1. Найдите такие целые a и b, что $|3/7 - a|_3 \le 1/3^4$ и $|3/7 - b|_5 \le 1/5^4$. (Подсказка: Перепишите эти неравенства как сравнения по модулям 3^4 и 5^4.)

2. а) Проверьте, что p-адическая норма на $\mathbf{Q}$ (не только $\mathbf{Z}$) удовлетворяет условиям $|rs|_p = |r|_p|s|_p$ и $|r+s|_p \le \max(|r|_p, |s|_p)$ для всех r и s.

   б) Если $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbf{Q}$ и одно из них больше по норме чем другие, то покажите, что $|r_1 + r_2 + \cdots + r_n|_p = \max |r_i|_p$.

3. Если рациональное r удовлетворяет $|r|_p < 1$, то докажите, что ряд $\sum_{k\ge 0} r^k$ сходится p-адически к $1/(1-r)$, т.е., $|(1 + r + r^2 + \cdots + r^n) - 1/(1-r)|_p \to 0$ при $n \to \infty$.

4. (10-адическая «норма»)

   а) Для ненулевого целого числа a, пусть $a = 10^e a'$, где $10 \nmid a'$. Мы определяем $|a|_{10} = 1/10^e$, и $|0|_{10} = 0$. Докажите следующие свойства для всех a и b в $\mathbf{Z}$:

   $$|a+b|_{10} \leqslant \max(|a|_{10}, |b|_{10}), \quad |ab|_{10} \leqslant |a|_{10}|b|_{10}.$$

   Например, $|2|_{10} = |5|_{10} = 1$, а $|2 \cdot 5|_{10} = 1/10 < |2|_{10}|5|_{10}$. Через a и b, когда $|ab|_{10} = |a|_{10}|b|_{10}$?

   б) Всякое ненулевое рациональное r можно представить в виде $r = 10^e(a/b)$, где $10 \nmid a$ и НОД(10,b) $= 1$, и такой показатель e корректно определён (как функция от r). Определим $|r|_{10} = 1/10^e$ и $|0|_{10} = 0$. Если $r \in \mathbf{Z}$, то это совпадает с функцией в предыдущем пункте. Покажите для любых рациональных r и s, что

   $$|r+s|_{10} \leqslant \max(|r|_{10}, |s|_{10}), \quad |rs|_{10} \leqslant |r|_{10}|s|_{10}.$$

5. а) Докажите, что сложение и умножение — непрерывные функции на $\mathbf{Q}$ относительно p-адической нормы для всякого простого p: если $|r_n - r|_p \to 0$ и $|s_n - s|_p \to 0$ при $n \to \infty$, то $|(r_n + s_n) - (r + s)|_p \to 0$ и $|r_n s_n - rs|_p \to 0$ при $n \to \infty$.

б) Докажите, что всякий многочлен $f(x) = c_d x^d + \cdots + c_1 x + c_0$, где $c_i \in \mathbf{Q}$, определяет непрерывную функцию $\mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ относительно p-адической нормы: если $|r_n - r|_p \to 0$ при $n \to \infty$, то $|f(r_n) - f(r)|_p \to 0$ при $n \to \infty$.

в) (Для тех, которые знают о равномерной непрерывности.) Докажите, что сложение — равномерно непрерывная функция на $\mathbf{Q}$ и умножение — равномерно непрерывная функция на ограниченных подмножествах $\mathbf{Q}$.

г) Верны ли предыдущие пункты для функции $|\cdot|_{10}$ на $\mathbf{Q}$ (см. упр. 4), для которых выполнено $|rs|_{10} \leq |r|_{10}|s|_{10}$ вместо $|rs|_{10} = |r|_{10}|s|_{10}$?

6. (Формула произведения)

   а) Докажите, что для всех ненулевых $r \in \mathbf{Q}$, что выполнено

$$|r|_\infty \prod_p |r|_p = 1,$$

   где произведение берётся по всем простым (все множителя, кроме конечного числа, равны единице).

   б) Для рационального числа m/n, где $m, n \in \mathbf{Z}$, пусть $m/n = a/b$, где a и b взаимно простые числа. Используйте пункт а чтобы показать, что выполнено

$$\max(|a|_\infty, |b|_\infty) = \max(|m|_\infty, |n|_\infty) \prod_p \max(|m|_p, |n|_p),$$

   где произведение берётся по всем простым (все максимумы, кроме конечного числа, равны единице). Важность этой формулы состоит в том, что левая часть использует приведённую форму дроби, а правая часть выражает одно и то же число через произвольный числитель и знаменатель этой дроби. В диофантовой геометрии, такое уравнение возникает в теории высот на рациональных точках на проективной прямой.

7. (Норма Гаусса) Для простого p и многочлена $f(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i \in \mathbf{Q}[x]$, определим

$$|f|_p = \max(|c_0|_p, |c_1|_p, \ldots, |c_n|_p).$$

   Это называется *нормой Гаусса* от f (зависит от p). Например, если $f(x) =$

$6x^3 - (9/5)x^2 + 3x - 21/2$, то $|f|_2 = 2$, $|f|_3 = 1/3$, $|f|_5 = 5$, и $|f|_p = 1$ для других p.

а) Покажите, что $|f + g|_p \leq \max(|f|_p, |g|_p)$ и $|fg|_p \leq |f|_p|g|_p$ для всех f и g.

б) Более тонкее свойство: покажите, что $|fg|_p = |f|_p|g|_p$ для всех f и g. (Подсказка: Если $f \neq 0$ и $g \neq 0$, то предположим, что максимальная норма коэффициентов от f возникает в i-ой степени и максимальная норма коэффициентов от g возникает в j-ой степени, где i и j *как можно наименьшее.* Покажите, что коэффициент $(i + j)$-ой степени в fg имеет норму $|f|_p|g|_p$ из-за усиленного неравенства треугольника для p-адической нормы.)

8. (Применение нормы Гаусса) Для $f(x) \in \mathbf{Q}[x]$, определим $r_f = \prod_p |f|_p$, где произведение берётся по всем простым (все, кроме конечного числа норм, равны единице). Например, если $f(x) = 6x^3 - (9/5)x^2 + 3x - 21/2$, то $r_f = 10/3$ и $r_f f = 20x^3 - 6x^2 + 10x - 35$.

   а) Если $f(x) \in \mathbf{Q}[x]$, то покажите, что $r_f f \in \mathbf{Z}[x]$.

   б) Если $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ и $f \neq 0$, то покажите, что $1/r_f$ — положительное целое.

   в) Покажите, что $r_{gh} = r_g r_h$ для всех g и h в $\mathbf{Q}[x]$.

   г) Если $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$, $f \neq 0$, и $f = gh$ для некоторого g и h в $\mathbf{Q}[x]$, то покажите, что $cg \in \mathbf{Z}[x]$ и $(1/c)h \in \mathbf{Z}[x]$, где $c = r_g$. Поэтому всякому разложению $f = gh$ в $\mathbf{Q}[x]$ многочлена $f \in \mathbf{Z}[x]$ соответствует разложение $f = (cg)((1/c)h)$ в $\mathbf{Z}[x]$ одних и тех же степеней. (Сравните доказательство этого результата с Теоремой 2 Главы 3 книги алгебры Винберга.)