине расстояния между первой и второй точками* (см. рис. 1). При этом, если X одномерно, то отсюда следует, что это пространство гомеоморфно либо прямой, либо окружности, а в общем случае можно так отобразить X на прямую или окружность, что Γ переходит в группу изометрий прямой или окружности соответственно. Колмогоров высказывает гипотезу, что уже эти топологические аксиомы, соединённые с аксиомой отделимости, приводят к пространствам постоянной кривизны. Но при этом группа изометрий может оказаться беднее, чем у классических многообразий постоянной кривизны (гиперболических, евклидовых, эллиптических или сферических). Он указывает на группу кватернионных подстановок $x' = ax + b$, $|a| = 1$, зависящую лишь от семи (а не от десяти) параметров, которая удовлетворяет всем аксиомам. И тогда, чтобы обеспечить полноту группы движений, аксиома отделимости модифицируется. Определяются сферы разных рангов. Сферу $S(x)$ назовём сферой первого ранга. Для точки, принадлежащей сфере $S(x_1)$ аналогичным образом определяется сфера $S(x_1, x_2)$ второго ранга и т. д. до n-го ранга и налагается требование, по которому из двух сфер одного и того же ранга n с параметрами $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ одна из них отделяет другую от центра x_k. И далее формулируется

Основная теорема *Если выполнены все названные выше аксиомы, то X гомеоморфно конечномерному пространству постоянной кривизны, и при этом его можно так отобразить на это пространство, что* Γ *перейдёт в полную группу движений и отражений.*

Всё это выглядит настолько прозрачно, что доказательства не последовало: автор, повидимому, считал, что заинтересованный читатель сам может восстановить все детали. Хайнц Хопф попросил Генриха Титца восстановить рассуждения Колмогорова, что тот и сделал, слегка, впрочем, дополнив аксиоматику Колмогорова.

Такова первая геометрическая работа Колмогорова.

И если в ней Колмогоров выступил как основатель тополого-групповых методов в геометрии, то вторая его работа положила начало развитию в нашей стране топологической алгебры и топологической геометрии одновременно (ибо проективное пространство является и геометрическим, и алгебраическим объектом, как, впрочем, любая классическая геометрия, но проективная "особенно").

Во второй работе Колмогоров вводит три группы аксиом. Первая группа — аксиомы *компактности*. Там выделяются три группы объектов — точки, прямые и плоскости, *каждая из которых является связным компактом.* Вторая группа — аксиомы *инцидентности*, где точки, прямые и плоскости удовлетворяют обычным аксиомам принадлежности в проективной геометрии. А именно: *через две различные точки проходит единственная прямая, и каждая прямая содержит по меньшей мере три точки; через три неколлинеарные точки проходит единственная плоскость; прямая и плоскость имеют по крайней мере одну общую точку; две плоскости имеют по крайней мере одну общую прямую и существуют четыре некомпланарные точки, любые три из которых неколлинеарны.* Третья группа — аксиомы *непрерывности*, согласно которым отношения, описанные аксиомами инцидентности непрерывны (скажем прямая — непрерывная функция двух не сливающихся точек и т. п.).

Если теперь выбрать на одной из прямых три точки в качестве нуля, единицы и бесконечности, то можно определить (исходя из аксиом инцидентности, как это всегда делается в проективной геометрии — см. рис. 2a и 2b) *расстояние между точками.* Но при выполнении аксиом компактности и непрерывности, совокупность расстояний образует связное локально-компактное тело. Поняв это, Андрей Николаевич поставил перед Л. С. Понтрягиным проблему описания всех связных локально-компактных тел. И Понтрягин доказал, что таковых всего три: *поля вещественных и комплексных чисел и тело кватернионов.* Этот результат (один из самых ярких в творчестве Л. С. Понтрягина), явился первым классическим результатом топологической алгебры. А из теорем Колмогорова и Понтрягина последовало, что существуют лишь три различных типа проективных пространств, обладающих свойствами связности, компактности и непрерывности, а именно *вещественное, комплексное и кватернионное проективные пространства.* Это был начальный результат топологической геометрии.

Кратко прокомментируем эти две работы. К числу своих учителей Колмогоров неизменно причислял А. К. Власова, лекции которого по проективной геометрии от слушал, будучи студентом второго курса. Работа о многообразиях постоянной кривизны датирована 18-м июня 1930 года. В это время Андрей Николаевич находился в своей первой командировке в Германии. Возможно, он готовил её для встречи с Гильбертом, влияние которого на весь начальный период творчества Колмогорова было велико. Вторая работа датирована 26-м мая 1931 года, следовательно, она была закончена сразу после его возвращения из этой командировки, и возможно была навеяна ею. В обеих работах Колмогоров соединяет с геометрическими и алгебраическими идеями топологические концепции. Такое будет происходить ещё не раз в тридцатые годы. Причиной этого, скорее всего, было влияние Павла Сергеевича Александрова. Так в этих двух работах воссоединились увлечения Андрея Николаевича аксиоматическим методом, проективной геометрией и топологией.

Обе работы оказались воспринятыми, они получили продолжение. О том, как развивались события, связанные с аксиоматикой проективного пространства, см. комментарий А. В. Михалёва в первом томе избранных сочинений Колмогорова, стр. 414 – 415.

Геометрические мотивы в негеометрических работах А. Н. Колмогорова.

Вот как на склоне лет прокомментировал Андрей Николаевич свой первый выдающийся результат — построение примера интегрируемой функции, ряд Фурье которой расходится почти всюду. “Довольно долго я работал надвое, стараясь поочерёдно то построить пример, то доказать его невозможность. Последним этапом была неделя непрерывных размышлений, закончившаяся возникшей внезапно конструкцией. Немного позднее без больших усилий возник аналитический вариант первоначально чисто геометрической идеи.”

В публикации, посвящённой построению примера, приведено аналитическое доказательство, и сейчас трудно понять, что Андрей Николаевич имел ввиду, говоря о “чисто геометрической идее”. Но я не раз слышал от него, что решающим для него был вдруг возникший наглядный геометрический образ.

Две геометрические работы, о которых было рассказано выше, были выполнены в тот творческий период жизни Колмогорова, когда его занимали логические пределы основных математических понятий (интеграла, меры, геометрических и функционально-аналитических объектов).

В 1925 году Колмогоров публикует заметку La définition axiomatique l'integrale. — C. r. Acad. sci. Paris, v. 180, 1925, 110 – 111 (Аксиоматическое определение интеграла). Тогда же Андрей Николаевич подготовил подробную статью, но своевременно она не была напечатана, и её удалось напечать лишь в избранных трудах в 1985 году. Эта работа основана на геометрических теоретико-функциональных конструкциях и для того, чтобы облегчить для читателя их понимание, автор приводит два выразительных чертежа (см. рис. 3a и 3b).

Следующая работа, о которой мы собираемся рассказать, уже почти полностью может быть отнесена к геометрии. Речь идёт о статье Beiträge zur Maβtheorie. — Math. Ann., Bd. 107, 1933, 351 – 366 (К теории меры). Эта работа посвящена логической структуре понятия площади поверхности, точнее — мере k-мерного множества, расположенного в n-мерном пространстве.

Обсудим подход Колмогорова в том наглядном случае, когда $k = 2$, а $n = 3$, иначе говоря, постараемся понять, как он подходит к определению площади достаточно произвольного двумерного множества, расположенного в трёхмерном пространстве.

Колмогоров определяет две меры — верхнюю и нижнюю, и основной результат работы состоит в доказательстве того, что *любая мера, обладающая самыми естественными для этого понятия свойствами, лежит между построенными им верхней и нижней мерами.*

Построения верхних и нижних мер очень наглядны и геометричны. Предположите, что вы имеете перед собой некую поверхность (границу трёхмерного тела) и хотите измерить её площадь. Возьмите для этого кусок нерастягиваемой ткани и начните прикладывать его к поверхности, допуская складки, но не разрывы. Величину площади самого маленького (по площади) куска ткани (для точности — нижнюю грань площадей таких кусков), который потребуется для того, чтобы полностью покрыть поверхность автор называет *верхней площадью этой поверхности.*

А нижняя площадь определяется так. Пусть разрешается разрезать кусок ткани на мелкие части и прикладывать их так, чтобы они не пересекались. Верхнюю грань суммы площадей таких кусочков, которыми можно покрыть всю поверхность, Колмогоров называет *нижней площадью.*

Конечно, при переходе к общей ситуации вместо куска ткани, накладываемой на поверхность, будет *нижняя грань меры Лебега прообраза поверхности при нерастягивающем отображении*, определённая на самом широком и очень популярном в те годы классе суслинских множеств, но истинная суть дела была объяснена выше. Она имеет этот абсолютно прозрачный и чисто геометрический смысл, и работа о теории меры может быть отнесена к геометрии "по способу мышления".

Работу по теории меры Колмогоров готовил для обсуждения с Каратеодори, который впервые рассмотрел саму задачу об определении меры k-мерного множества в n-мерном пространстве "в его основополагающей, — пишет Колмогоров в своей статье, — работе [3]", что привёло "к целому ряду определений меры." Колмогоров писал, что Каратеодори "понравилась моя работа по теории меры, и он настоял на возможно быстром её печатании."

О развитии этой работы см. в комментарии В. А. Скворцова в первом томе избранных сочинений Колмогорова (стр. 376 – 381).

Следующая работа сыграла заметную роль в создании функционального анализа. Она, в частности, упоминается в обзоре Н. Бурбаки, посвящённом истории математики.

Речь идёт о статье Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologishen linearen Raumes. — Stud. math., 1934, v. 5, 29 – 33 (О нормируемости общего топологического пространства). В этой статье снова соединяются алгебраическая (а именно, векторная) структура с топологией и впервые дается определение линейного топологического пространства (сейчас принято говорить "топологического векторного пространства"). Функциональный анализ родился совсем недавно: знаменитая книга Банаха "Теория линейных операций", которая собственно, и ознаменовала рождение нового направления в математике вышла в 1931 году. Один экземпляр книги Банаха был прислан Колмогорову, и это во многом послужило развитию функционального анализа у нас в стране. Статья Колмогорова была одной из первых реплик на книгу Банаха.

Колмогоров пишет, что "представляется совершенно естественным развивать общую теорию линейных функционалов и операторов именно в линейных топологических пространствах. Однако значительная часть этой теории развита в настоящее время для *нормированных* пространств [...] Возникает вопрос, какие линейные топологические пространства можно нормировать? " Статья посвящена ответу на этот вопрос. Имеет место

Теорема (о нормируемости линейного топологического пространства). *Для нормируемости линейного топологического простран-*

ства необходимо и достаточно, чтобы существовала по крайней мере одна выпуклая ограниченная окрестность нуля.

Необходимость этого утверждения ясна: открытый единичный шар нормированного пространства представляет собой выпуклую ограниченную окрестность нуля. С другой стороны, функция Минковского ограниченного выпуклого множества, пересечённого с симметричным, является нормой (см. рис. 4), которая, как нетрудно показать, задаёт ту же топологию, что была в исходном линейном топологическом пространстве.

Функция Минковского — одна из основных функций выпуклой геометрии, и доказательство того, что функция Минковского выпуклого множества, содержащего нуль, является выпуклой однородной первой степени функцией (а именно это и составляет суть теоремы о нормируемости) есть фундаментальный факт выпуклой геометрии.

Следующая работа Колмогорова, имеющая геометрическое содержание, послужила началом нового направления в теории аппроксимации. Речь идёт о работе Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse. — Ann. of Math.)2), v. 37, 1936, 107 – 110 (О наилучшем приближении функций заданного функционального класса).

В этой работе было введено понятие, которое потом было названо *поперечником по Колмогорову.*

Вот как автор ставил задачу. “Мы предполагаем, — писал он, — что для рассматриваемых функций введено понятие расстояния. Если рассмотреть задачу о приближении f линейными формами $\phi = c_1\phi_1 + \ldots + c_n\phi_n$ с фиксированными $\phi_1, \ldots, \phi_n$, то возникает задача (задача Чебышева) с помощью подходящего выбора коэффициентов $c_1, \ldots, c_n$ сделать возможно малым расстояние $\rho(f, \phi) \ldots$ Обозначим $E_n(f)$ —нижнюю грань расстояний $\rho(f, \phi)$. Для класса F функций f обозначим далее $E_n(F)$ верхнюю грань величин $E_n(f)$ по всем f из F. Величина $E_n(F)$ определяется классом F и функциями $\phi_1, \ldots, \phi_n$. Мы ставим теперь новую задачу: для заданных F и n доставить минимум $E_n(F)$ за счет выбора функций $\phi_1, \ldots, \phi_n \ldots$ Нижнюю грань $D_n(F)$ величин $E_n(F)$ можно назвать n-*поперечником*”.

В этом отрывке вкратце обозначены основные вехи теории аппроксимации: *приближение индивидуальных элементов фиксированным аппаратом приближения* (такого рода задачи решались в школе Чебышёва), приближение *классов элементов фиксированным аппаратом приближения* (эту задачу в течение многих лет обсуждали в школах С. Н. Бернштейна, С. М. Никольского, С. Б. Стечкина, В. К. Дзядыка, Н. П. Корнейчука и др. (а источником послужили работа Колмогорова 1935 года и Фавара 1936 года) и, наконец, *выбор оптимального средства приближения* (в данном конкретном случае — оптимального n-мерного подпространства). Впоследствии за n-поперечником по Колмогорову множества

C, расположенного в нормированном пространстве X закрепилось обозначение $d_n(C,X)$. Его определение, согласно тому, что сказано выше Колмогоровым, таково:

$$d_n(C,X) = \inf_{L_n} \sup_{x\in C} \inf_{\xi\in L_n} \|x-\xi\|_X$$

(L_n — n-мерные подпространства; величина $\sup_{x\in C}\inf_{\xi\in L_n}\|x-\xi\|_X$ называется *уклонением* C от L_n. Вычисления поперечников составили ещё один этап теории приближений, в котором активное участие приняли очень многие математики.

В статье 1936 года, по сути дела, решается следующая геометрическая задача: *описать n-мерное подпространство наилучшим образом приближающее компактный эллипсоид C, расположенный в гильбертовом пространстве H*, или, что то же — вычислить $d_n(C,H)$.

Эллипсоидом называется образ шара гильбертова пространства при линейном отображении. Если H и H_1 — гильбертовы пространства, BH — единичный шар в H, а $T\colon H \to H_1$ — линейный компактный оператор, то TBH — компактный эллипсоид, который мы обозначим $E(T)$. Размерность $E(T)$ обозначим N, $0 \le N \le \infty$. В работе были вычислены поперечники $E(T)$ в H_1.

По теореме Гильберта-Шмидта для самосопряженного компактного оператора $T'T$ (T' – сопряженный оператор) существует ортогональная нормированная система собственных векторов $\{e_k\}$, отвечающих собственным значением s_n^2, $s_n \downarrow 0$, $s_n \ne 0$, такая, что каждый элемент $x \in H$ единственным образом представляется в виде

$$x = \sum_k \langle x, e_k\rangle e_k + \xi,$$

где $\xi \in \mathrm{KerT}$. Далее считаем, что $\mathrm{Ker}T = \{0\}$. (Числа s_k называются *s-числами оператора T.)* Имеет место следующая

Теорема (о поперечниках компактных эллипсоидов) *Пусть H и H_1 — гильбертовы пространства, $T\colon H \to H_1$ — компактный оператор. Тогда*

$$d_n(E(T),H_1) = s_{n+1},$$

если же $n > N$, то n-тый поперечник равен нулю.

Геометрическая суть теоремы для $N=3$, $n=1$ и эллипсоида $(\frac{x_1}{a_1})^2 + (\frac{x_2}{a_2})^2 + (\frac{x_3}{a_3})^2 \le 1$ изображена на рис. 5a и 5b. Докажем эту теорему аналитически. Оценка сверху проводится методом Фурье: вектор $y \in E(T)$, $y = Tx$, $\|x\|_H \le 1$, т. е. имеющий разложение $y = \sum_{k\ge1}\langle x, e_k\rangle Te_k$ приблизим вектором $S_n y = \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle T e_k$ и получим:

$$\|y - S_n y\|^2 \overset{def}{=} \sum_{k\geq n+1} s_k^2 \langle x, e_k\rangle^2 \leq s_{n+1}^2 \sum_{k\geq n+1} \langle x, e_k\rangle^2 \overset{def}{\leq} s_{n+1}^2.$$

Оценка сверху доказана.

Оценка снизу проводится методом “вложенного шара”. Рассмотрим множество векторов

$$y = \sum_{k=1}^{n+1}\langle x, e_k\rangle T e_k, \quad \sum_{k=1}^{n+1}\langle x, e_k\rangle^2 s_k^2 \leq s_{n+1}^2. \qquad (i)$$

А отсюда следует, во-первых, что

$$\langle y, y\rangle \overset{(i)}{=} \sum_{k=1}^{n+1}\langle x, e_k\rangle^2 s_k^2 \overset{(i)}{\leq} s_{n+1}^2, \qquad (ii)$$

а во-вторых, что

$$\sum_{k=1}^{n+1}\langle x, e_k\rangle^2 \overset{Id}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\langle x, e_k\rangle^2}{s_k^2} s_k^2 \overset{s_k\downarrow 0}{\leq} s_{n+1}^{-1} \sum_{k=1}^{n+1}\langle x, e_k\rangle^2 s_k^2 \leq 1.$$

Отсюда следует, что шар $B(0, s_{n+1}) = \{y \in Y \mid \langle y, y\rangle \leq s_{n+1}^2\}$ лежит в эллипсоиде $E(T)$. Но для любого n-мерного подпространства L_n найдётся вектор длины s_{n+1}, лежащий в ортогональном дополнении к L_n и принадлежащий шару $B(0, s_{n+1})$, т. е. уклонение нашего эллипсоида от пространства L_n не меньше s_{n+1}, и значит, $d_n \geq s_{n+1}$. Оценки сверху и снизу совпали. Теорема доказана.

Одиннадцать лет спустя после работы 36-го года Андрей Николаевич заинтересовался работой Гаусса по методу наименьших квадратов, и это привело его к некоторым задачам конечномерной евклидовой геометрии. К своим исследованиям Колмогоров привлёк молодых математиков А. А. Петрова и Ю. М. Смирнова. В итоге появилась статья “Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов”, Изв. АН СССР, сер. матем., 1947, т. 1, N 6, 461 – 566. Авторы получили оценку сверху одной геометрической величины, а оценка снизу не получилась. Они тогда обратились к А. И. Мальцеву, и он красивой алгебраической конструкцией доказал нужную оценку, опубликованную в двухстраничной заметке, напечатанной сразу после статьи Колмогорова – Петрова – Смирнова.

Но история на этом не закончилась. Спустя ещё семь лет С. Б. Стечкин извлёк из конструкций Колмогорова – Петрова – Смирнова – Мальцева следующий результат:

Теорема (о поперечниках правильного октаэдра) *Пусть $\mathcal{O}^N$ — правильный октаэдр (выпуклая оболочка системы N попарно ортогональных единичных векторов и им противоположных, расположенных в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$). Тогда*

$$d_n(\mathcal{O}^N, \mathbb{R}^N) = \sqrt{\frac{N-n}{N}}.$$

(На моём семинаре по теории приближений эта теорема Колмогорова – Петрова – Смирнова – Стечкина – Мальцева именовалась теоремой $\text{\textit{КПСС}}_{(\text{\textit{м}})}$.)

Докажем эту теорему. *Оценка снизу* проводится методом усреднения, неоднократно применяемым Колмогоровым, и фактически проведённым в упомянутой работе трёх авторов. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^N$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^N$ $(e_1 = (1,0,\ldots,0), e_2 = (0,1,\ldots,0)$ и т. д), L_n некоторое n-мерное подпространство H и $\{f_k\}_{k=1}^n$ — ортонормированный базис в L_n. Тогда для квадрата расстояния он некоторой точки $x \in \mathbb{R}^N$ до L_n имеет место формула: $d^2(x, L_n, \mathbb{R}^N) = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n (x, f_k)^2$ $((x,y)$ — скалярное произведение векторов x и $y)$. Обозначив (f_k, e_j) через f_{kj}, получаем: $\sum_{k=1}^n d^2(e_j, L_n, \mathbb{R}^N) = n - \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^n f_{kj}^2 = N-n$ (ибо $\sum_{k=1}^n f_{kj}^2 = \|f_j\| = 1$. Но из этого равенства в силу того, что наибольшее расстояние от точек октаэдра до подпространства достигается на одной из его вершин, получаем:

$$\max_{1\le j\le N} d^2(e_j, L_n, \mathbb{R}^n) \ge n^{-1} \sum_{k=1}^n d^2(e_j, L_n, \mathbb{R}^N) = N-n.$$

Ввиду произвольности L_n получаем оценку снизу: $d_n(\mathcal{O}^N, \mathbb{R}^N \ge \sqrt{\frac{N-n}{N}}$. Из проведённой оценки видно, что если $\widehat{L}_n$ равноудалено ото всех вершин, то уклонение октаэдра от $\widehat{L}_n$ будет равно $\sqrt{\frac{N-n}{N}}$.

Оценка сверху. Обозначим через T ортогональное преобразование, действующее по правилу $Te_i = e_{i+1}$, $i = 1,\ldots,n-1, Te-n = e_1$. Ясно, что одномерное пространство $L_1 = \operatorname{span}\{e_1 + \ldots + e_n\}$ инвариантно относительно $T(TL_1 = L_1$. Рассмотрим теперь все двумерные подпространства, на которые разлагается отображение T. Из них, как легко понять, можно составить n-мерное подпространство $\bar{L}_n$, инвариантное относительно T. Откуда получаем (далее обозначаем Px ортогональную проекцию x на $\bar{L}_n$, $Pe_i = \xi_i$, $T^{-1}\xi_i = \xi_i'$):

$$d(e_i, \bar{L}_n, \mathbb{R}^N) = \|e_i - Pe_i\| = \|Te_{i-1} - T(T^1\xi_i'\| =$$

$$\|e_{i-1} - \xi_i'\| \ge \inf_{\xi\in\bar{L}_n} \|e_i - \xi\| = d(e_{i-1}, \bar{L}_, \mathbb{R}^N).$$

Аналогично получается и обратное неравенство, а значит, верна нужная оценка сверху. Теорема доказана.

И совсем бегло скажу о том, что геометрические и физические образы приводили Колмогорова к замечательным открытиям. В качестве примера приведу одну из самых замечательных естественнонаучных работ Колмогорова и его цикл работ по алгебраической топологии, где важнейшую роль сыграл "геометрический стиль мышления".

В работе "Исследование уравнения диффузии, соединённой с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме" (совместной с И. Г. Петровским и Н. С. Пискуновым) Колмогорову принадлежала постановка задачи, которая, как писал он "своим возникновением обязана моим длительным контактам с А. С. Серебровским и группой его сотрудников Н. П. Дубининым, А. А. Малиновским и Д. Д. Ромашовым." Особенностью работы является то, что там имеется инвариантное решение типа бегущей волны. Для меня было поразительным услышанные мною слова о том, как он нащупал ответ. Он сказал: "Я же видел, как горит бикфордов шнур..." Вот-те на: характер эволюции биологической системы Колмогоров усмотрел, глядя на бикфордов шнур!

По поводу своих работ по алгебраической топологии Колмогоров объяснял В. И. Арнольду, что он "придумал свою топологическую теорию гомологий вовсе не комбинаторно и не алгебраически, но думая то о потоках жидкости в гидродинамике, то о магнитных полях: он хотел промоделировать эту физику в комбинаторной ситуации абстрактного комплекса и сделал это. "

13 проблема Гильберта и геометрия.

Тринадцатая проблема Гильберта была посвящена одному из центральных вопросов анализа: *существуют ли функции многих переменных?* В школе изучают, в основном, функции одного переменного: квадратные трёхчлены и другие полиномы, тригонометрические функции, экпоненты, логарифмические функции и т. п. Но, разумеется, встречаются и функции двух и большего числа переменных. Скажем, расстояние на плоскости и в пространстве от точки до начала координат: $\sqrt{x^2+y^2}$ и $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ — функции двух и трёх переменных. Простейшей функцией двух переменных является сумма, сопоставляющая паре чисел (x,y) число $x+y$.

Весь опыт классического анализа свидетельствовал о том, что функции двух переменных устроены несравненно сложнее, чем функции одного переменного, функции трёх переменных несопоставимо богаче функций двух переменных и т. п. Как это можно выразить? Одна из возможностей такова. Некоторые функции трёх переменных можно задать, как суперпозицию функций двух переменных, скажем, так $f(x,y,z)=\varphi(x,\psi(y,z))$. (Например, функция $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ является суперпозицией функций $u\to u^2$ и $v\to\sqrt{v}$ одного переменного и функции сложения двух переменных.) Уверенный в том, что функции трёх переменных не должны сводиться к функциям двух переменных, Гильберт в своей 13 проблеме придал вопросу наиболее острую форму. Он выбрал одну определённую *алгебраическую* функцию трёх переменных (именно, функцию, являющуюся решением следующего полиномиального уравнения $(x,y,z)\to w^5+xw^2+yw+z=0$) и спрашивал: *нельзя ли её выразить суперпозицией* **непрерывных** *функций двух переменных* (полагая, что ответ должен быть отрицательным и предполагая, повидимому, что при доказательстве этого факта важнейшую роль сыграют методы алгебраической геометрии)? А он оказался положительным, а решение основанным на геометрии.

История решения 13 проблемы Гильберта чрезвычайно занимательна. Весной 1956 года А. Н. Колмогоров объявил спецсеминар на механико-математическом факультете МГУ для второкурсников, где начал обсуждать некоторые проблемы, имея ввиду в отдалённой перспективе приблизиться к решению 13 проблемы Гильберта. В этом семинаре принял участие второкурсник Дима Арнольд (так друзья называли в студенческие годы Владимира Игоревича). В этом семинаре Арнольд выполнил свою первую научную работу. Семинар проходил лишь в течение одного семестра, на нём было получено несколько интересных результатов, но проблема Гильберта виделась лишь в бесконечной дали. Однако уже после завершения семинара Колмогорову несколько неожиданно даже для самого себя удалось сконцентрировать колоссальный импульс энергии на решении именно этой проблемы. В итоге примерно двухнедельного периода напряжённейших размышлений Колмогоров доказал, что *всякая непрерывная функция четырёх переменных является суперпозицией функции трёх переменных.* Об этом результате Колмогоров докладывал на III Всесоюзном математическом съезде летом 1956 года. Завершить эти исследования Колмогоров предоставил своим последователям.

Прошло примерно полгода, и как-то весной 1957 года автор этой статьи оказался у Андрея Николаевича на его даче. Андрей Николаевич показал мне на ученическую тетрадь, на обложке которой было написано: "Курсовая работа студента III курса Арнольда". Колмогоров сказал: "Я сейчас проверяю эту работу, но не исключено, что в ней содержится решение 13-й проблемы Гильберта!" Так оно и оказалось.

Но на этом история не закончилась. Летом 1957 года Колмогорову удалось усилить результат Арнольда и доказать следующий результат: **Теорема (о представлении функций многих переменных суперпозицией функций одного переменного и сложения).** *Любая непрерывная функция n переменных (заданная на единичном n-мерном кубе) представима в виде суперпозиции функций одного переменного и единственной функции двух переменных — сложения.*

Сформулируем более точно этот результат в применении к функциям двух переменных.

Пусть f — непрерывная функция двух переменных, заданная на единичном квадрате $Q = \{(x,y) \mid 0 \le x, y \le 1\}$. Тогда она представима в виде

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{5} \chi_i(\varphi_i(x) + \psi_i(y)),$$

где φ_i, ψ_i и χ_i — непрерывные функции одного переменного.

Доказательство общей теоремы, относящейся к функциям n переменных, вполне иллюстрируется двумерным случаем. Приведём эскиз доказательства сформулированной выше двумерной теоремы. Оно складывается из трёх этапов, причём первые два из них чисто геометрические.

1. Построение систем квадратов. Рассмотрим на прямой систему S_1 единичных отрезков $\{\Delta_i\}_{i\in\mathbf{Z}}$, разделённых интервалами длины $1/5$. Далее на плоскости рассмотрим декартово произведение системы S_1 на самоё себя (т. е. совокупность пар (x,y), где $x \in \Delta_i,\ y \in \Delta_j,\ i,j \in \mathbf{Z}$). Получили как бы план города с горизонтальными и вертикальными проспектами одинаковой ширины (см. рис 6). Обозначив начало координат буквой O_0, рассмотрим ещё точки $O_k,\ 1 \le k \le 4$ с координатами $(k/4, k/4)$. Сдвинем теперь изначальный план города четыре раза так, чтобы начальные точки совпали бы с точками $O_k,\ 1 \le k \le 4$. И, наконец, совершим l раз подряд гомотетии всей картины с коэффициентом гомотетии γ . В итоге получим систему квадратов $Q_{ij}^{k,l}$, $i,j\in\mathbf{Z}$, $0\le k\le 4$, $l\in\mathbf{Z}_+$. Построение системы квадратов закончено.

2. Построение функций φ_k и ψ_k. Эти функции не зависят от приближаемой функции f. Основное требование на эти функции состоит в том, чтобы функции $\Phi_k(x,y)=\varphi_k(x)+\psi_k(y)$ разделяли любые два квадрата из l-той системы квадратов, т. е. чтобы сегменты $\Phi(Q_{ij}^{k,l})$ и $\Phi(Q_{i'j'}^{k,l})$ при $(i,j)\ne(i',j')$ не пересекались.

Сделаем лишь первый шаг в построении наших функций, которые будем определять на всей плоскости. Мы имеем нулевую систему квадратов Q_{ij}^{00}, состоящую из квадратов со стороной $4/5$, у которой "начальный" квадрат имеет вершиной начало координат. Построим непрерывную функцию $\Phi_i^0(x,y)$, представимую в виде суммы двух функций одного переменного $\varphi^0(x)$ и $\psi^0(y)$, которая разделяет квадраты Q_{ij}^{00}. Квадрат $\varphi^0(x)$ является произведением двух отрезков Δ_i на оси Ox и Δ_j на оси Oy. Сделаем так, чтобы значения функции $\varphi^0(x)$ на квадрате Q_{ij}^{00} мало отличалось бы от целого числа i, а значения функции $\psi^0(x)$ на том же квадрате мало отличалось бы от числа $\sqrt{2}j$. Иначе говоря, включим точки i в сегменты $[i-\varepsilon_i,i+\varepsilon_i]$, а точки $[\sqrt{2}j-\eta_j,2\sqrt{j}+\eta_j]$ так, чтобы интервалы $\delta_{ij}^{00}=[i-\varepsilon_i+\sqrt{2}j-\eta_j,i+\varepsilon_i+\sqrt{2}j+\eta_j]$ не пересекались. А далее функции $\varphi^0(x)$ и $\psi^0(x)$ достроим по линейности. Это и есть первый шаг, за которым индуктивно, но сходным образом, надо последовательно достраивать наши функции.

3. Завершение доказательства (построение функций χ_i). И снова сделаем лишь один шаг индуктивного построения. Пусть на единичном квадрате Q нам задана функция $f(x,y)$ и $M=\max_{(x,y)\in Q}|f(x,y)|$. Построим функции χ_i^1 одного переменного так, чтобы для функции $f_1(x,y)=f(x,y)-\sum_{i=1}^5\chi_k^1(\Phi_k(x,y)$ (где $\Phi_k(x,y)$ — функции, построенные в п.2) было выполнено соотношение $\max_{(x,y)\in Q}|f(x,y)|\le\frac{5}{6}M$ и при этом

$$\max_{(x,y)\in Q}|\chi_k(\Phi_k(x,y)|\le\frac{1}{3}M.$$

Для этого выберем ранг l таким, чтобы разность наибольшего и наименьшего значений функции f на любом квадрате Q_{ij}^{kl} была не больше $\frac{M}{6}$. Положим теперь функцию χ_k на интервале δ_{ij}^{kl} равной одной трети значения, которое принимает функция f в некоторой (всё равно какой) точке квадрата Q_{ij}^{kl}. И продолжим функцию χ_k по линейности. Тогда нетрудно показать, что функция f_1 будет удовлетворять нужному условию. А далее наши построения следует повторять.

Этим завершается доказательство теоремы Колмогорова о суперпозициях.

На этом естественно закончить описание геометрических идей и конструкций в негеометрическом творчестве Андрея Николаевича Колмогорова. Но нам остаётся коснуться ещё одной темы.

Школьный курс геометрии по Колмогорову.

Последние годы своей жизни Андрей Николаевич Колмогоров посвятил школьному математическому образованию. В частности, он задумал преобразовать школьный курс геометрии. Андрею Николаевичу захотелось описать для школьников евклидову плоскость и наглядно, и точно. В колмогоровском наглядном описании соединились старинное воззрение на плоскость, идущее от Евклида (когда моделью плоскости является плоскость школьной доски, на которой можно совершать построения при помощи линейки и циркуля — проводить прямые через две точки, проводить окружности заданного радиуса, словом, делать то, что обычно делают в школе) с новыми воззрениями на геометрию, идущими от эрлангенской программы Феликса Клейна.

Согласно эрлангенской программе, евклидова плоскость характеризуется *группой движений* (т. е. *изометрических преобразований*). Изометрия предполагает возможность измерять расстояния, и это тоже очень естественное для всех понятие: расстояния между точками измеряются с помощью масштабной линейки.

А суть движений также легко представить себе наглядно с помощью стекла, которым накрывают столы. Оно может выполнить роль *касательной плоскости*, которую можно перемещать по плоскости доски. Если на доске нарисована какая-то фигура (скажем, треугольник), то приложив прозрачное стекло к школьной доске её можно скопировать на стекло, потом стекло можно переместить в другое место и скопировать чертёж снова на доску. Получится изометрическое (сохранившее все расстояния) преобразование фигуры. Стекло можно “перевернуть”, и тогда нарисованная фигура окажется симметричной исходной.

Движение плоскости — это абстракция, при которой перемещается не кусок плоскости, а вся плоскость целиком. На математическом языке — это изометрическое преобразование плоскости (в первой работе, о которой мы рассказывали, также рассматривалась группа изометрических преобразований).

Примерами движений плоскости являются параллельные переносы, повороты вокруг некоторой точки плоскости, симметрии относительно прямой.

Оперируя понятиями расстояния и движения, можно по-новому доказывать многие теоремы и по-другому очень наглядно и образно решать различные геометрические задачи.

Скажем, одну из первых теорем геометрии о равенстве углов при основании в равнобедренном треугольнике (приписываемую Фалесу, который по легенде был первым человеком, который осознал, что такое доказательство) можно, применяя идею движения (так сказать, "с помощью стекла") доказать так. Скопируем треугольник на стекло, потом перевернём стекло, и приложим его к нашему треугольнику на доске "другой стороной". Перенесём далее треугольник со стекла снова на доску. Два треугольника на доске (изначальный и скопированный с перевёрнутого стекла) наложатся друг на друга, а значит, углы при основании равны (ибо они "поменялись местами"). Это доказательство содержится в трудах Люиса Кэролла, и он недоумевал: доказательство ли это? Безусловно, это доказательство, если воспользоваться понятием движения. Но для этого нужна специальная аксиоматика. Такую аксиоматику и придумал А. Н. Колмогоров. Она приспособлена для того, чтобы дать точное описание евклидовой плоскости.

Такое описание возможно достичь с помощью введения координат с последующей алгебраизацией (этот путь был намечен Германом Вейлем, Исайей Шуром и другими; такой путь описания плоской геометрии Дьедонне, вспомнив слова Евклида, сказанные Птолемею, назвал "царским").

Но это не единственный путь. Возможны точные аксиоматические описания плоскости и без обращения к векторной модели. Такое аксиоматическое описание плоскости восходит к Евклиду, а завершил его Давид Гильберт в своих "Основаниях геометрии".

Аксиоматика плоскости, придуманная Колмогоровым, как уже говорилось, не имеет нечто общее с евклидово-гильбертовской аксиоматикой, но в ней есть и "клейновская компонента". Аксиоматика Колмогорова достаточно проста, естественна и "геометрична". В этой аксиоматике четыре неопределяемых понятия: *точка, прямая, множество и элемент множества.* Аксиомы разбиты на пять групп: *принадлежности, расстояния, порядка, подвижности и параллельных.* Вот они (цитируется по учебнику геометрии для восьмого класса 1977 года; после этого были произведены некоторые усовершенствования, но они не существенны).

1. Аксиомы принадлежности.

1.1. Каждая прямая есть множество точек.

1.2. Для любых двух отличных друг от друга точек существует одна и только одна содержащая их прямая.

1.3. Существует хотя бы одна прямая, и каждой прямой принадлежит хотя бы одна точка.

2. Аксиомы расстояния.

2.1. Для любых двух точек A и B имеется неотрицательная величина, называемая расстоянием от A до B. Расстояние равно нулю в том и только в том случае, если точки совпадают.

2.2. Расстояние от точки A до точки B равно расстоянию от точки B до точки A.

2.3. Для любых трёх точек A, B и C расстояние от A до C не больше суммы расстояний от A до B и от B до C.

Аксиомы расстояния позволяют естественным образом определить понятия *отрезок* и *лежит между*.

3. Аксиомы порядка.

3.1. Любая точка O прямой p разбивает множество всех отличных от O точек прямой p на два множества так, что а) для любых двух точек A и B, принадлежащих разным множествам, точка O лежит между A и B; б) если точки A и B принадлежат одному множеству, то одна из них лежит между другой точкой и точкой O.

Эта аксиома позволяет определить, что такое открытый луч и просто луч.

3.2. Для любого расстояния a на заданном луче с началом в точке O существует одна и только одна точка A такая, что расстояние от неё до точки O равно a.

3.3. Если точка C лежит между точками A и B, то точки A, B и C принадлежат одной прямой.

3.4. Любая прямая p разбивает множество не принадлежащих ей точек плоскости на два множества так, что а) любые две точки, принадлежащие разным множествам разделены прямой p, т. е. отрезок, соединяющий эти точки имеет с p непустое пересечение; и) любые две точки, принадлежащие одному и тому же множеству, не разделены прямой p.

4. Аксиома подвижности. *Если расстояние между точками A и B положительно и равно расстоянию между A_1 и B_1, то существует два и только два перемещения (т. е. преобразования плоскости на себя, сохраняющего расстояния), каждое из которых отображает точку A на точку A_1, а точку B на точку B_1.*

5. Аксиома параллельных. *Через точку, не лежащую на прямой можно провести лишь одну прямую, параллельную данной.*

... Судя по некоторым словам, опубликованным Андреем Николаевичем, ему мечталось, что учителя, которые любят свой предмет, смогут на кружках и дополнительных занятиях раскрыть перед интересующимися школьниками мир различных геометрий, и прежде всего евклидов мир конечного и бесконечного числа измерений, мир геометрии Лобачевского, выпуклый мир Минковского, аффинный мир и столь близкий сердцу Андрея Николаевича проективный мир.