# Тайная жизнь дзета-функции Римана

Ю.В.Матиясевич

http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/
personaljournal/zetahiddenlife

# Дзета функция и Леонард Эйлер

# Дзета функция и Леонард Эйлер

Ряд Дирихле:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

Ряд сходится при for $s > 1$ и расходится при $s = 1$

# Дзета функция и Леонард Эйлер

Ряд Дирихле:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

Ряд сходится при for $s > 1$ и расходится при $s = 1$

Произведение Эйлера:

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ – простое}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

# Дзета функция и Леонард Эйлер

Ряд Дирихле:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

Ряд сходится при for $s > 1$ и расходится при $s = 1$

Произведение Эйлера:

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ – простое}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Доказательство.

$$\prod_{p \text{ – простое}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \prod_{p \text{ – простое}} (1 + p^{-s} + p^{-2s} + p^{-3s} + \dots)$$

# Дзета функция и Леонард Эйлер

Ряд Дирихле:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + \dots + n^{-s} + \dots$$

Ряд сходится при for $s > 1$ и расходится при $s = 1$

Произведение Эйлера:

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ – простое}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Доказательство.

$$\prod_{p \text{ – простое}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \prod_{p \text{ – простое}} (1 + p^{-s} + p^{-2s} + p^{-3s} + \dots)$$

# Дзета функция и Леонард Эйлер

Ряд Дирихле:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + \dots + n^{-s} + \dots$$

Ряд сходится при for $s > 1$ и расходится при $s = 1$

Произведение Эйлера:

$$\zeta(s) = \prod_{p\text{ – простое}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Доказательство.

$$\prod_{p\text{ – простое}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \prod_{p\text{ – простое}} (1 + p^{-s} + p^{-2s} + p^{-3s} + \dots)$$

# Дзета функция и Леонард Эйлер

Ряд Дирихле:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + \dots + n^{-s} + \dots$$

Ряд сходится при for $s > 1$ и расходится при $s = 1$

Произведение Эйлера:

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ – простое}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Доказательство.

$$\prod_{p \text{ – простое}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \prod_{p \text{ – простое}} (1 + p^{-s} + p^{-2s} + p^{-3s} + \dots)$$

# Basel Problem ( Pietro Mingoli, 1644)

# Basel Problem ( Pietro Mingoli, 1644)

*Чему равна сумма* $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \ldots$?

# Basel Problem ( Pietro Mingoli, 1644)

*Чему равна сумма* $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \ldots$?

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \zeta(2)$$

# Basel Problem ( Pietro Mingoli, 1644)

*Чему равна сумма* $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$?

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \zeta(2) = 1.64493406684822644\dots$$

# Basel Problem ( Pietro Mingoli, 1644)

*Чему равна сумма* $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \ldots$?

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \zeta(2) = 1.64493406684822644\ldots$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

# Basel Problem ( Pietro Mingoli, 1644)

*Чему равна сумма* $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\dots$?

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\zeta(2)=1.64493406684822644\dots$$

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$$

Л. Эйлер дал первое "доказательство" в 1735 году

# Basel Problem ( Pietro Mingoli, 1644)

*Чему равна сумма* $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \ldots$?

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \zeta(2) = 1.64493406684822644\ldots$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

Л. Эйлер дал первое "доказательство" в 1735 году

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots$$

# Basel Problem ( Pietro Mingoli, 1644)

*Чему равна сумма* $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$?

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \zeta(2) = 1.64493406684822644\dots$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

Л. Эйлер дал первое "доказательство" в 1735 году

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{x} &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \\ &= \dots \left(1 - \frac{x}{-2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{-1\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{1\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\dots \end{aligned}$$

# Basel Problem ( Pietro Mingoli, 1644)

*Чему равна сумма* $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\dots$?

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\dots=\zeta(2)=1.64493406684822644\dots$$

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$$

Л. Эйлер дал первое "доказательство" в 1735 году

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)}{x} &= 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\dots\\ &= \dots\left(1-\frac{x}{-2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{-1\pi}\right)\left(1-\frac{x}{1\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\dots\\ &= \left(1-\frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\dots\end{aligned}$$

# Basel Problem ( Pietro Mingoli, 1644)

*Чему равна сумма* $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \ldots$?

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \zeta(2) = 1.64493406684822644\ldots$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

Л. Эйлер дал первое "доказательство" в 1735 году

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x)}{x} &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots \\
&= \ldots \left(1 - \frac{x}{-2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{-1\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{1\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\ldots \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots
\end{aligned}$$

# Другие заченния $\zeta(s)$

$$\zeta(2) = \frac{1}{6}\pi^2$$

# Другие заченния $\zeta(s)$

$$\zeta(2) = \frac{1}{6}\pi^2$$

$$\zeta(4) = \frac{1}{90}\pi^4$$

# Другие заченния $\zeta(s)$

$$\begin{aligned}
\zeta(2) &= \frac{1}{6}\pi^2 \\
\zeta(4) &= \frac{1}{90}\pi^4 \\
\zeta(6) &= \frac{1}{945}\pi^6
\end{aligned}$$

# Другие заченния $\zeta(s)$

$$\begin{aligned}
\zeta(2) &= \frac{1}{6}\pi^2 \\
\zeta(4) &= \frac{1}{90}\pi^4 \\
\zeta(6) &= \frac{1}{945}\pi^6 \\
\zeta(8) &= \frac{1}{9450}\pi^8
\end{aligned}$$

# Другие заченния $\zeta(s)$

$$
\begin{aligned}
\zeta(2) &= \frac{1}{6}\pi^2 \\
\zeta(4) &= \frac{1}{90}\pi^4 \\
\zeta(6) &= \frac{1}{945}\pi^6 \\
\zeta(8) &= \frac{1}{9450}\pi^8 \\
\zeta(10) &= \frac{691}{638512875}\pi^{10}
\end{aligned}
$$

# Другие заченния $\zeta(s)$

$$
\begin{aligned}
\zeta(2) &= \frac{1}{6}\pi^2 \\
\zeta(4) &= \frac{1}{90}\pi^4 \\
\zeta(6) &= \frac{1}{945}\pi^6 \\
\zeta(8) &= \frac{1}{9450}\pi^8 \\
\zeta(10) &= \frac{691}{638512875}\pi^{10} \\
\zeta(12) &= \frac{2}{18243225}\pi^{12}
\end{aligned}
$$

# Другие заченния $\zeta(s)$

$$\begin{aligned}
\zeta(2) &= \frac{1}{6}\pi^2 \\
\zeta(4) &= \frac{1}{90}\pi^4 \\
\zeta(6) &= \frac{1}{945}\pi^6 \\
\zeta(8) &= \frac{1}{9450}\pi^8 \\
\zeta(10) &= \frac{691}{638512875}\pi^{10} \\
\zeta(12) &= \frac{2}{18243225}\pi^{12} \\
\zeta(14) &= \frac{3617}{325641566250}\pi^{14}
\end{aligned}$$

# Другие заченния $\zeta(s)$

$$
\begin{aligned}
\zeta(2) &= \frac{1}{6}\pi^2 = \frac{2^1}{2!}\mathrm{B}_2\pi^2 \\
\zeta(4) &= \frac{1}{90}\pi^4 = -\frac{2^3}{4!}\mathrm{B}_4\pi^4 \\
\zeta(6) &= \frac{1}{945}\pi^6 = \frac{2^5}{6!}\mathrm{B}_6\pi^6 \\
\zeta(8) &= \frac{1}{9450}\pi^8 = -\frac{2^7}{8!}\mathrm{B}_8\pi^8 \\
\zeta(10) &= \frac{691}{638512875}\pi^{10} = \frac{2^9}{10!}\mathrm{B}_{10}\pi^{10} \\
\zeta(12) &= \frac{2}{18243225}\pi^{12} = -\frac{2^{11}}{12!}\mathrm{B}_{12}\pi^{12} \\
\zeta(14) &= \frac{3617}{325641566250}\pi^{14} = \frac{2^{13}}{14!}\mathrm{B}_{14}\pi^{14}
\end{aligned}
$$

# Числа Бернулли

$$\mathrm{B}_0 = 1, \quad \mathrm{B}_1 = -\frac{1}{2}, \quad \mathrm{B}_2 = \frac{1}{6}, \quad \mathrm{B}_3 = 0, \quad \mathrm{B}_4 = -\frac{1}{30}, \quad \mathrm{B}_5 = 0,$$
$$\mathrm{B}_6 = \frac{1}{42}, \quad \mathrm{B}_7 = 0, \quad \mathrm{B}_8 = -\frac{1}{30}, \quad \mathrm{B}_9 = 0, \quad \mathrm{B}_{10} = \frac{5}{66}, \quad \mathrm{B}_{11} = 0, \ldots$$

# Числа Бернулли

$$\mathrm{B}_0 = 1, \quad \mathrm{B}_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad \mathrm{B}_2 = \tfrac{1}{6}, \quad \mathrm{B}_3 = 0, \quad \mathrm{B}_4 = -\tfrac{1}{30}, \quad \mathrm{B}_5 = 0,$$
$$\mathrm{B}_6 = \tfrac{1}{42}, \quad \mathrm{B}_7 = 0, \quad \mathrm{B}_8 = -\tfrac{1}{30}, \quad \mathrm{B}_9 = 0, \quad \mathrm{B}_{10} = \tfrac{5}{66}, \quad \mathrm{B}_{11} = 0, \ldots$$

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathrm{B}_k x^k$$

# Числа Бернулли

$$\mathrm{B}_0 = 1, \quad \mathrm{B}_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad \mathrm{B}_2 = \tfrac{1}{6}, \quad \mathrm{B}_3 = 0, \quad \mathrm{B}_4 = -\tfrac{1}{30}, \quad \mathrm{B}_5 = 0,$$
$$\mathrm{B}_6 = \tfrac{1}{42}, \quad \mathrm{B}_7 = 0, \quad \mathrm{B}_8 = -\tfrac{1}{30}, \quad \mathrm{B}_9 = 0, \quad \mathrm{B}_{10} = \tfrac{5}{66}, \quad \mathrm{B}_{11} = 0, \ldots$$

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathrm{B}_k x^k$$

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{-x}{e^{-x} - 1} + \frac{-x}{2}$$

# Числа Бернулли

$$\mathrm{B}_0 = 1, \quad \mathrm{B}_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad \mathrm{B}_2 = \tfrac{1}{6}, \quad \mathrm{B}_3 = 0, \quad \mathrm{B}_4 = -\tfrac{1}{30}, \quad \mathrm{B}_5 = 0,$$
$$\mathrm{B}_6 = \tfrac{1}{42}, \quad \mathrm{B}_7 = 0, \quad \mathrm{B}_8 = -\tfrac{1}{30}, \quad \mathrm{B}_9 = 0, \quad \mathrm{B}_{10} = \tfrac{5}{66}, \quad \mathrm{B}_{11} = 0, \ldots$$

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathrm{B}_k x^k$$

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{-x}{e^{-x} - 1} + \frac{-x}{2}$$

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} \mathrm{B}_{2k} \pi^{2k}$$

# Числа Бернулли

$$\mathrm{B}_0 = 1, \quad \mathrm{B}_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad \mathrm{B}_2 = \tfrac{1}{6}, \quad \mathrm{B}_3 = 0, \quad \mathrm{B}_4 = -\tfrac{1}{30}, \quad \mathrm{B}_5 = 0,$$
$$\mathrm{B}_6 = \tfrac{1}{42}, \quad \mathrm{B}_7 = 0, \quad \mathrm{B}_8 = -\tfrac{1}{30}, \quad \mathrm{B}_9 = 0, \quad \mathrm{B}_{10} = \tfrac{5}{66}, \quad \mathrm{B}_{11} = 0, \ldots$$

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathrm{B}_k x^k$$

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{-x}{e^{-x} - 1} + \frac{-x}{2}$$

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} \mathrm{B}_{2k} \pi^{2k}$$

# Еще другие значения $\zeta(s)$

$$\zeta(0) \quad = \quad 1^0 + 2^0 + 3^0 + \cdots = 1 + 1 + 1 + \ldots$$

# Еще другие значения $\zeta(s)$

$$\zeta(0) \quad = \quad 1^0 + 2^0 + 3^0 + \cdots = 1 + 1 + 1 + \ldots = -\frac{1}{2}$$

## Еще другие значения $\zeta(s)$

$$\begin{aligned}
\zeta(0) &= 1^0 + 2^0 + 3^0 + \dots = 1 + 1 + 1 + \dots = -\frac{1}{2} \\
\zeta(-1) &= 1^1 + 2^1 + 3^1 + \dots = 1 + 2 + 3 + \dots
\end{aligned}$$

# Еще другие значения $\zeta(s)$

$$\begin{aligned}
\zeta(0) &= 1^0 + 2^0 + 3^0 + \cdots = 1 + 1 + 1 + \ldots = -\frac{1}{2} \\
\zeta(-1) &= 1^1 + 2^1 + 3^1 + \cdots = 1 + 2 + 3 + \ldots = -\frac{1}{12}
\end{aligned}$$

# Еще другие значения $\zeta(s)$

$$\begin{aligned}
\zeta(0) &= 1^0 + 2^0 + 3^0 + \cdots = 1 + 1 + 1 + \ldots = -\frac{1}{2} \\
\zeta(-1) &= 1^1 + 2^1 + 3^1 + \cdots = 1 + 2 + 3 + \ldots = -\frac{1}{12} \\
\zeta(-2) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots = 1 + 4 + 9 + \cdots =
\end{aligned}$$

# Еще другие значения $\zeta(s)$

$$
\begin{aligned}
\zeta(0) &= 1^0 + 2^0 + 3^0 + \dots = 1 + 1 + 1 + \dots = -\frac{1}{2} \\
\zeta(-1) &= 1^1 + 2^1 + 3^1 + \dots = 1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12} \\
\zeta(-2) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots = 1 + 4 + 9 + \dots = 0
\end{aligned}
$$

# Еще другие значения $\zeta(s)$

$$\begin{aligned}
\zeta(0) &= 1^0 + 2^0 + 3^0 + \cdots = 1 + 1 + 1 + \ldots = -\frac{1}{2} \\
\zeta(-1) &= 1^1 + 2^1 + 3^1 + \cdots = 1 + 2 + 3 + \ldots = -\frac{1}{12} \\
\zeta(-2) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots = 1 + 4 + 9 + \cdots = 0 \\
\zeta(-3) &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots = 1 + 8 + 27 + \ldots
\end{aligned}$$

# Еще другие значения $\zeta(s)$

$$
\begin{aligned}
\zeta(0) &= 1^0 + 2^0 + 3^0 + \cdots = 1 + 1 + 1 + \ldots = -\frac{1}{2} \\
\zeta(-1) &= 1^1 + 2^1 + 3^1 + \cdots = 1 + 2 + 3 + \ldots = -\frac{1}{12} \\
\zeta(-2) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots = 1 + 4 + 9 + \cdots = 0 \\
\zeta(-3) &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots = 1 + 8 + 27 + \ldots = \frac{1}{120}
\end{aligned}
$$

# Еще другие значения $\zeta(s)$

$$
\begin{aligned}
\zeta(0) &= 1^0 + 2^0 + 3^0 + \cdots = 1 + 1 + 1 + \ldots = -\frac{1}{2} \\
\zeta(-1) &= 1^1 + 2^1 + 3^1 + \cdots = 1 + 2 + 3 + \ldots = -\frac{1}{12} \\
\zeta(-2) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots = 1 + 4 + 9 + \cdots = 0 \\
\zeta(-3) &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots = 1 + 8 + 27 + \ldots = \frac{1}{120}
\end{aligned}
$$

# Еще другие значения $\zeta(s)$

$$\begin{aligned}
\zeta(0) &= 1^0 + 2^0 + 3^0 + \dots = 1 + 1 + 1 + \ldots = -\frac{1}{2} \\
\zeta(-1) &= 1^1 + 2^1 + 3^1 + \dots = 1 + 2 + 3 + \ldots = -\frac{1}{12} \\
\zeta(-2) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots = 1 + 4 + 9 + \dots = 0 \\
\zeta(-3) &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots = 1 + 8 + 27 + \ldots = \frac{1}{120}
\end{aligned}$$

# Функциональное уравнение

$$\zeta(-m) = -\frac{\mathrm{B}_{m+1}}{2m+2}$$

# Функциональное уравнение

$$\zeta(-m) = -\frac{\mathrm{B}_{m+1}}{2m+2} \qquad \zeta(2k) = (-1)^{k+1}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}\mathrm{B}_{2k}\pi^{2k}$$

# Функциональное уравнение

$$\zeta(-m) = -\frac{\mathrm{B}_{m+1}}{2m+2} \qquad \zeta(2k) = (-1)^{k+1}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}\mathrm{B}_{2k}\pi^{2k}$$

$$\zeta(1-2k) = (-1)^k 2^{1-2k}\pi^{-2k}(2k-1)!\zeta(2k)$$

# Функциональное уравнение

$$\zeta(-m) = -\frac{\mathrm{B}_{m+1}}{2m+2} \qquad \zeta(2k) = (-1)^{k+1}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}\mathrm{B}_{2k}\pi^{2k}$$

$$\zeta(1-2k) = (-1)^k 2^{1-2k}\pi^{-2k}(2k-1)!\zeta(2k)$$

# Дзета функция Римана

Ряд Дирихле:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$

# Дзета функция Римана

Ряд Дирихле:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$

Произведение Эйлера:

$$\zeta(z) = \prod_{p\text{ – простое}} \frac{1}{1 - p^{-z}}$$

# Дзета функция Римана

Ряд Дирихле:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$

Произведение Эйлера:

$$\zeta(z) = \prod_{p \text{ – простое}} \frac{1}{1 - p^{-z}}$$

Ряд и произведение сходятся при for $\Re(z) > 1$.

# Дзета функция Римана

Ряд Дирихле:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$

Произведение Эйлера:

$$\zeta(z) = \prod_{p\text{ – простое}} \frac{1}{1 - p^{-z}}$$

Ряд и произведение сходятся при for $\Re(z) > 1$.

Точка $z = 1$ является единственным полюсом $\zeta(z)$.

# Дзета функция Римана

Ряд Дирихле:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$

Произведение Эйлера:

$$\zeta(z) = \prod_{p\text{ – простое}} \frac{1}{1 - p^{-z}}$$

Ряд и произведение сходятся при for $\Re(z) > 1$.

Точка $z = 1$ является единственным полюсом $\zeta(z)$.

$$\zeta(1 - 2k) = (-1)^k 2^{1-2k} \pi^{-2k} (2k - 1)! \zeta(2k)$$

# Дзета функция Римана

Ряд Дирихле:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$

Произведение Эйлера:

$$\zeta(z) = \prod_{p\text{ – простое}} \frac{1}{1 - p^{-z}}$$

Ряд и произведение сходятся при for $\Re(z) > 1$.

Точка $z = 1$ является единственным полюсом $\zeta(z)$.

$$\zeta(1-2k) = (-1)^k 2^{1-2k} \pi^{-2k} (2k-1)! \zeta(2k)$$

$$\zeta(1-z) = \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) 2^{1-z} \pi^{-z} \Gamma(z) \zeta(z)$$

# Дзета функция Римана

Ряд Дирихле:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$

Произведение Эйлера:

$$\zeta(z) = \prod_{p \text{ -- простое}} \frac{1}{1 - p^{-z}}$$

Ряд и произведение сходятся при for $\Re(z) > 1$.

Точка $z = 1$ является единственным полюсом $\zeta(z)$.

$$\zeta(1 - 2k) = (-1)^k 2^{1-2k} \pi^{-2k} (2k - 1)! \zeta(2k)$$

$$\zeta(1 - z) = \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) 2^{1-z} \pi^{-z} \Gamma(z) \zeta(z)$$

# Распределение простых чисел

$\pi(x) =$ количество простых чисел, не больших $x$

# Распределение простых чисел

$$\pi(x) = \text{количество простых чисел, не больших } x$$

**Теорема (Jacques Hadamard, Charles de la Vallee Poussin (независимо), [1896]).**

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln(x)}$$

# Распределение простых чисел

$$\pi(x) = \text{количество простых чисел, не больших } x$$

**Теорема (Jacques Hadamard, Charles de la Vallee Poussin (независимо), [1896]).**

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln(x)}$$

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} \to_{x\to\infty} 1$$

# Распределение простых чисел

$$\pi(x) = \text{количество простых чисел, не больших } x$$

**Теорема (Jacques Hadamard, Charles de la Vallee Poussin (независимо), [1896]).**

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln(x)}$$

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} \to_{x\to\infty} 1$$

$$\pi(x) - \frac{x}{\ln(x)}$$

# Распределение простых чисел

$\pi(x) =$ количество простых чисел, не больших $x$

**Теорема (Jacques Hadamard, Charles de la Vallee Poussin (независимо), [1896]).**

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln(x)}$$

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} \to_{x\to\infty} 1$$

$$\pi(x) - \frac{x}{\ln(x)} \qquad \pi(x) - \int^{x} \frac{1}{\ln(t)} dt$$

# Функциия Чебышева $\psi(x)$

# Функциия Чебышева $\psi(x)$

$$\pi(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ – простое}}} 1 \qquad \psi(x) = \sum_{\substack{q \leq x \\ q \text{ – степень} \\ \text{простого } p}} \ln(p)$$

# Функциия Чебышева $\psi(x)$

$$\pi(x) = \sum_{\substack{p \le x \\ p \text{ – простое}}} 1 \qquad \psi(x) = \sum_{\substack{q \le x \\ q \text{ – степень} \\ \text{простого } p}} \ln(p) = \ln(\mathrm{LCM}(1, 2, ..., \lfloor x \rfloor))$$

# Функциия Чебышева $\psi(x)$

$$\pi(x) = \sum_{\substack{p \le x \\ p\text{ – простое}}} 1 \qquad \psi(x) = \sum_{\substack{q \le x \\ q\text{ – степень} \\ \text{простого } p}} \ln(p) = \ln(\mathrm{LCM}(1, 2, ..., \lfloor x \rfloor))$$

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \psi(x) \approx x$$

# Функцииия Чебышева $\psi(x)$

$$\pi(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p\text{ – простое}}} 1 \qquad \psi(x) = \sum_{\substack{q \leq x \\ q\text{ – степень} \\ \text{простого } p}} \ln(p)$$

$$= \ln(\mathrm{LCM}(1, 2, ..., \lfloor x \rfloor))$$

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \psi(x) \approx x$$

$$\pi(x) - \int^x \frac{1}{\ln(t)} dt \qquad \psi(x) - x$$

# Teopema von Mangoldt'a

# Теорема von Mangoldt'a

Точки $z_1 = -2,\ z_2 = -4,\ \ldots,\ z_k = -2k, \ldots$ являются *тривиальными* нулями $\zeta(z)$.

# Теорема von Mangoldt'a

Точки $z_1 = -2,\ z_2 = -4,\ \ldots,\ z_k = -2k, \ldots$ являются *тривиальными* нулями $\zeta(z)$.

**Теорема (von Mangoldt [1895]).**

$$\psi(x) - x = -\sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} + \sum_{n} \frac{x^{-2n}}{2n} - \ln(2\pi)$$

$$\zeta(\rho) = 0, \qquad \Im(\rho) \neq 0$$

# Теорема von Mangoldt'a

Точки $\mathrm{z}_1 = -2,\ \mathrm{z}_2 = -4,\ \ldots,\ \mathrm{z}_k = -2k, \ldots$ являются *тривиальными* нулями $\zeta(z)$.

**Теорема (von Mangoldt [1895]).**

$$\psi(x) - x = -\sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} + \sum_{n} \frac{x^{-2n}}{2n} - \ln(2\pi)$$

$$\zeta(\rho) = 0, \qquad \Im(\rho) \neq 0$$

# Гипотеза Римана

**Гипотеза Римана (версия 1).** *Все нетривиальные нули функции* $\zeta(z)$ *лежат на критической прямой* $\Re(z) = \frac{1}{2}$.

# Гипотеза Римана

**Гипотеза Римана (версия 1).** *Все нетривиальные нули функции $\zeta(z)$ лежат на критической прямой $\Re(z) = \frac{1}{2}$.*

**Гипотеза Римана (версия 2).**

$$\psi(x) - x = O(\sqrt{x}\ln(x)^2)$$

# Гипотеза Римана

**Гипотеза Римана (версия 1).** *Все нетривиальные нули функции* $\zeta(z)$ *лежат на критической прямой* $\Re(z) = \frac{1}{2}$.

**Гипотеза Римана (версия 2).**

$$\psi(x) - x = O(\sqrt{x}\ln(x)^2)$$

**Гипотеза Римана (версия 3).**

$$\pi(x) - \int^x \frac{1}{\ln(t)}dt = O(\sqrt{x}\ln(x))$$

# Гипотеза Римана

**Гипотеза Римана (версия 1).** *Все нетривиальные нули функции $\zeta(z)$ лежат на критической прямой $\Re(z) = \frac{1}{2}$.*

**Гипотеза Римана (версия 2).**

$$\psi(x) - x = O(\sqrt{x}\ln(x)^2)$$

**Гипотеза Римана (версия 3).**

$$\pi(x) - \int^{x} \frac{1}{\ln(t)}dt = O(\sqrt{x}\ln(x))$$

# Функция Римана $\xi(z)$

$$\zeta(1-z) = \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) 2^{1-z}\pi^{-z}\Gamma(z)\zeta(z)$$

# Функция Римана $\xi(z)$

$$\zeta(1-z) = \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) 2^{1-z}\pi^{-z}\Gamma(z)\zeta(z)$$

$$\xi(z) = \pi^{-\frac{z}{2}}(z-1)\Gamma(1+\tfrac{z}{2})\zeta(z)$$

# Функция Римана $\xi(z)$

$$\zeta(1-z) = \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) 2^{1-z}\pi^{-z}\Gamma(z)\zeta(z)$$

$$\xi(z) = \pi^{-\frac{z}{2}}(z-1)\Gamma(1+\tfrac{z}{2})\zeta(z)$$

$$\xi(1-z) = \xi(z)$$

# Функция Римана $\xi(z)$

$$\zeta(1-z) = \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) 2^{1-z}\pi^{-z}\Gamma(z)\zeta(z)$$

$$\xi(z) = \pi^{-\frac{z}{2}}(z-1)\Gamma(1+\tfrac{z}{2})\zeta(z)$$

$$\xi(1-z) = \xi(z)$$

Нулями функции $\xi(z)$ являются все нетривиальные нули функции $\zeta(z)$, и только они.

# Функция $\zeta^*(z)$

$$\xi(z) = \pi^{-\frac{z}{2}}(z-1)\Gamma(1+\tfrac{z}{2})\zeta(z)$$

# Функция $\zeta^*(z)$

$$\xi(z) = \pi^{-\frac{z}{2}}(z-1)\Gamma(1+\tfrac{z}{2})\zeta(z)$$

$$\xi(1-z) = \xi(z)$$

# Функция $\zeta^*(z)$

$$\xi(z) = \pi^{-\frac{z}{2}}(z-1)\Gamma(1+\tfrac{z}{2})\zeta(z)$$

$$\xi(1-z) = \xi(z)$$

# Функция $\zeta^*(z)$

$$\xi(z) = \pi^{-\frac{z}{2}}(z-1)\Gamma(1+\tfrac{z}{2})\zeta(z)$$

$$\xi(1-z) = \xi(z)$$

$$\zeta^*(z) = 2(z-1)\zeta(z)$$

# Функция $\zeta^*(z)$

$$\xi(z) = \pi^{-\frac{z}{2}}(z-1)\Gamma(1+\tfrac{z}{2})\zeta(z)$$

$$\xi(1-z) = \xi(z)$$

$$\zeta^*(z) = 2(z-1)\zeta(z) \qquad \zeta^*(0) = 1$$

# Функция $\zeta^*(z)$

$$\xi(z) = \pi^{-\frac{z}{2}}(z-1)\Gamma(1+\tfrac{z}{2})\zeta(z)$$

$$\xi(1-z) = \xi(z)$$

$$\zeta^*(z) = 2(z-1)\zeta(z) \qquad \zeta^*(0) = 1$$

**Гипотеза Римана (версия 4).** *Тривиальные нули* $\mathrm{z}_1 = -2,\ \mathrm{z}_2 = -4,\ \dots,\ \mathrm{z}_k = -2k, \dots$ *являются единственными нулями функции* $\zeta^*(z)$*, лежащими в полуплоскости* $\Re(z) < \frac{1}{2}$.

# Функция $\zeta^*(z)$

$$\xi(z) = \pi^{-\frac{z}{2}}(z-1)\Gamma(1+\tfrac{z}{2})\zeta(z)$$

$$\xi(1-z) = \xi(z)$$

$$\zeta^*(z) = 2(z-1)\zeta(z) \qquad \zeta^*(0) = 1$$

**Гипотеза Римана (версия 4).** *Тривиальные нули* $\mathrm{z}_1 = -2,\ \mathrm{z}_2 = -4,\ \ldots,\ \mathrm{z}_k = -2k, \ldots$ *являются единственными нулями функции* $\zeta^*(z)$*, лежащими в полуплоскости* $\Re(z) < \frac{1}{2}$.

# Функция $\tilde{\zeta}(w)$

$$\zeta^*(z) = 2(z-1)\zeta(z)$$

# Функция $\tilde{\zeta}(w)$

$$\zeta^*(z) = 2(z-1)\zeta(z)$$

$$w = \frac{z}{1-z}$$

# Функция $\tilde{\zeta}(w)$

$$\zeta^*(z) = 2(z-1)\zeta(z)$$

$$w = \frac{z}{1-z} \qquad\qquad z = \frac{w}{w+1}$$

# Функция $\tilde{\zeta}(w)$

$$\zeta^*(z) = 2(z-1)\zeta(z)$$

$$w = \frac{z}{1-z} \qquad\qquad z = \frac{w}{w+1}$$

$$\tilde{\zeta}(w) = \zeta^*(\tfrac{w}{w+1})$$

# Функция $\tilde{\zeta}(w)$

$$\zeta^*(z) = 2(z-1)\zeta(z)$$

$$w = \frac{z}{1-z} \qquad\qquad z = \frac{w}{w+1}$$

$$\tilde{\zeta}(w) = \zeta^*(\tfrac{w}{w+1})$$

$$\mathrm{z}_1 = -2,\ \mathrm{z}_2 = -4,\ \ldots,\ \mathrm{z}_k = -2k, \ldots$$

# Функция $\tilde{\zeta}(w)$

$$\zeta^*(z) = 2(z-1)\zeta(z)$$

$$w = \frac{z}{1-z} \qquad\qquad z = \frac{w}{w+1}$$

$$\tilde{\zeta}(w) = \zeta^*(\tfrac{w}{w+1})$$

$$\mathrm{z}_1 = -2,\ \mathrm{z}_2 = -4,\ \dots,\ \mathrm{z}_k = -2k, \dots$$

$$\mathrm{w}_1 = \frac{\mathrm{z}_1}{1-\mathrm{z}_1} = -\frac{2}{3},\ \mathrm{w}_2 = \frac{\mathrm{z}_2}{1-\mathrm{z}_2} = -\frac{4}{5}, \dots, \mathrm{w}_k = \frac{\mathrm{z}_k}{1-\mathrm{z}_k} = -\frac{2k}{2k+1}, \dots$$

# Функция $\tilde{\zeta}(w)$

$$\zeta^*(z) = 2(z-1)\zeta(z)$$

$$w = \frac{z}{1-z} \qquad\qquad z = \frac{w}{w+1}$$

$$\tilde{\zeta}(w) = \zeta^*(\tfrac{w}{w+1})$$

$$\mathrm{z}_1 = -2,\ \mathrm{z}_2 = -4,\ \ldots,\ \mathrm{z}_k = -2k, \ldots$$

$$\mathrm{w}_1 = \frac{\mathrm{z}_1}{1-\mathrm{z}_1} = -\frac{2}{3},\ \mathrm{w}_2 = \frac{\mathrm{z}_2}{1-\mathrm{z}_2} = -\frac{4}{5}, \ldots, \mathrm{w}_k = \frac{\mathrm{z}_k}{1-\mathrm{z}_k} = -\frac{2k}{2k+1}, \ldots$$

# Функция $\tilde{\zeta}(w)$

$$\zeta^*(z) = 2(z-1)\zeta(z)$$

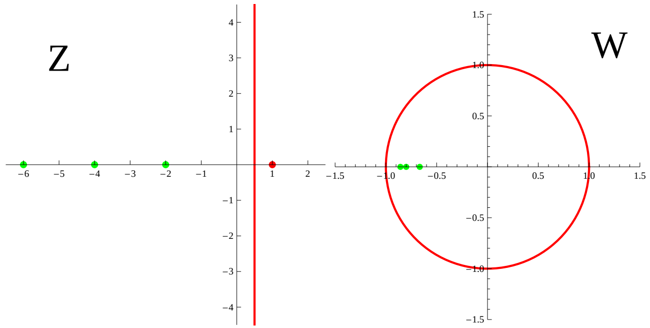
$$w = \frac{z}{1-z} \qquad\qquad z = \frac{w}{w+1}$$

$$\tilde{\zeta}(w) = \zeta^*(\tfrac{w}{w+1})$$

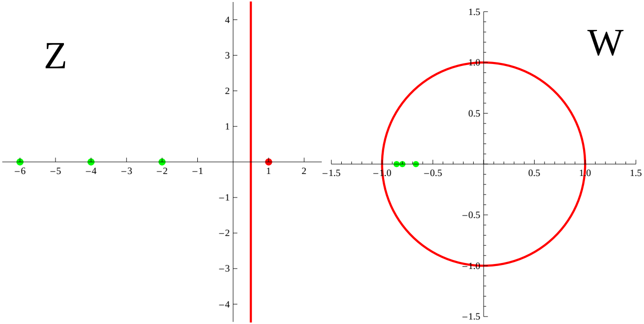
$$\mathrm{z}_1 = -2,\ \mathrm{z}_2 = -4,\ \ldots,\ \mathrm{z}_k = -2k, \ldots$$

$$\mathrm{w}_1 = \frac{\mathrm{z}_1}{1-\mathrm{z}_1} = -\frac{2}{3},\ \mathrm{w}_2 = \frac{\mathrm{z}_2}{1-\mathrm{z}_2} = -\frac{4}{5}, \ldots, \mathrm{w}_k = \frac{\mathrm{z}_k}{1-\mathrm{z}_k} = -\frac{2k}{2k+1}, \ldots$$

# Замена переменной

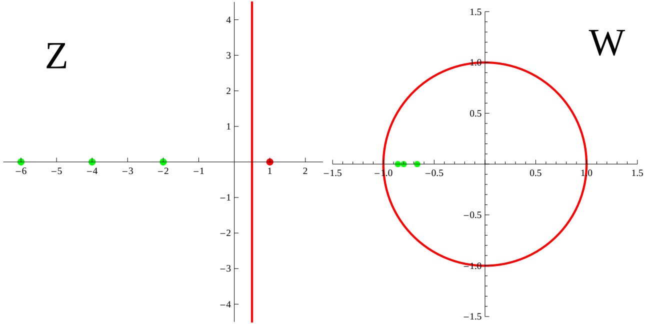


# Замена переменной

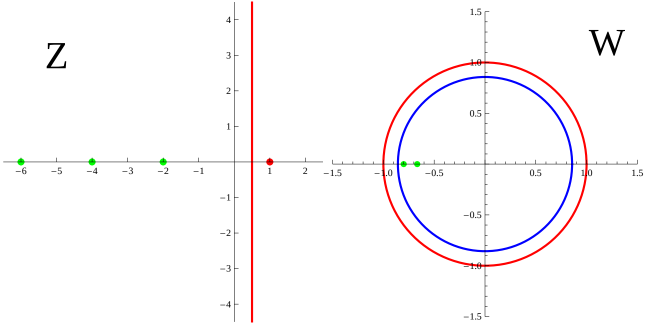



**Гипотеза Римана (версия 5).** *Тривиальные нули* $\mathrm{w}_1 = -\frac{2}{3}, \mathrm{w}_2 = -\frac{4}{5}, \ldots, \mathrm{w}_k = -\frac{2k}{2k+1}, \ldots$ *являются единственными нулями функции* $\tilde{\zeta}(w)$*, лежащими в открытом круге* $|w| < 1$.

# Подгипотезы

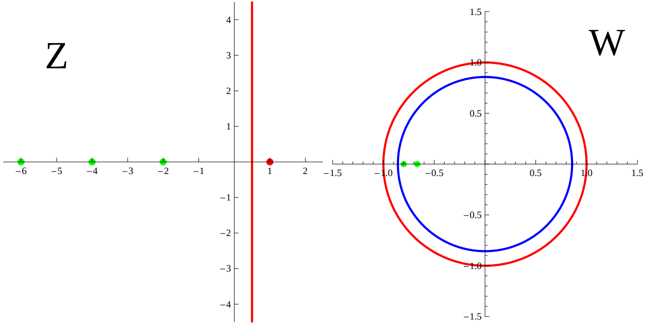


# Подгипотезы




**RH$_k$, $k$-я подгипотеза (версия 1).** *Тривиальные нули* $\mathrm{w}_1 = -\frac{2}{3}, \mathrm{w}_2 = -\frac{4}{5}, \ldots, \mathrm{w}_k = -\frac{2k}{2k+1}$ *являются единственными нулями функции* $\tilde{\zeta}(w)$*, лежащими в замкнутом круге* $|w| \leq \frac{2k+1}{2k+2}$.

# Подгипотезы




**RH$_k$, $k$-я подгипотеза (версия 1).** *Тривиальные нули* $\mathrm{w}_1 = -\frac{2}{3}, \mathrm{w}_2 = -\frac{4}{5}, \ldots, \mathrm{w}_k = -\frac{2k}{2k+1}$ *являются единственными нулями функции* $\tilde{\zeta}(w)$, *лежащими в замкнутом круге* $|w| \leq \frac{2k+1}{2k+2}$.

**Гипотеза Римана (версия 6).** *Подгипотеза* $\mathrm{RH}_k$ *верна для* $k = 1, 2, \ldots$:

$$\mathrm{RH} \Leftrightarrow \mathrm{RH}_1 \,\&\, \mathrm{RH}_2 \,\&\, \mathrm{RH}_3 \ldots$$

# Приближения Padé

$$\tilde{\zeta}(w) \approx \frac{P_{k,m}(w)}{Q_{k,m}(w)}$$

# Приближения Padé

$$\tilde{\zeta}(w) \approx \frac{P_{k,m}(w)}{Q_{k,m}(w)} \quad = \quad \frac{1 + p_{k,m,1}w + \cdots + p_{k,m,k}w^k}{1 + q_{k,m,1}w + \cdots + q_{k,m,m}w^m}$$

# Приближения Padé

$$\begin{aligned}
\tilde{\zeta}(w) \approx \frac{P_{k,m}(w)}{Q_{k,m}(w)} &= \frac{1 + p_{k,m,1}w + \cdots + p_{k,m,k}w^k}{1 + q_{k,m,1}w + \cdots + q_{k,m,m}w^m} \\
&= \tilde{\zeta}(w) + O(w^{k+m+1})
\end{aligned}$$

# Приближения Padé

$$\tilde{\zeta}(w) \approx \frac{P_{k,m}(w)}{Q_{k,m}(w)} = \frac{1 + p_{k,m,1}w + \cdots + p_{k,m,k}w^k}{1 + q_{k,m,1}w + \cdots + q_{k,m,m}w^m}$$

$$= \tilde{\zeta}(w) + O(w^{k+m+1})$$

# Приближения Padé

$$\tilde{\zeta}(w) \approx \frac{P_{k,m}(w)}{Q_{k,m}(w)} \quad = \quad \frac{1 + p_{k,m,1}w + \cdots + p_{k,m,k}w^k}{1 + q_{k,m,1}w + \cdots + q_{k,m,m}w^m}$$

# Приближения Padé

$$\tilde{\zeta}(w) \approx \frac{P_{k,m}(w)}{Q_{k,m}(w)} \quad = \quad \frac{1 + p_{k,m,1}w + \cdots + p_{k,m,k}w^k}{1 + q_{k,m,1}w + \cdots + q_{k,m,m}w^m}$$

**Следствия теоремы de Montessue [1902]:**

$$\mathrm{RH}_k \implies P_{k,m} \to \prod_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{w}{\mathrm{w}_j}\right) \text{ при } m \to \infty$$

# Приближения Padé

$$\tilde{\zeta}(w) \approx \frac{P_{k,m}(w)}{Q_{k,m}(w)} \quad = \quad \frac{1 + p_{k,m,1}w + \cdots + p_{k,m,k}w^k}{1 + q_{k,m,1}w + \cdots + q_{k,m,m}w^m}$$

**Следствия теоремы de Montessue [1902]:**

$$\mathrm{RH}_k \implies P_{k,m} \to \prod_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{w}{\mathrm{w}_j}\right) \text{ при } m \to \infty$$

$$\mathrm{RH}_k \implies p_{k,m,k} \to \prod_{j=1}^{k}\left(-\frac{1}{\mathrm{w}_j}\right) = \prod_{j=1}^{k}\frac{2j+1}{2j}$$

# Приближения Padé

$$\tilde{\zeta}(w) \approx \frac{P_{k,m}(w)}{Q_{k,m}(w)} \quad = \quad \frac{1 + p_{k,m,1}w + \cdots + p_{k,m,k}w^k}{1 + q_{k,m,1}w + \cdots + q_{k,m,m}w^m}$$

**Следствия теоремы de Montessue [1902]:**

$$\mathrm{RH}_k \implies P_{k,m} \to \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{w}{\mathrm{w}_j}\right) \text{ при } m \to \infty$$

$$\mathrm{RH}_k \implies p_{k,m,k} \to \prod_{j=1}^{k} \left(-\frac{1}{\mathrm{w}_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} \frac{2j+1}{2j}$$

# Слабые подгипотезы

**Подгипотеза $\mathrm{RH}_k^{\mathrm{w}}$, ослабленный вариант $\mathrm{RH}_k$ (версия 1).**
*При* $m \to \infty$

$$p_{k,m,k} \to \prod_{j=1}^{k} \left( -\frac{1}{\mathrm{w}_j} \right) = \prod_{j=1}^{k} \frac{2j+1}{2j}$$

# Слабые подгипотезы

**Подгипотеза $\mathrm{RH}^{\mathrm{w}}_{k}$, ослабленный вариант $\mathrm{RH}_{k}$ (версия 1).** *При* $m \to \infty$

$$p_{k,m,k} \to \prod_{j=1}^{k} \left( -\frac{1}{\mathrm{w}_j} \right) = \prod_{j=1}^{k} \frac{2j+1}{2j}$$

**Гипотеза Римана (версия 7).** *Подгипотеза* $\mathrm{RH}^{\mathrm{w}}_{k}$ *верна для* $k = 1, 2, \ldots$:

$$\mathrm{RH} \Leftrightarrow \mathrm{RH}^{\mathrm{w}}_{1} \,\&\, \mathrm{RH}^{\mathrm{w}}_{2} \,\&\, \mathrm{RH}^{\mathrm{w}}_{3} \ldots$$

# Слабые подгипотезы

**Подгипотеза $\mathrm{RH}_k^{\mathrm{w}}$, ослабленный вариант $\mathrm{RH}_k$ (версия 1).** *При $m \to \infty$*

$$p_{k,m,k} \to \prod_{j=1}^{k} \left( -\frac{1}{\mathrm{w}_j} \right) = \prod_{j=1}^{k} \frac{2j+1}{2j}$$

**Гипотеза Римана (версия 7).** *Подгипотеза $\mathrm{RH}_k^{\mathrm{w}}$ верна для $k = 1, 2, \dots$:*

$$\mathrm{RH} \Leftrightarrow \mathrm{RH}_1^{\mathrm{w}} \,\&\, \mathrm{RH}_2^{\mathrm{w}} \,\&\, \mathrm{RH}_3^{\mathrm{w}} \dots$$

# Определители

$$\frac{P_{k,m}(z)}{Q_{k,m}(z)} \quad = \quad \frac{1 + p_{k,m,1}w + \cdots + p_{k,m,k}w^k}{1 + q_{k,m,1}w + \cdots + q_{k,m,m}w^m} = \tilde{\zeta}(w) + O(w^{k+m+1})$$

# Определители

$$\frac{P_{k,m}(z)}{Q_{k,m}(z)} = \frac{1 + p_{k,m,1}w + \cdots + p_{k,m,k}w^k}{1 + q_{k,m,1}w + \cdots + q_{k,m,m}w^m} = \tilde{\zeta}(w) + O(w^{k+m+1})$$

**Теорема (C. G. J. Jacobi [1846]).**

$$p_{k,m,k} = \frac{\det(L_{k,m+1})}{\det(L_{k,m})}$$

где

$$L_{k,m} = \begin{pmatrix} \theta_k & \theta_{k-1} & \dots & \theta_{k-m+1} \\ \theta_{k+1} & \theta_k & \dots & \theta_{k-m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{k+m-1} & \theta_{k+m-2} & \dots & \theta_k \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\zeta}(w) = 1 + \theta_1 w + \cdots + \theta_k w^k + \dots \qquad \theta_j = 0 \text{ при } j < 0$$

# Определители

$$\frac{P_{k,m}(z)}{Q_{k,m}(z)} = \frac{1 + p_{k,m,1}w + \cdots + p_{k,m,k}w^k}{1 + q_{k,m,1}w + \cdots + q_{k,m,m}w^m} = \tilde{\zeta}(w) + O(w^{k+m+1})$$

**Теорема (C. G. J. Jacobi [1846]).**

$$p_{k,m,k} = \frac{\det(L_{k,m+1})}{\det(L_{k,m})}$$

где

$$L_{k,m} = \begin{pmatrix} \theta_k & \theta_{k-1} & \dots & \theta_{k-m+1} \\ \theta_{k+1} & \theta_k & \dots & \theta_{k-m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{k+m-1} & \theta_{k+m-2} & \dots & \theta_k \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\zeta}(w) = 1 + \theta_1 w + \cdots + \theta_k w^k + \dots \qquad \theta_j = 0 \text{ при } j < 0$$

# Рост определителей

$$\frac{\det(L_{k,m+1})}{\det(L_{k,m})} = p_{k,m,k}$$

# Рост определителей

$$\frac{\det(L_{k,m+1})}{\det(L_{k,m})} = p_{k,m,k} \to \prod_{j=1}^{k} \frac{2j+1}{2j}$$

# Рост определителей

$$\frac{\det(L_{k,m+1})}{\det(L_{k,m})} = p_{k,m,k} \to \prod_{j=1}^{k} \frac{2j+1}{2j}$$

$\det(L_{k,1}), \det(L_{k,2,}), \ldots \det(L_{k,m}), \ldots$ – это примерно геометрическая прогрессия

# Рост определителей

$$\frac{\det(L_{k,m+1})}{\det(L_{k,m})} = p_{k,m,k} \to \prod_{j=1}^{k} \frac{2j+1}{2j}$$

$\det(L_{k,1}), \det(L_{k,2,}), \ldots \det(L_{k,m}), \ldots$ – это примерно геометрическая прогрессия

**Подгипотеза $\mathrm{RH}_k^{\mathrm{w}}$ (версия 2).** *При* $m \to \infty$

$$\left(\det(L_{k,m})\right)^{\frac{1}{m}} \to \prod_{j=1}^{k} \frac{2j+1}{2j}.$$

# Рост определителей

$$\frac{\det(L_{k,m+1})}{\det(L_{k,m})} = p_{k,m,k} \to \prod_{j=1}^{k} \frac{2j+1}{2j}$$

$\det(L_{k,1}), \det(L_{k,2,}), \ldots \det(L_{k,m}), \ldots$ – это примерно геометрическая прогрессия

**Подгипотеза $\mathrm{RH}_k^{\mathrm{w}}$ (версия 2).** *При* $m \to \infty$

$$\left(\det(L_{k,m})\right)^{\frac{1}{m}} \to \prod_{j=1}^{k} \frac{2j+1}{2j}.$$

# Собственные числа

$$\det(L_{k,m}) = \lambda_{k,m,1}\lambda_{k,m,2}\ldots\lambda_{k,m,m},$$

где $\lambda_{k,m,1}, \lambda_{k,m,2}, \ldots, \lambda_{k,m,m}$ – собственные числа матрицы $L_{k,m}$

# Собственные числа

$$\det(L_{k,m}) = \lambda_{k,m,1}\lambda_{k,m,2}\ldots\lambda_{k,m,m},$$

где $\lambda_{k,m,1}, \lambda_{k,m,2}, \ldots, \lambda_{k,m,m}$ – собственные числа матрицы $L_{k,m}$

**Подгипотеза $\mathrm{RH}_k^{\mathrm{w}}$ (версия 3).** *При $m \to \infty$*

$$\left(\prod_{n=1}^{m} \lambda_{k,m,n}\right)^{\frac{1}{m}} \to \prod_{j=1}^{k} \frac{2j+1}{2j}.$$

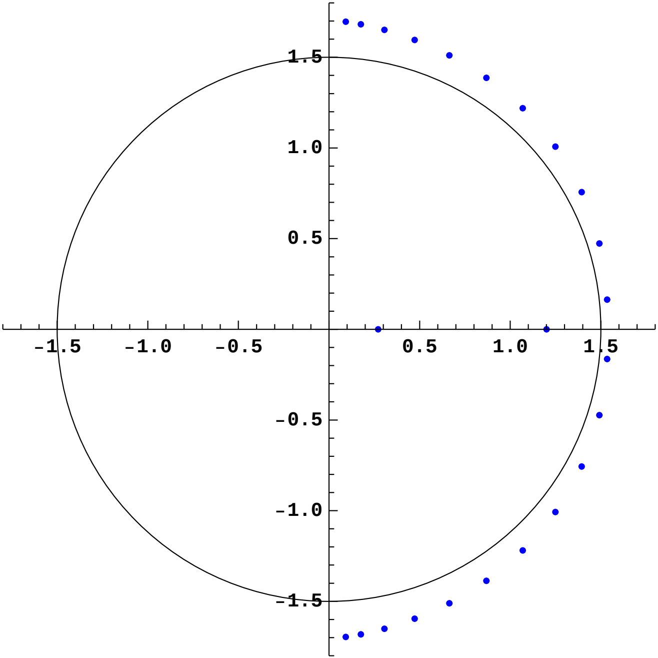
# Собственные числа

$$\det(L_{k,m}) = \lambda_{k,m,1}\lambda_{k,m,2}\ldots\lambda_{k,m,m},$$

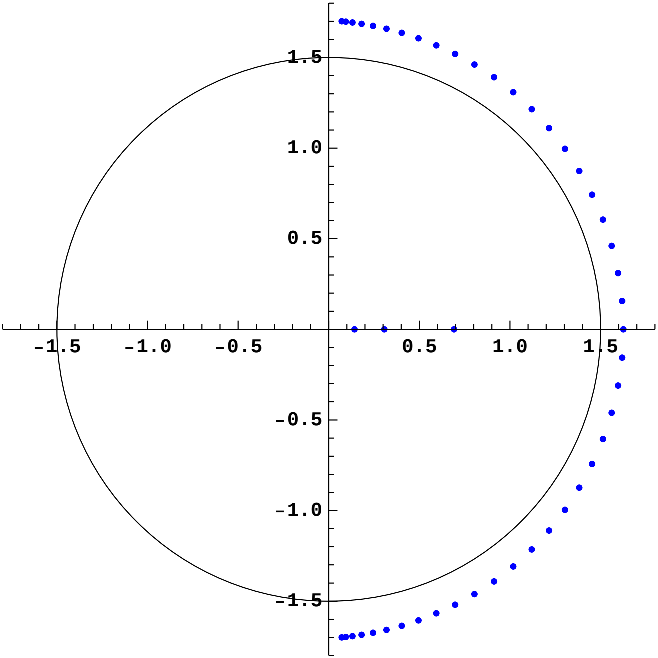
где $\lambda_{k,m,1}, \lambda_{k,m,2}, \ldots, \lambda_{k,m,m}$ – собственные числа матрицы $L_{k,m}$

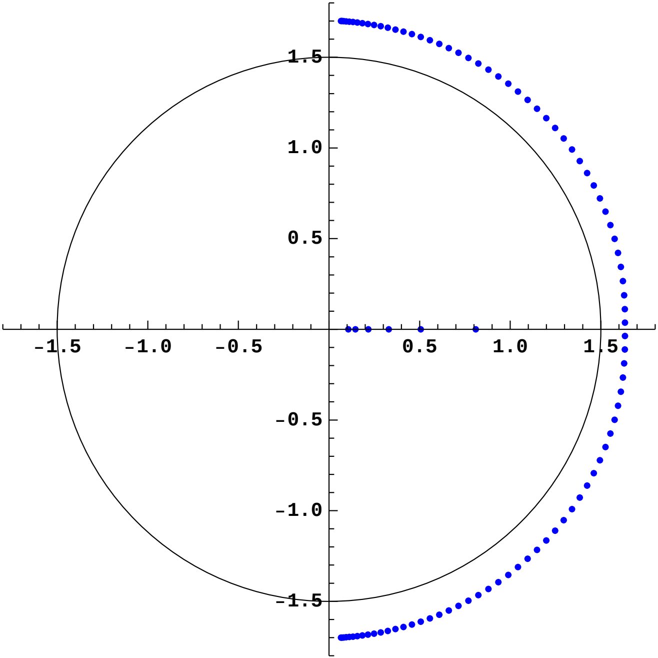
**Подгипотеза $\mathrm{RH}_k^{\mathrm{w}}$ (версия 3).** *При $m \to \infty$*

$$\left(\prod_{n=1}^{m} \lambda_{k,m,n}\right)^{\frac{1}{m}} \to \prod_{j=1}^{k} \frac{2j+1}{2j}.$$

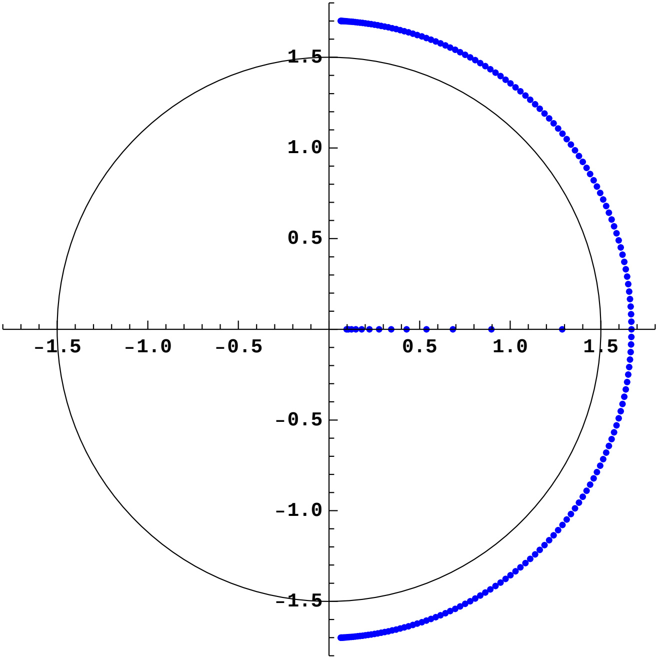


1.5
1.0
0.5
-1.5
-1.0
-0.5
0.5
1.0
1.5
-0.5
-1.0
-1.5


1.5
1.0
0.5
-0.5
-1.0
-1.5
-1.5
-1.0
-0.5
0.5
1.0
1.5



1.5
1.0
0.5
-0.5
-1.0
-1.5
-1.5
-1.0
-0.5
0.5
1.0
1.5


1.5
1.0
0.5
-0.5
-1.0
-1.5
-1.5
-1.0
-0.5
0.5
1.0
1.5

См. Анимация 1

# Только тривиальные нули

$$\zeta_{\mathrm{T}}(z) \quad = \quad \frac{\zeta^*(z)}{2\xi(z)}$$

# Только тривиальные нули

$$\zeta_{\mathrm{T}}(z) \quad = \quad \frac{\zeta^*(z)}{2\xi(z)} = \frac{\pi^{\frac{z}{2}}}{\Gamma(1+\frac{z}{2})}$$

# Только тривиальные нули

$$\zeta_{\mathrm{T}}(z) \quad = \quad \frac{\zeta^*(z)}{2\xi(z)} = \frac{\pi^{\frac{z}{2}}}{\Gamma(1+\frac{z}{2})} \qquad \zeta_{\mathrm{T}}(0) = 1$$

# Только тривиальные нули

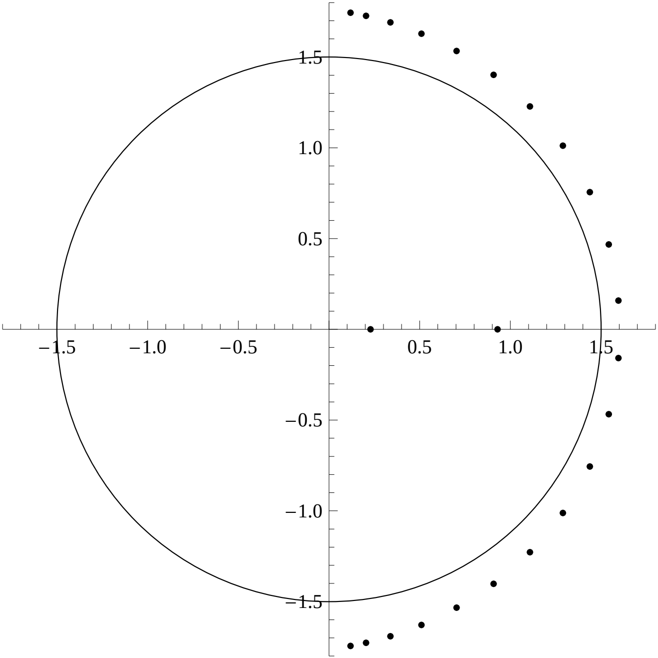
$$\zeta_{\mathrm{T}}(z) \quad = \quad \frac{\zeta^*(z)}{2\xi(z)} = \frac{\pi^{\frac{z}{2}}}{\Gamma(1+\frac{z}{2})} \qquad \zeta_{\mathrm{T}}(0) = 1$$

$$\tilde{\zeta}_{\mathrm{T}}(w) = \zeta_{\mathrm{T}}\left(\tfrac{w}{1+w}\right)$$

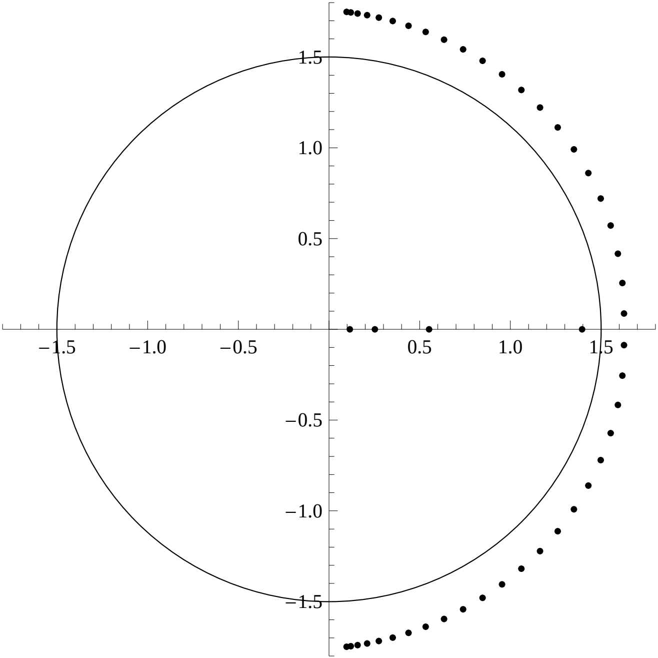
# Только тривиальные нули

$$\zeta_{\mathrm{T}}(z) \quad = \quad \frac{\zeta^*(z)}{2\xi(z)} = \frac{\pi^{\frac{z}{2}}}{\Gamma(1+\frac{z}{2})} \qquad \zeta_{\mathrm{T}}(0) = 1$$

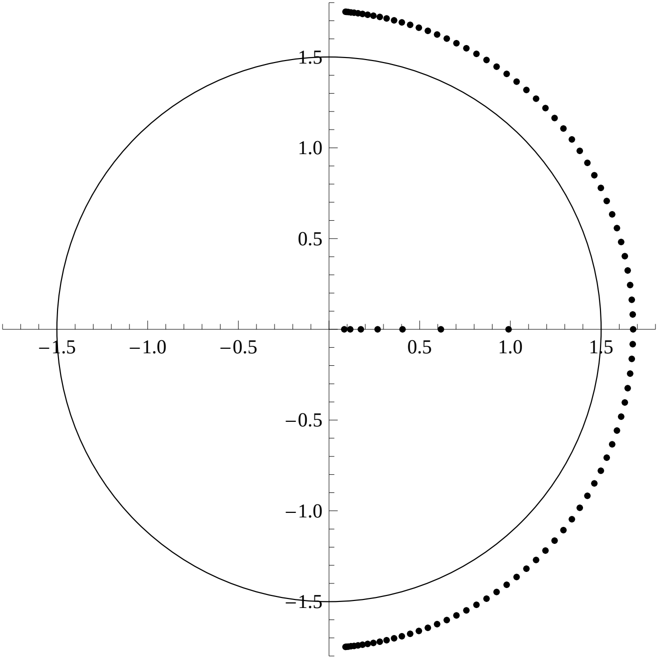
$$\tilde{\zeta}_{\mathrm{T}}(w) = \zeta_{\mathrm{T}}\left(\tfrac{w}{1+w}\right)$$

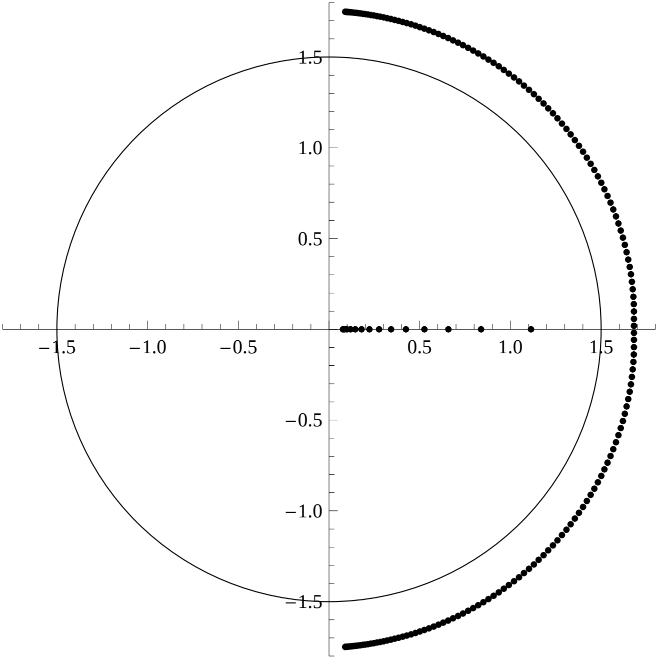


1.5
1.0
0.5
−1.5
−1.0
−0.5
0.5
1.0
1.5
−0.5
−1.0
−1.5

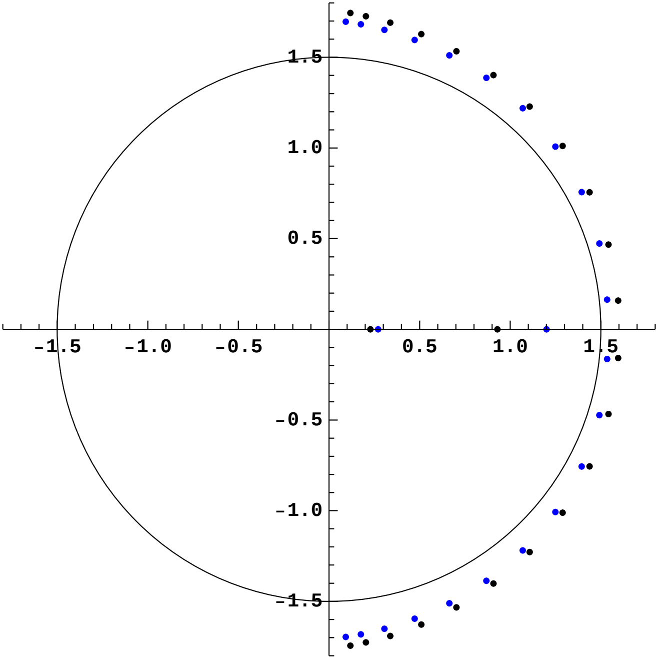


1.5
1.0
0.5
−0.5
−1.0
−1.5
−1.5
−1.0
−0.5
0.5
1.0
1.5

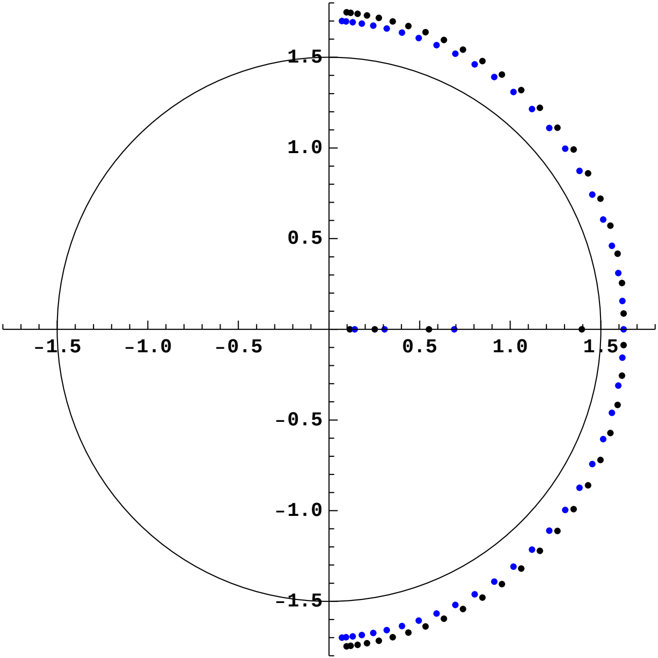

1.5
1.0
0.5
−0.5
−1.0
−1.5
−1.5
−1.0
−0.5
0.5
1.0
1.5



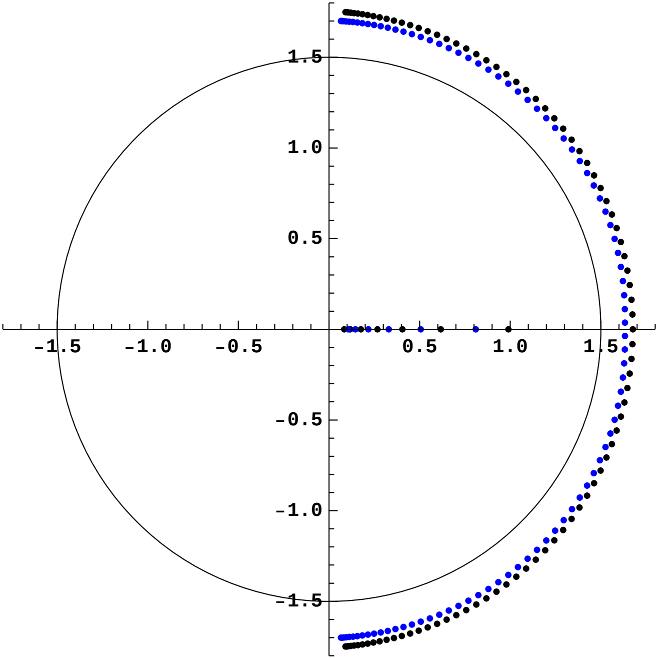
1.5
1.0
0.5
−0.5
−1.0
−1.5
−1.5
−1.0
−0.5
0.5
1.0
1.5



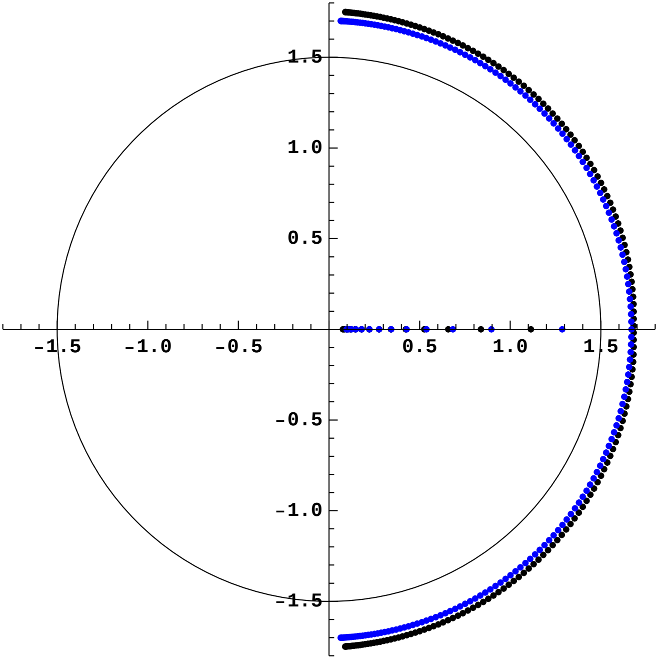
1.5
1.0
0.5
-1.5
-1.0
-0.5
0.5
1.0
1.5
-0.5
-1.0
-1.5

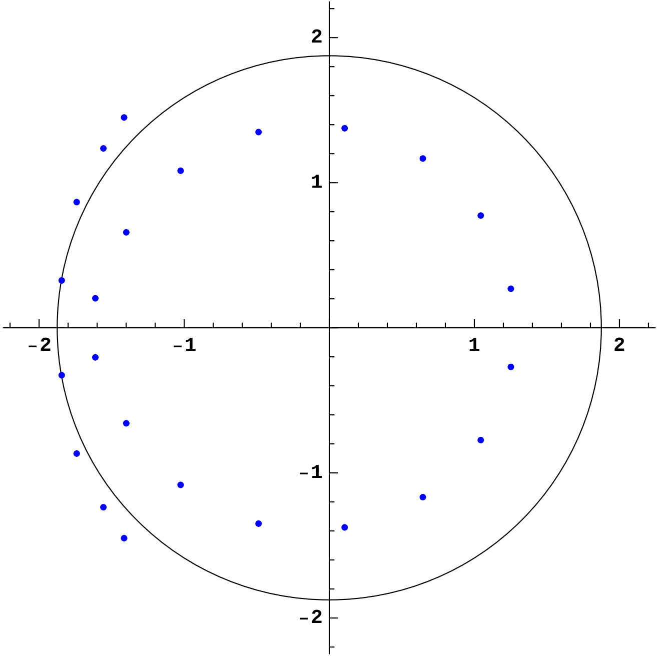


1.5
1.0
0.5
-0.5
-1.0
-1.5
-1.5
-1.0
-0.5
0.5
1.0
1.5

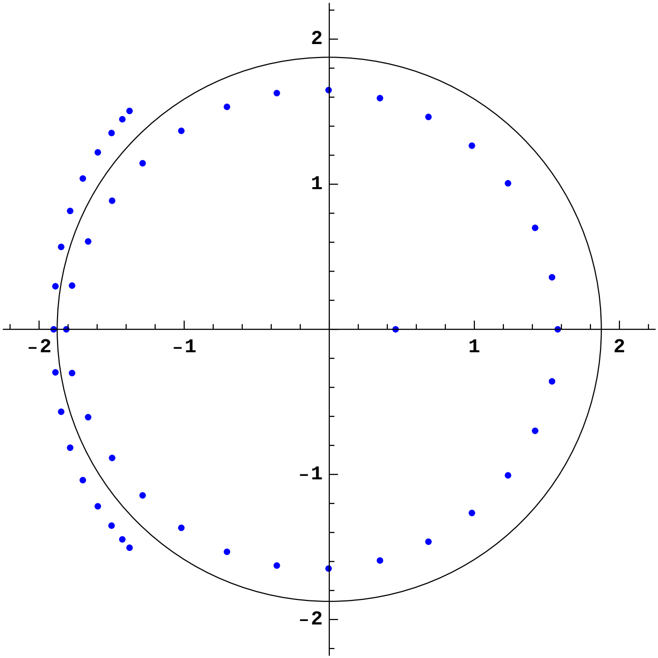


1.5
1.0
0.5
-0.5
-1.0
-1.5
-1.5
-1.0
-0.5
0.5
1.0
1.5

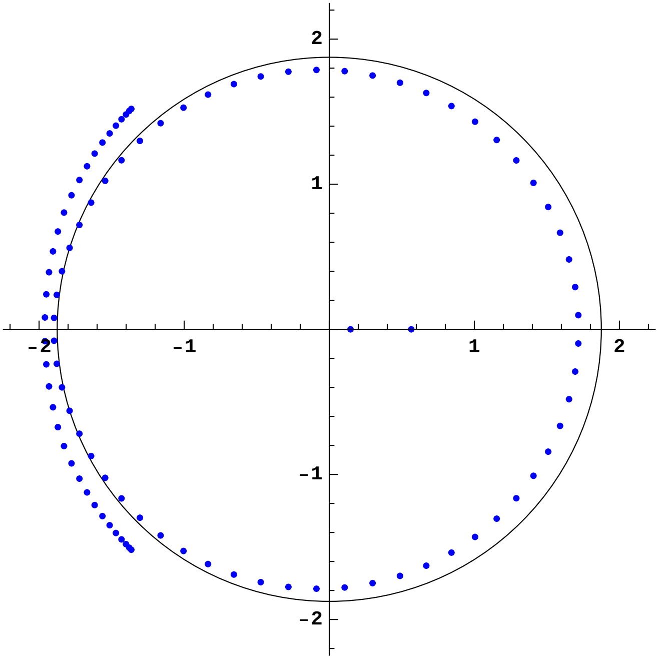

1.5
1.0
0.5
-1.5
-1.0
-0.5
0.5
1.0
1.5
-0.5
-1.0
-1.5



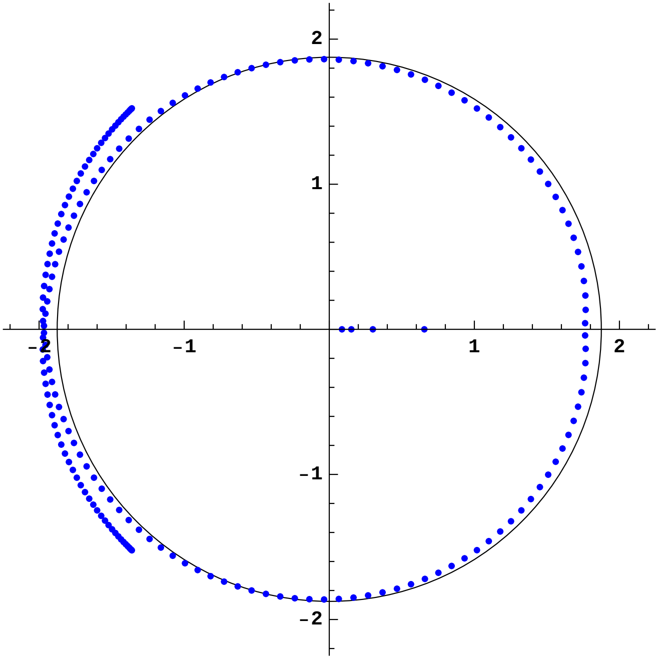
2
1
-2
-1
1
2
-1
-2



2
1
-2
-1
1
2
-1
-2

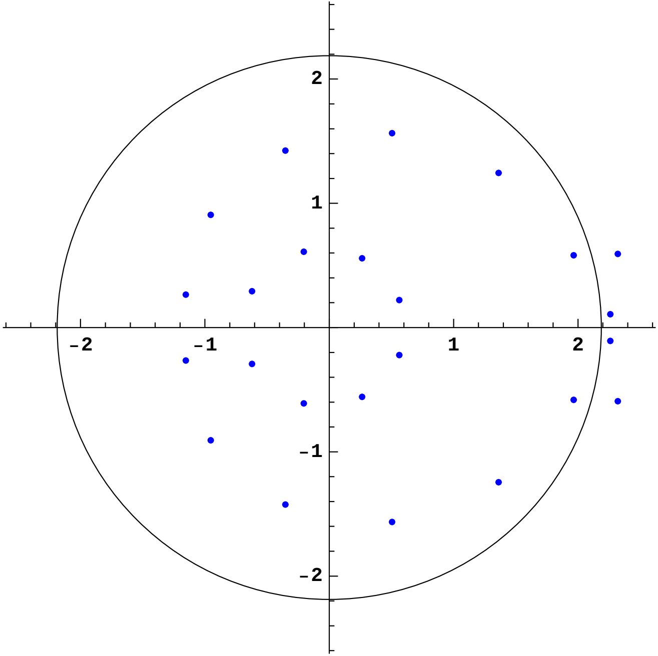


2
1
-1
-2
-2
-1
1
2

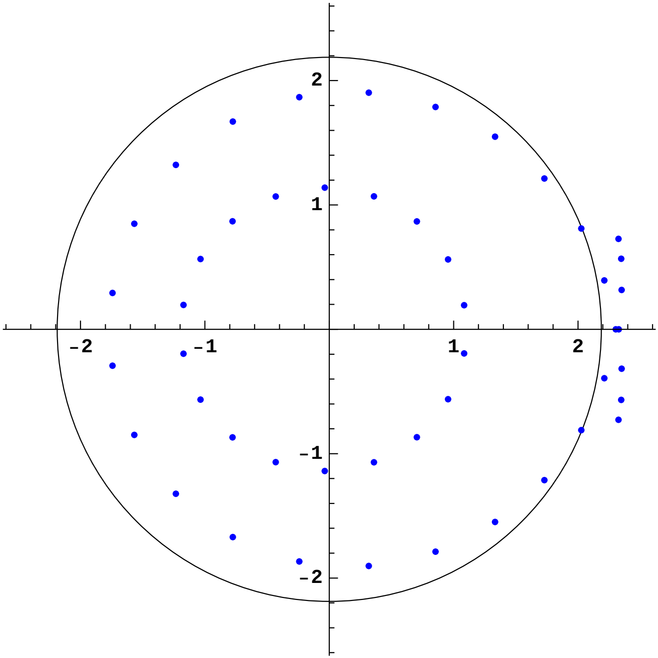


2
1
-2
-1
1
2
-1
-2

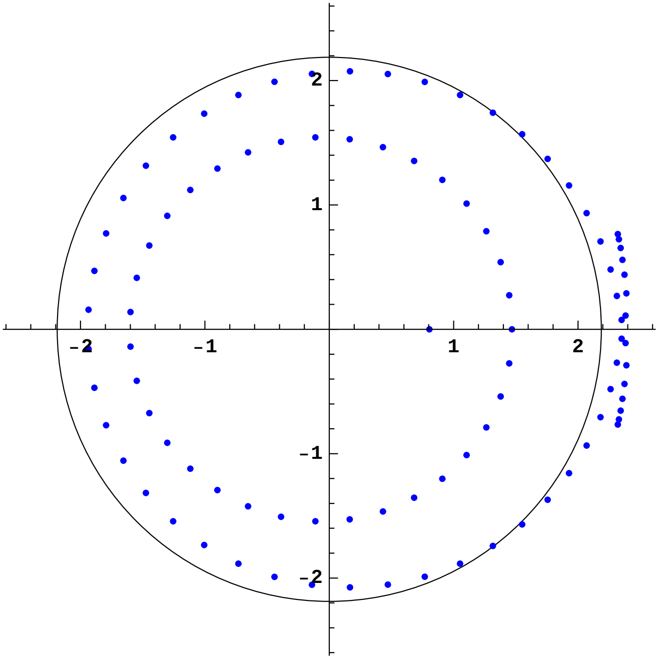
См. Анимация 2



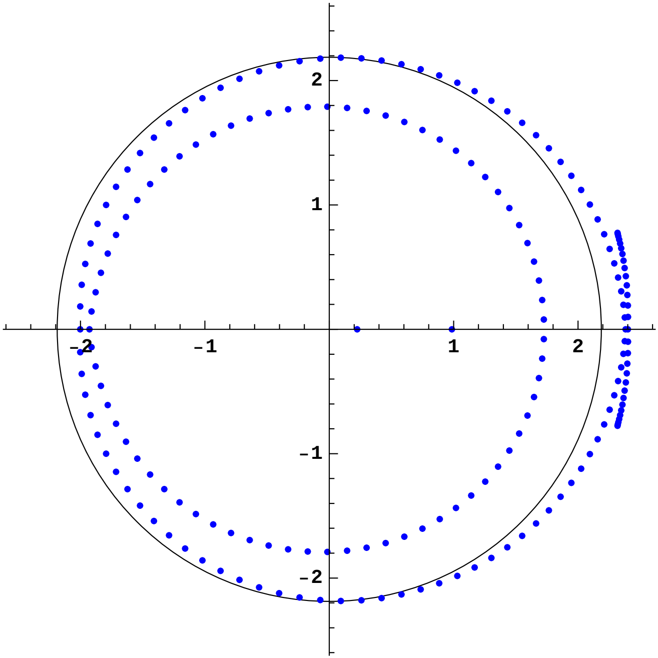
2
1
-2
-1
1
2
-1
-2



2
1
-1
-2
-2
-1
1
2

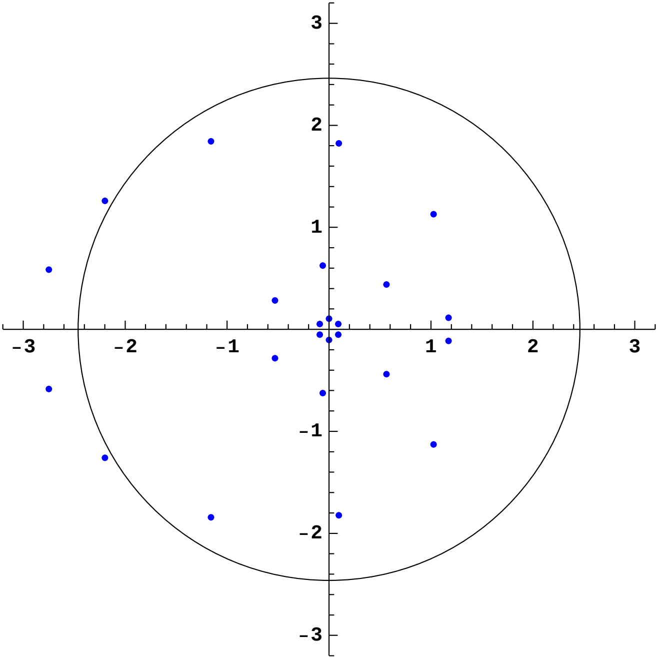


2
1
-1
-2
-2
-1
1
2

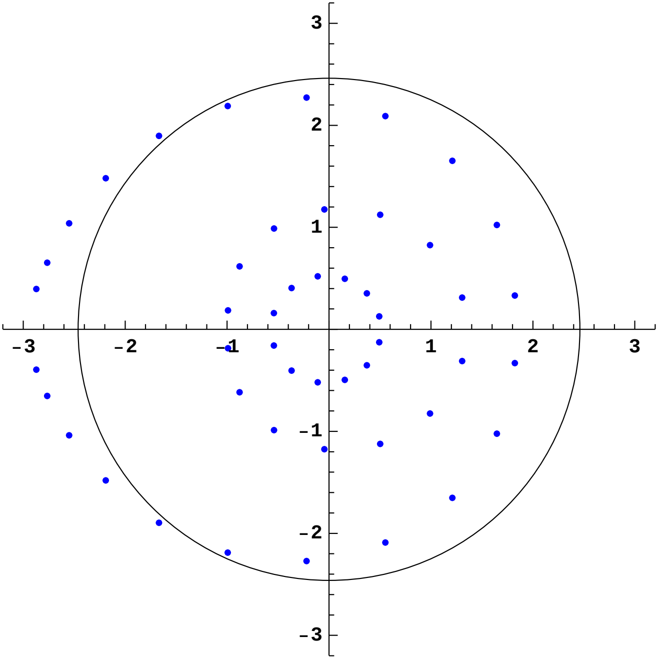


2
1
-1
-2
-2
-1
1
2

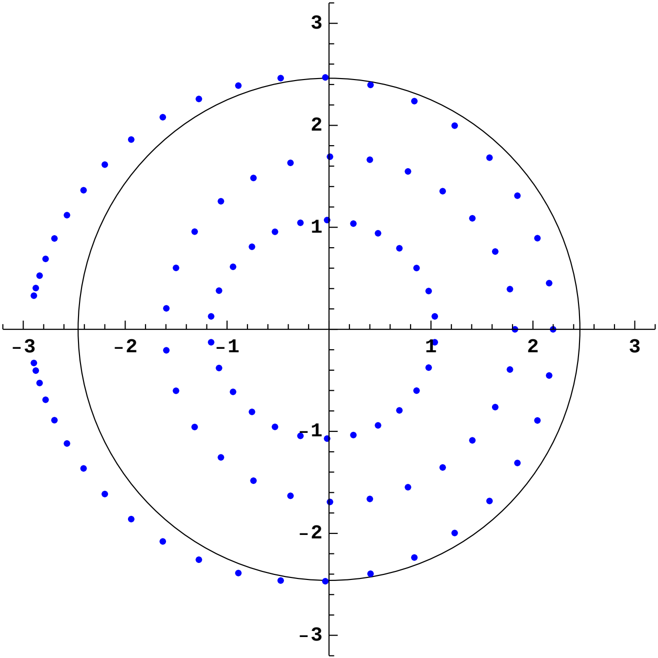
См. Анимация 3

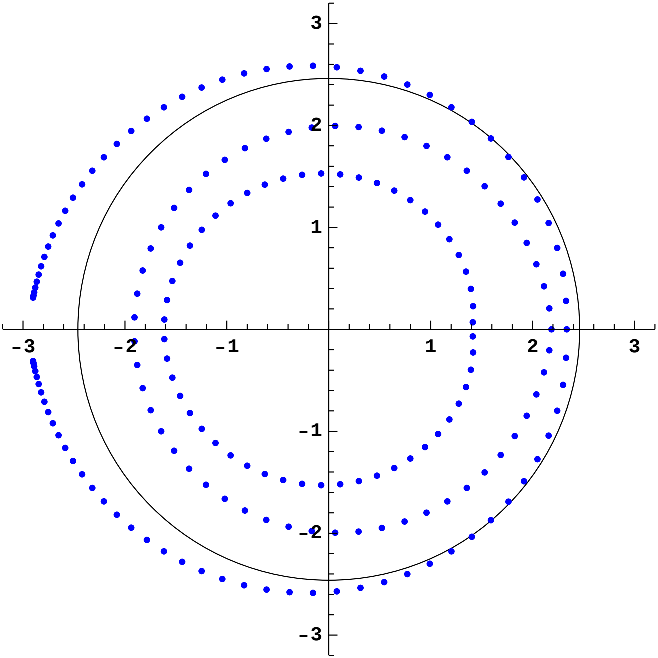


3
2
1
-1
-2
-3
-3
-2
-1
1
2
3



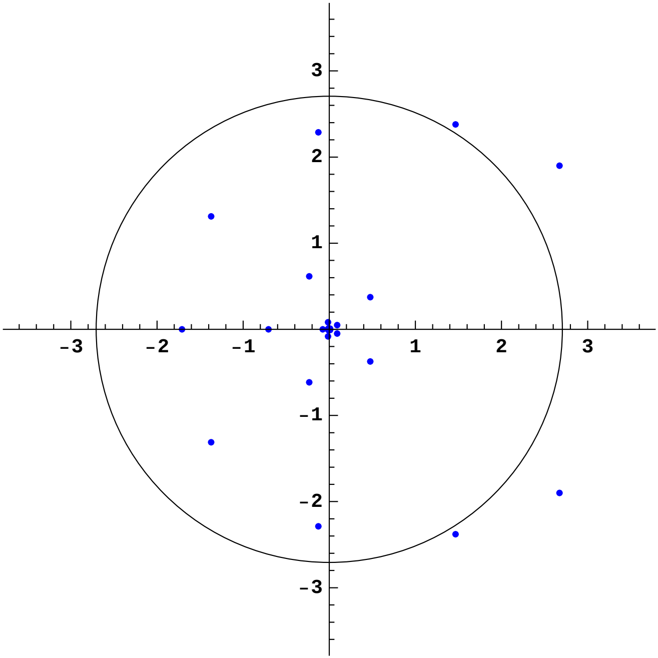
3
2
1
−1
−2
−3
−3
−2
−1
1
2
3


3
2
1
-1
-2
-3
-3
-2
-1
1
2
3

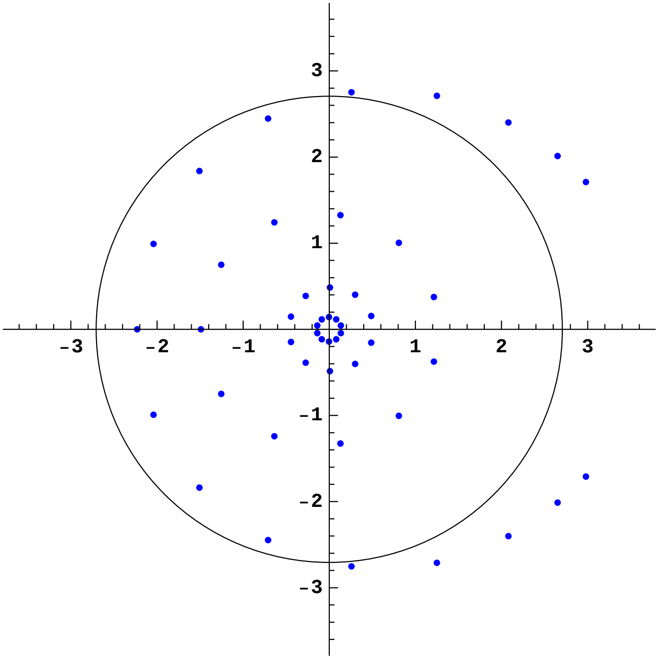


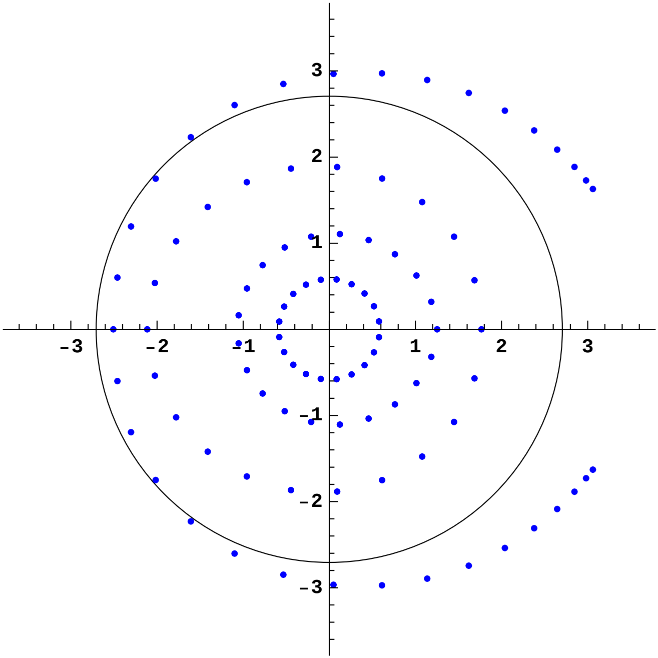
3
2
1
-1
-2
-3
-3
-2
-1
1
2
3

См. Анимация 4

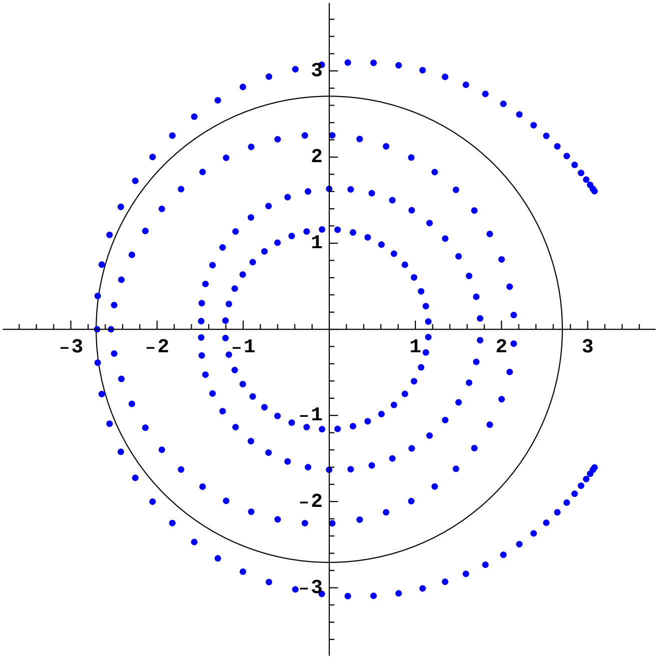


3
2
1
-1
-2
-3
-3
-2
-1
1
2
3


-3
-2
-1
1
2
3
3
2
1
-1
-2
-3

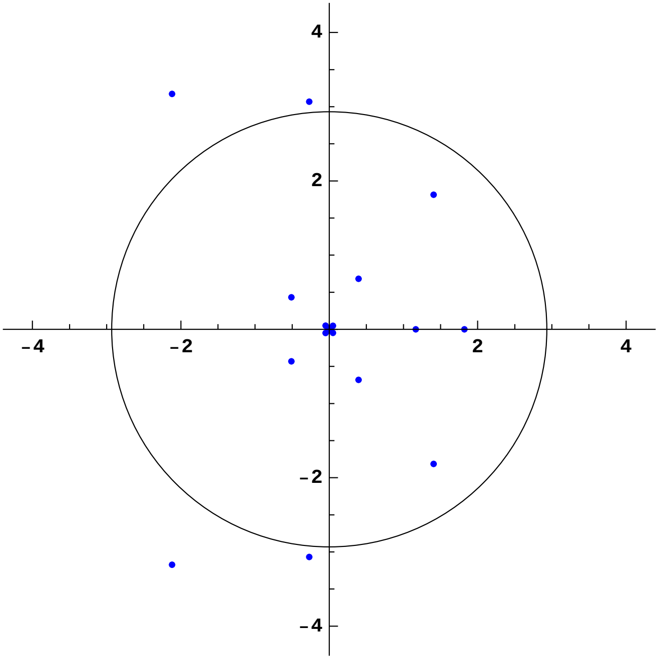


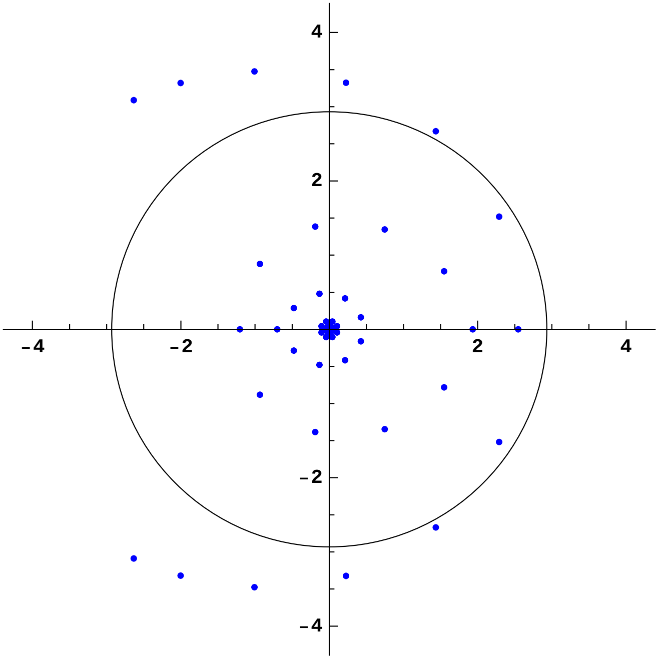
3
2
1
-1
-2
-3
-3
-2
-1
1
2
3

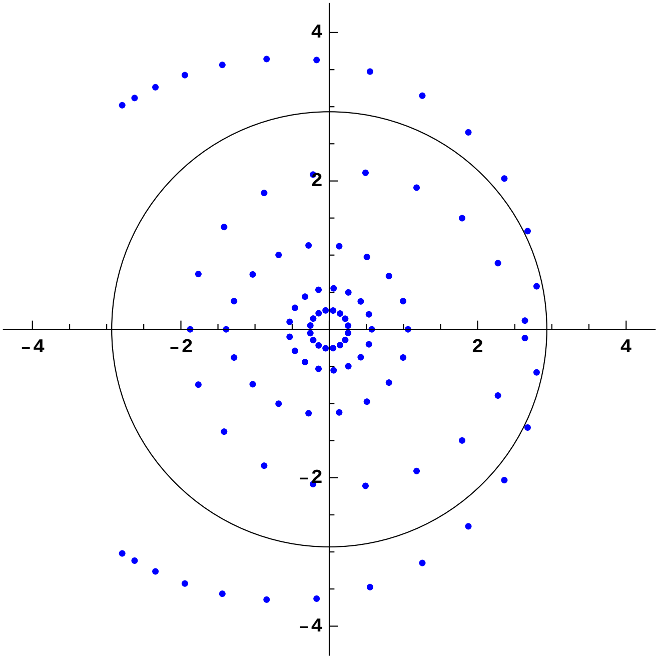


3
2
1
-1
-2
-3
-3
-2
-1
1
2
3

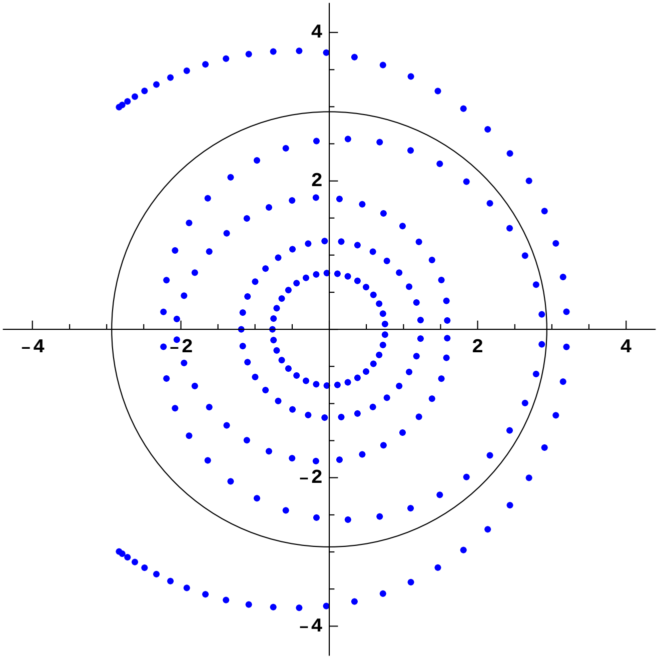
См. Анимация 5


4
2
-2
-4
-4
-2
2
4


4
2
-2
-4
-4
-2
2
4



4
2
-2
-4
-4
-2
2
4



4
2
-2
-4
-4
-2
2
4

См. Анимация 6

# Новая гипотеза

*Поместим вес* $\frac{1}{m}$ *в каждую из точек* $\lambda_{k,m,1}, \lambda_{k,m,2}, \ldots, \lambda_{k,m,m}$ *и обозначим через* $\lambda_{k,m}$ *соответствующую дискретную меру.*

# Новая гипотеза

*Поместим вес* $\frac{1}{m}$ *в каждую из точек* $\lambda_{k,m,1}, \lambda_{k,m,2}, \ldots, \lambda_{k,m,m}$ *и обозначим через* $\lambda_{k,m}$ *соответствующую дискретную меру.*
*Тогда существует предельная мера* $\lambda_k$*, сосредоточенная на "предельном луке", "предельных орбитах" и "предельной стреле", и*

$$\int \ln(w) d\lambda_k = \ln\left(\prod_{j=1}^{k} \frac{2j+1}{2j}\right)$$

# Новая гипотеза

*Поместим вес* $\frac{1}{m}$ *в каждую из точек* $\lambda_{k,m,1}, \lambda_{k,m,2}, \ldots, \lambda_{k,m,m}$ *и обозначим через* $\lambda_{k,m}$ *соответствующую дискретную меру.*
*Тогда существует предельная мера* $\lambda_k$*, сосредоточенная на "предельном луке", "предельных орбитах" и "предельной стреле", и*

$$\int \ln(w) d\lambda_k = \ln\left(\prod_{j=1}^{k} \frac{2j+1}{2j}\right)$$

# Новые матрицы

$$L_{k,m} = \begin{pmatrix} \theta_k & \theta_{k-1} & \cdots & \theta_{k-m+1} \\ \theta_{k+1} & \theta_k & \cdots & \theta_{k-m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{k+m-1} & \theta_{k+m-2} & \cdots & \theta_k \end{pmatrix}$$

# Новые матрицы

$$L_{k,m} = \begin{pmatrix} \theta_k & \theta_{k-1} & \dots & \theta_{k-m+1} \\ \theta_{k+1} & \theta_k & \dots & \theta_{k-m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{k+m-1} & \theta_{k+m-2} & \dots & \theta_k \end{pmatrix}$$

$$\det(L_{k,m})$$

# Новые матрицы

$$L_{k,m} = \begin{pmatrix} \theta_k & \theta_{k-1} & \cdots & \theta_{k-m+1} \\ \theta_{k+1} & \theta_k & \cdots & \theta_{k-m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{k+m-1} & \theta_{k+m-2} & \cdots & \theta_k \end{pmatrix}$$

$$\det(L_{k,m}) = \det(M_{k,m})$$

# Новые матрицы

$$L_{k,m} = \begin{pmatrix} \theta_k & \theta_{k-1} & \cdots & \theta_{k-m+1} \\ \theta_{k+1} & \theta_k & \cdots & \theta_{k-m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{k+m-1} & \theta_{k+m-2} & \cdots & \theta_k \end{pmatrix}$$

$$\det(L_{k,m}) = \det(M_{k,m})$$

$$M_{k,m} = -(-1)^{\frac{(m+1)(m+2)}{2}} \begin{pmatrix} \theta_{k+m-1} & \theta_{k+m-2} & \cdots & \theta_k \\ \theta_{k+m-2} & \theta_{k+m-3} & \cdots & \theta_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_k & \theta_{k-1} & \cdots & \theta_{k-m+1} \end{pmatrix}$$

# Новые матрицы

$$L_{k,m} = \begin{pmatrix} \theta_k & \theta_{k-1} & \dots & \theta_{k-m+1} \\ \theta_{k+1} & \theta_k & \dots & \theta_{k-m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{k+m-1} & \theta_{k+m-2} & \dots & \theta_k \end{pmatrix}$$

$$\det(L_{k,m}) = \det(M_{k,m})$$

$$M_{k,m} = -(-1)^{\frac{(m+1)(m+2)}{2}} \begin{pmatrix} \theta_{k+m-1} & \theta_{k+m-2} & \dots & \theta_k \\ \theta_{k+m-2} & \theta_{k+m-3} & \dots & \theta_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_k & \theta_{k-1} & \dots & \theta_{k-m+1} \end{pmatrix}$$

$\mu_{k,m,1}, \mu_{k,m,2}, \dots, \mu_{k,m,m}$ – собственные числа матрицы $M_{k,m}$

# Новые матрицы

$$L_{k,m} = \begin{pmatrix} \theta_k & \theta_{k-1} & \dots & \theta_{k-m+1} \\ \theta_{k+1} & \theta_k & \dots & \theta_{k-m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{k+m-1} & \theta_{k+m-2} & \dots & \theta_k \end{pmatrix}$$

$$\det(L_{k,m}) = \det(M_{k,m})$$

$$M_{k,m} = -(-1)^{\frac{(m+1)(m+2)}{2}} \begin{pmatrix} \theta_{k+m-1} & \theta_{k+m-2} & \dots & \theta_k \\ \theta_{k+m-2} & \theta_{k+m-3} & \dots & \theta_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_k & \theta_{k-1} & \dots & \theta_{k-m+1} \end{pmatrix}$$

$\mu_{k,m,1}, \mu_{k,m,2}, \dots, \mu_{k,m,m}$ – собственные числа матрицы $M_{k,m}$

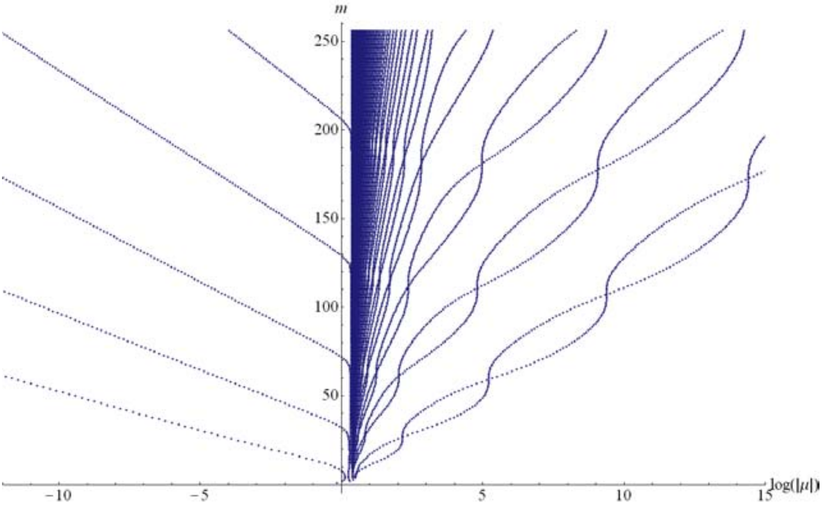



Figure: $k = 1, \; m = 1, \ldots, 256.$

См. Анимация 7

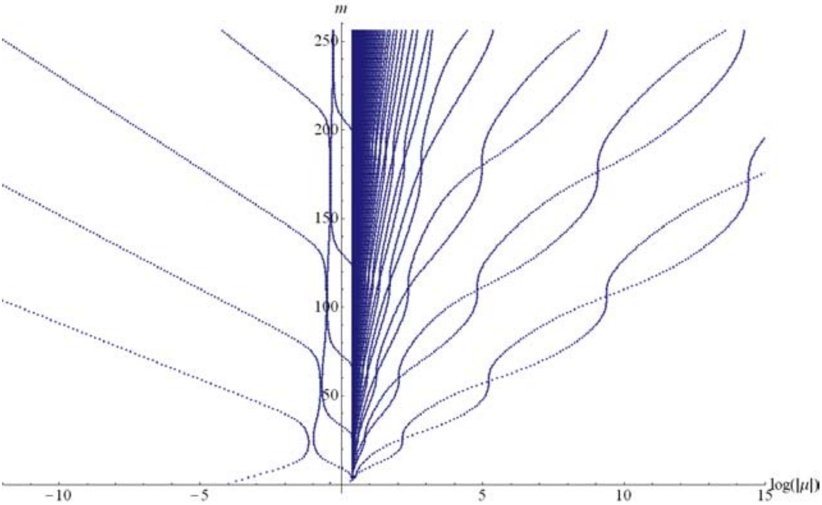



Figure: $k = 2,\ m = 1, \ldots, 256.$

См. Анимация 8

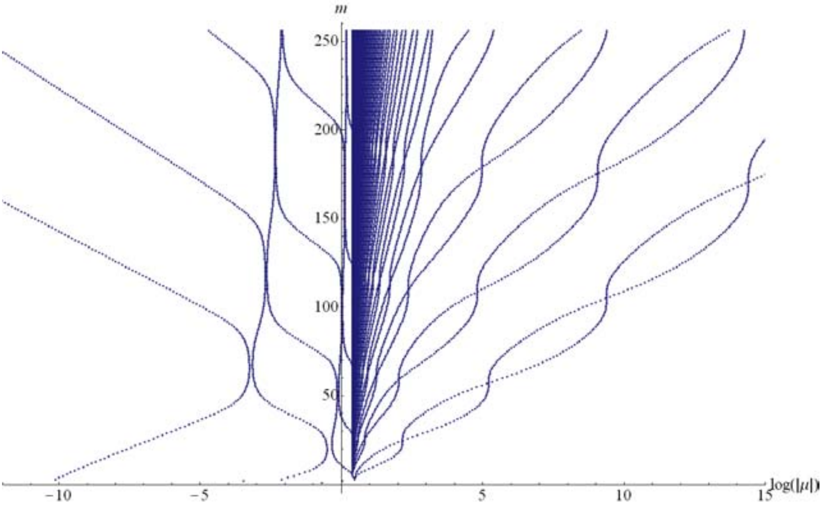



Figure: $k = 3$, $m = 1, \ldots, 256$.

См. Анимация 9

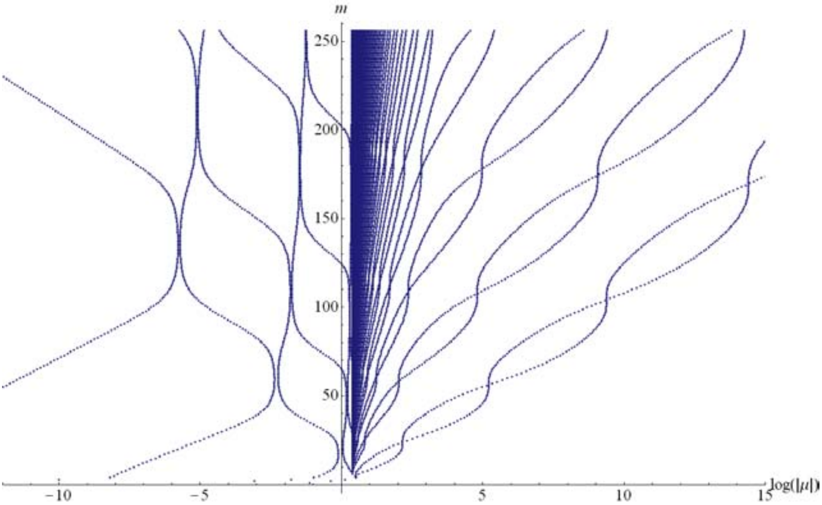



Figure: $k = 4,\ m = 1, \ldots, 256.$

См. Анимация 10

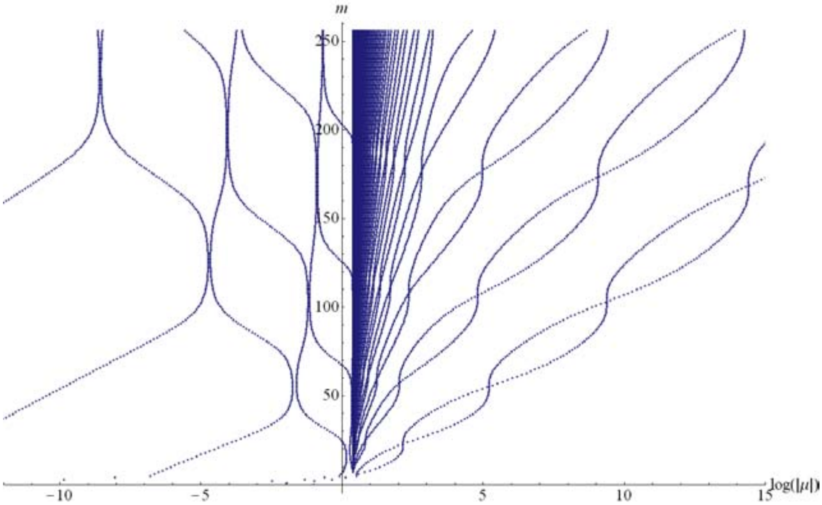



Figure: $k = 5, \ m = 1, \ldots, 256.$

См. Анимация 11

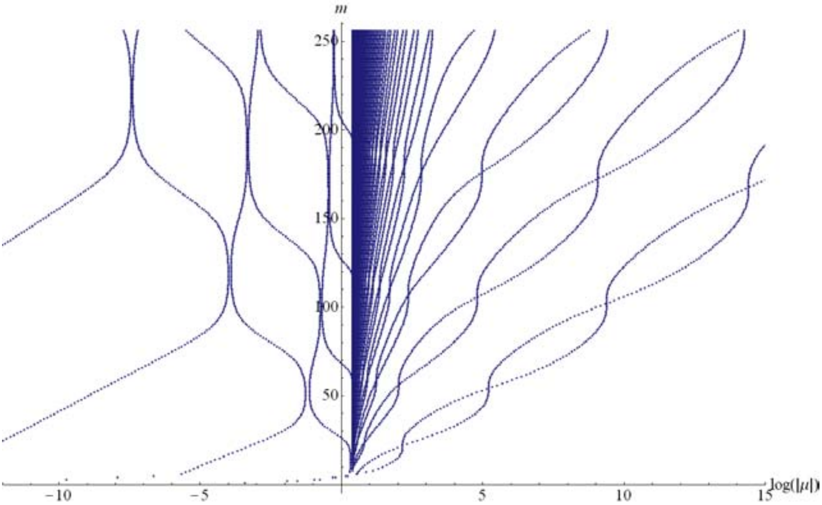



Figure: $k = 6, \; m = 1, \ldots, 256.$

См. Анимация 12

# Распределения

Поместим в каждую точку $\ln(|\mu_{k,m,n}|)$ вес $\frac{1}{m}$, и обозначим через $F_{k,m}(x)$ соответствующую функцию распределения.

# Распределения

Поместим в каждую точку $\ln(|\mu_{k,m,n}|)$ вес $\frac{1}{m}$, и обозначим через $F_{k,m}(x)$ соответствующую функцию распределения.

**Подгипотеза $\mathrm{RH}_k^{\mathrm{w}}$ (версия 4).** *При $m \to \infty$*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dF_{k,m}(x) \to \ln\left(\prod_{j=1}^{k} \frac{2j+1}{2j}\right).$$

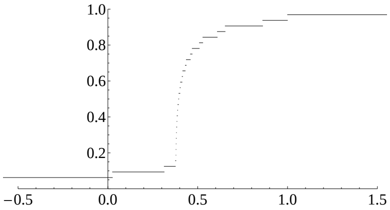



Figure: $k = 1, \; m = 32$

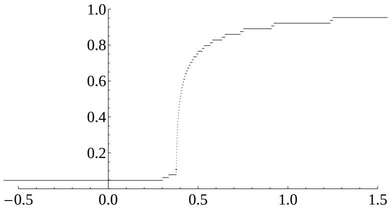



Figure: $k = 1, \; m = 64$

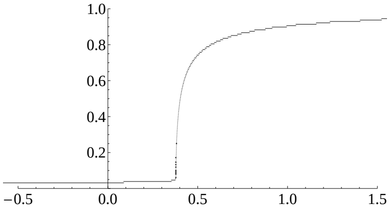



Figure: $k = 1, \; m = 128$

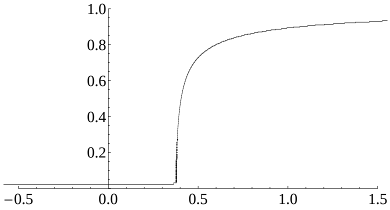



Figure: $k = 1, \; m = 256$

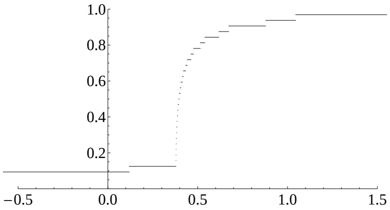



Figure: $k = 2, \ m = 32$

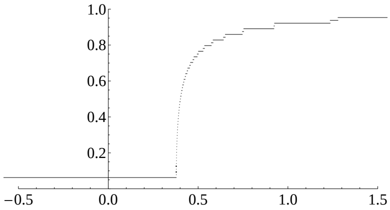



Figure: $k = 2, \ m = 64$

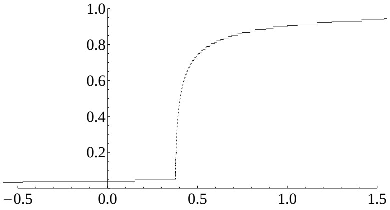



Figure: $k = 2, \ m = 128$

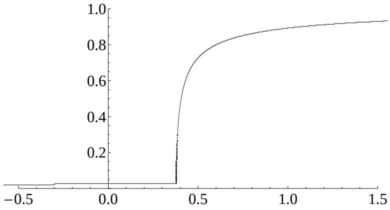



Figure: $k = 2, \ m = 256$

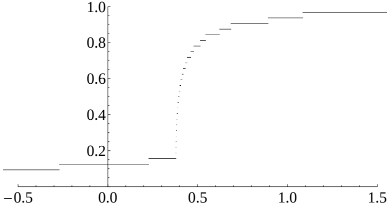



Figure: $k = 3, \ m = 32$

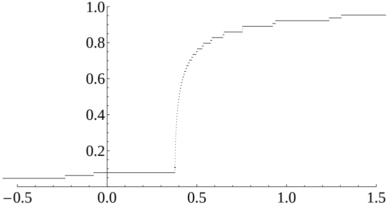



Figure: $k = 3, \ m = 64$

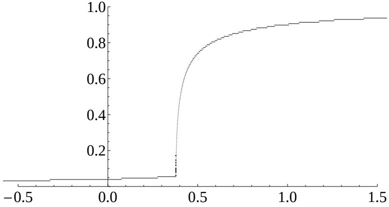



Figure: $k = 3, \ m = 128$

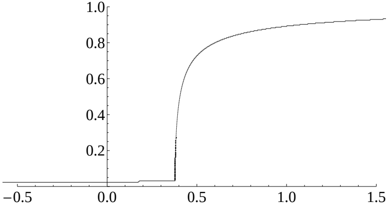



Figure: $k = 3, \ m = 256$

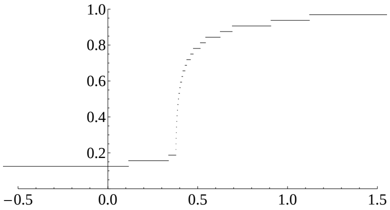



Figure: $k = 4, \ m = 32$

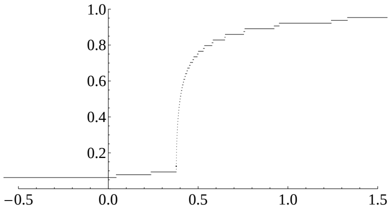



Figure: $k = 4, \ m = 64$

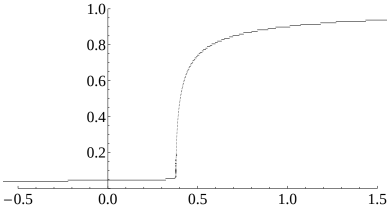



Figure: $k = 4, \ m = 128$

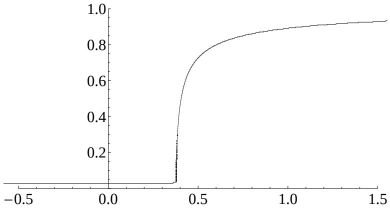



Figure: $k = 4, \ m = 256$

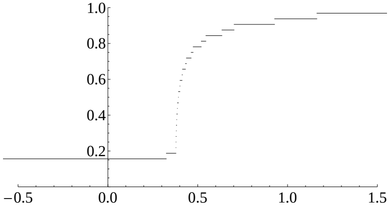



Figure: $k = 5, \; m = 32$

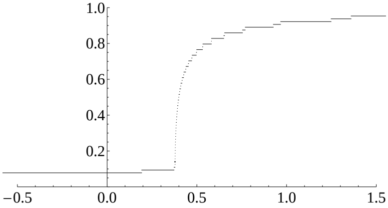



Figure: $k = 5, \; m = 64$

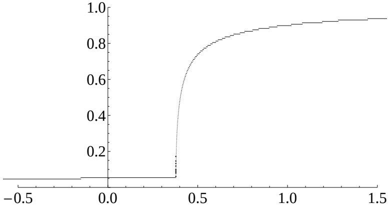



Figure: $k = 5, \; m = 128$

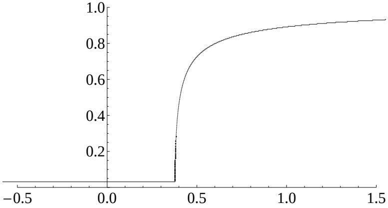



Figure: $k = 5, \; m = 256$

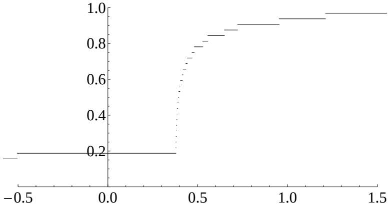



Figure: $k = 6, \ m = 32$

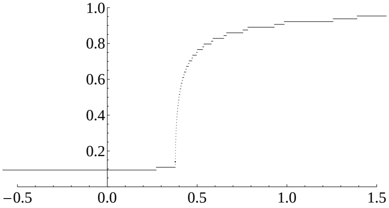



Figure: $k = 6, \ m = 64$

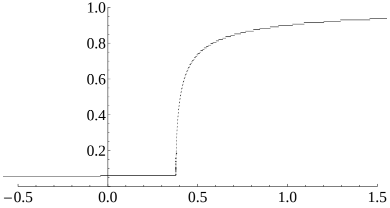



Figure: $k = 6, \ m = 128$

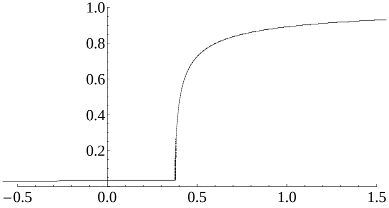



Figure: $k = 6, \ m = 256$