Математика вокруг проблемы n тел: интегрируемые системы и КАМ-теория

Оля Ромаскевич

Задачи, вторая порция

На третьей лекции мы говорили про хаос и символическую динамику, листочек посвящен различным примерам динамических систем с символической динамикой.

Напоминание. Говорят, что множество A *плотно* в множестве B, если любая окрестность любой точки B содержит хотя бы одну точку множества A.

1. *Базовые вещи про иррациональный поворот* $f = R_\alpha$ (на угол α) окружности $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. (если вы никогда не решали этих задач, надо их обязательно порешать!)

a. Докажите, что орбита нуля плотна в окресности нуля.

b. Найдите наименьшее натуральное $k \in \mathbb{N}$ такое, что $f^{\circ k}(0) \in (0, \alpha)$.

c. Докажите, что орбита нуля всюду плотна на окружности. **d.** Определим частоту попаданий образов нуля в дугу I:

$$\mu(I) := \lim_{n\to\infty} \frac{\left|k \in [0, \ldots, n-1] : f^{\circ k}(0) \in I\right|}{n}$$

Докажите, что μ зависит только от длины дуги, а не от самой дуги, то есть что орбиты иррационального поворота равномерно распределены на окружности.

Символическая динамика. Пусть задано отображение $f : M \to M$. Пусть множество M разбито на n частей: $M = M_0 \bigcup M_1 \bigcup \ldots \bigcup M_{n-1}$. Каждой точке $x \in M$ сопоставим ее *судьбу* — последовательность $\{\omega_i\}$:

$$\text{Если } f^s(x) \in M_k, \text{ положим } \omega_s := k.$$

Если f обратимо, то мы рассматриваем и отрицательные s; тогда последовательность $\{\omega_i\}$ бесконечна в обе стороны.

Множество бесконечных вправо последовательностей из чисел $0, \ldots, (n-1)$ будем обозначать через Σ_n^+, а бесконечных в обе стороны через Σ_n.

2. *Несколько задач об удвоении окружности.*

a. Найдите судьбу точки $\frac{3}{5}$ при отображении удвоения окружности $x \mapsto 2x \mod 1$. Найдите точку с судьбой 10101010..., для разбиения $M_0 := [0, \frac{1}{2})$, $M_1 = [\frac{1}{2}, 1)$.

b. При каком условии на судьбу точка не принадлежит дуге $[\frac{5}{8}, \frac{3}{4})$? При каком условии на судьбу точка никогда не попадет в эту дугу?

c. Найдите точку со всюду плотной орбитой.

3. *Несколько задач о преобразовании пекаря.* Преобразование пекаря - обратимый аналог отображения окружности.

Возьмем единичный квадрат $K = [0, 1) \times [0, 1)$. Сожмем его линейно в два раза по вертикали, затем линейно растянем в два раза по горизонтали, затем отрежем правую половину и положим ее сверху на левую.

a. Опишите обратное преобразование к преобразованию пекаря. **b.** Почему отображение пекаря разрывно? Запишите его в координатах. **c.** Опишите неподвижные и периодические точки этого отображения.

d. Как связаны судьбы точек, стремящихся к друг другу в прошлом(будущем), если назвать левую половину квадрата M_0, а правую – M_1.

4. *Несколько задач о подкове Смейла.*

В предыдущих примерах не было однозначного соответствия между точками множества и последовательностями из Σ_n. Подкова Смейла — пример обратимой динамической системы, реализующей все судьбы из Σ_2 взаимно однозначным образом.

Разобьем квадрат 5×5 на 25 клеток и рассмотрим его отображение f в себя:

- вторая строка переходит во второй столбец, линейно сжимаясь в пять раз по горизонтали и линейно растягиваясь в пять раз по вертикали;
- четвертая строка переходит в четвертый столбец, линейно сжимаясь в пять раз по горизонтали и линейно растягиваясь в пять раз по вертикали;
- в остальных точках отображения не определено.

a. Опишите неподвижные, периодические точки отображения подковы.

b. Опишите гомоклинические точки на подкове Смейла – то есть такие, что стремятся к неподвижным точкам как в прошлом, так и в будущем.

5. *Соленоид Смейла-Вильямса* Рассмотрим полноторие (внутренность тора). Точку полнотория будем задавать углом φ и точкой единичного круга z (другими словами z — комплексное число, $|z| < 1$).

Определим отображения полнотория в себя:

$$f(\varphi, z) = (2\varphi, \frac{1}{5}z + \frac{1}{2}e^{i\varphi}),$$

или, в вещественных обозначениях,

$$f(\varphi, z) = (2\varphi, \frac{1}{5}z + \frac{1}{2}(\cos\varphi, \sin\varphi)).$$

a. Нарисовать схематически образ полнотория под действием отображения f.

b. Как выглядит сечение образа плоскостью $\varphi = \varphi_0$? Как изменяется сечение при изменении φ_0? Те же вопросы для образа полнотория под действием квадрата отображения. Как выглядит множество, для которого определены первые k итераций обратного к f отображения?

Назовем *соленоидом* множество точек полнотория, для которых определены все обратные итерации f. Как выглядит пересечение соленоида с плоскостью $\varphi = \varphi_0$? (Что происходит при изменении угла?)

c. Разобьем полноторие на половины $\varphi \in [0, \frac{1}{2})$ и $\varphi \in [\frac{1}{2}, 1)$. Всякой ли судьбе соответствует точка полнотория? Как по судьбе точки вычислить ее координаты (φ, z)?

d.Как выглядит множество точек, в судьбе которых фиксированы n первых символов в будущем и n в прошлом?

e. Докажите, что соленоид — объединение некоторого множества (a) непрерывных (b) гладких кривых. Что происходит с кривыми под действием f?

f. Пусть точка, двигаясь вдоль одной из кривых, сделала полный оборот вокруг полнотория. Как связаны значения z до и после обхода?

g. Является ли соленоид (a) связным (b) линейно связным множеством?

Для обсуждений ищите меня в 217б или где-нибудь ещё. Мультики про расслоение Хопфа никуда не пропали.