p-адические числа К. Конрад
Дубна, 2014 г. Листок 1

1. Рассмотрим сравнение $x^2 \equiv x \bmod 10^n$.

   а) Проверьте, что два решения кроме 0 и 1 — $5^{2^n} \bmod 10^n$ и $6^{5^n} \bmod 10^n$. Вычислите эти решения, когда $1 \leqslant n \leqslant 5$.

   б) Докажите, для всякого простого p, что сравнение $x^2 \equiv x \bmod p^n$ имеет только два решения: 0 и $1 \bmod p^n$. Потом используете китайскую теорему об остатках чтобы доказать, что $x^2 \equiv x \bmod 10^n$ имеет четыре решения для каждого n, и решения для n и $n+1$ согласованы.

2. Найдите решения в $\mathbf{Z}_{10}$ уравнений $x^3 = x$ и $x^5 = x$ до коэффициента 10^5.

3. Для ненулевого $x \in \mathbf{Z}_{10}$, пусть $x = a_n 10^n + a_{n+1}10^{n+1} + a_{n+2}10^{n+2} + \cdots$, где $1 \leqslant a_n \leqslant 9$ и $0 \leqslant a_i \leqslant 9$ для $i > n$. Покажите, что

$$-x = (10 - a_n)10^n + (9 - a_{n+1})10^{n+1} + (9 - a_{n+2})10^{n+2} + \cdots,$$

   где i-ая цифра равна $9 - a_i$ для $i > n$.

4. Мы увидели на лекции, что $1/3 = 76666\cdots$ в $\mathbf{Z}_{10}$. Вычислите $2/3$ и $-1/3$ в $\mathbf{Z}_{10}$.

5. Вычислите следующие нормы для всякого p: $|20|_p$, $|-540|_p$, $|2014|_p$.

6. Докажите для $n \geq 2$, что $|p|_p^{1/(p-1)} \leqslant |n|_p^{1/(n-1)}$ и равенство имеет место тогда и только тогда, когда $n = p$.