1. Ферма показал, что для всякого целого решения диофантова уравнения $x^4 + y^4 = z^2$, по крайней мере одно из чисел x, y, или z является 0 (тривиальное решение).

   а) Используйте теорему Мейсона–Стотерса, чтобы показать, что решение в $\mathbf{C}[t]$ уравнения $f(t)^4 + g(t)^4 = h(t)^2$ где f, g, и h ненулевые и взаимно просты должно быть постоянным решением. (Существует много постоянных решений в комплексных числах.)

   б) Покажите, что всякое решение в $\mathbf{C}[t]$ уравнения $f(t)^4 + g(t)^4 = h(t)^2$, где все из f, g, и h ненулевые, имеет вид $f(t) = ad(t)$, $g(t) = bd(t)$, и $h(t) = cd(t)^2$, где $a, b, c \in \mathbf{C}^\times$ удовлетворяют $a^4 + b^4 = c^2$.

   г) Для таких $a, b, c \in \mathbf{C}^\times$ и целых $p, q, r \geq 2$, что $1/p + 1/q + 1/r \leq 1$, используйте теорему Мейсона–Стотерса для того, чтобы показать, что всякое решение в $\mathbf{C}[t]$ уравнения $af(t)^p + bg(t)^q = ch(t)^r$, где f, g, и h ненулевые и *взаимно просты* состоит из постоянных многочленов.

   Указание к части г: Предположим, что

$$\max(p \deg f, q \deg g, r \deg h) = r \deg h.$$

   Тогда можно оценить $\deg f$ и $\deg g$ сверху: $\deg f \leq (1/p)(r \deg h)$ и $\deg g \leq (1/q)(r \deg h)$.

2. Для положительных чисел $p, q, r \geq 2$ покажите, что $1/p + 1/q + 1/r \leq 1/2 + 1/3 + 1/7 \leq 41/42$; а если $\{p, q, r\} \neq \{2, 3, 7\}$, то найдите наименьшую величину $1/p + 1/q + 1/r$.

3. (Уравнение Пелля)

   а) Используйте теорему Мейсона–Стотерса для того, чтобы показать, что $g = 0$ для всякого решения уравнения $f^2 - (t^4 + t^3)g^2 = 1$ в $\mathbf{C}[t]$ (поэтому $f = \pm 1$).

   б) Для всякого непостоянного $d(t) \in \mathbf{C}[t]$, если есть такое решение $f^2 - dg^2 = 1$ в $\mathbf{C}[t]$, что $g \neq 0$, покажите, что $\deg d \leq 2(\deg \operatorname{rad} d - 1)$. (Если d свободен от квадратов, то это бесполезный результат: неравенство превращается в $\deg d \leq 2(\deg d - 1)$, которое эквивалентно тому, что $\deg d \geq 2$, которое очевидно.)

г) Используйте часть б, чтобы найти еще одно решение части а.

Указание: В части а, если есть такое решение, что $g \neq 0$ то используйте теорему Мейсона–Стотерса для того, чтобы оценить $\deg f$ и $\deg g$, и перепишите эти неравенства как оценки на $\deg f$ через $\deg g$ и $\deg g$ через $\deg f$, чтобы получить заключение.

4. Предположим, что в $\mathbf{C}[t]$ получается $g^2 = f^3 + k$, где $k \notin \mathbf{C}$. Тогда теорема Дэвенпорта говорит, что

$$\deg f \leq 2(\deg k - 1) \quad \text{и} \quad \deg g \leq 3(\deg k - 1).$$

Из этих оценок необходимо, чтобы $\deg k \geq 2$ (иначе f и g были бы константами, поэтому k тоже было бы константой).

Если первое или второе неравенство выше становится равенством, то докажите, что

а) оба неравенства являются равенствами,

б) $\deg(f^3) = \deg(g^2)$,

в) $\text{НОД}(f, g) = 1$,

г) k — свободно от квадратов,

д) f и g — свободны от квадратов.

5. Обобщаются ли результаты в предыдущем упражнении в случае уравнения $g^n = f^m + k$, когда $m \geq 2$, $n \geq 2$, и $(m, n) \neq (2, 2)$?

6. Теорема Мейсона–Стотерса в $L[t]$, где L произвольное поле, утверждает, что если f, g, и h ненулевые в $L[t]$, $f + g = h$, f и g взаимно просты, и все производные f', g', и h' не равны 0, то

$$\max(\deg f, \deg g, \deg h) \leq \deg(\operatorname{rad}(fgh)) - 1.$$

Докажите это переводом доказательства из $\mathbf{C}[t]$ в $L[t]$.

Замечание. По сравнению с теормой Мейсона–Стотерса в $\mathbf{C}[t]$, заменяется условие, что $f, g,$ и h не все постоянны на условие, что их производные не все равны 0; эти условия эквивалентны, когда L имеет характеристику 0, но то, что производная не равна 0 более сильное свойство, чем то, что многочлен непостоянный, когда L имеет характеристику p: подумайте о t^p. Пример $f = t^p$, $g = 1$, и $h = (t+1)^p$ в $\mathbf{F}_p[t]$ иллюстрирует роль условия на производной, так как $f + g = h$, НОД$(f, g) = 1$, и f непостояннен, но эти многочлены не удовлетворяют неравенству Мейсона–Стотерса. Нет противоречия, так как f, g, и h имеют производную 0 в $\mathbf{F}_p[t]$.

7. Пусть L поле, и m и n целые, которые больше или равны 2. Если L имеет положительную характеристику p, предположите, что m и n *не* делятся на p. Для $c \in L^\times$, покажите, что всякое такое решение уравнения $g^n = f^m + c$, что f и g в $L[t]$ являются постоянным. (Заключение не работает, когда L имеет характеристику p, если не предположить, что m или n не делится на p. Например, в харатеристике p рассмотрим $g^p = f^m + 1$, где $f = t^p$ и $g = t^m + 1$, или $g^n = f^p - 1$, где $f = t^n + 1$ и $g = t^p$.)

8. (Еще раз Уравнение Пелля)

   а) Докажите аналог Упражнения 3б в $L[t]$ для всякого поля L: для непостоянного $d(t) \in L[t]$, если есть такое решение (f, g) уравнения $f^2 - dg^2 = 1$ в $L[t]$, что $f' \neq 0$ или $(dg^2)' \neq 0$, покажите, что $\deg d \leq 2(\deg \operatorname{rad} d - 1)$.

   б) Хотя решения $f^2 - (t^4 + t^3)g^2 = 1$ в $\mathbf{C}[t]$ являются $f = \pm 1$ и $g = 0$ (см. Упражнение 3), есть непостоянное решение этого уравнения в $\mathbf{F}_5[t]$: $f = 2t^5 + 1$ и $g = 2t^3 + 4t^2 + 2$.[1] Почему существование непостоянного решения не противоречит заключению в части а, когда $L = \mathbf{F}_5$?

9. Пусть α алгебраическое иррациональное число в $\mathbf{R}$. Покажите, что следующие два варианта теоремы Рота эквивалентны, где p/q всегда обозначает рациональное приведённого вида с положительным знаменателем.

   - Для всех $\varepsilon > 0$, $|\alpha - p/q| > 1/q^{2+\varepsilon}$ для всех, кроме конечного числа рациональных p/q. (Исключения зависят от ε.)

[1] Это решение в $\mathbf{F}_5[t]$ находится из разложения на непрерывные дроби в поле формальных степпеных рядов $\mathbf{F}_5((1/t))$, которое является аналогом использования непрерывных дробей в $\mathbf{R}$ для того, чтобы найти решения уравнения Пелля в $\mathbf{Z}$.

- Для всех $\varepsilon > 0$ существует $c_{\alpha,\varepsilon} > 0$ такая, что $|\alpha - p/q| \geq c_{\alpha,\varepsilon}/q^{2+\varepsilon}$ для всех рациональных p/q. (Нет исключений.)

Указание: Это утверждение похоже на эквивалентность двух варианта ABC-гипотезы, которую мы увидели во второй лекции с помощью $\varepsilon/2$-приёма.

10. Пусть $f(t)$ непостоянный многочлен в $\mathbf{C}[t]$. По теореме Мейсона–Стотерса в $\mathbf{C}[t]$ для тройки $(f, 1-f, 1)$,

$$\deg f \leq \deg \operatorname{rad} f + \deg \operatorname{rad}(1-f) - 1. \tag{1}$$

а) Покажите, что неравенство (1) является равенством для непостоянного f тогда и только тогда, когда f равен 0 или 1 в комплексных корнях его производной f'. Символически, это условие говорит, что $f'(\alpha) = 0 \Longrightarrow f(\alpha) \in \{0, 1\}$.

Указание: Рассматривайте кратность $t - \alpha$ как множитель многочленов $f(t) - f(\alpha)$ и $f'(t)$ в $\mathbf{C}[t]$.

б) Покажите, что единственный многочлен вида $t^3 + at + b$ в $\mathbf{C}[t]$, который удовлетворяет свойству в части а является $t^3 - 3/(2 \cdot \sqrt[3]{2})t + 1/2$.

в) Пусть L произвольное поле. Когда неравенство (1) в заключении теоремы Мейсона–Стотерса в $L[t]$ становится равенством? Если L имеет характеристику 0, то покажите, что часть а еще работает (если заменить комплексные корни на корни в алгебраическом замыкании поля L). А если p простое и $f(t) = t^p - t - 1$ или $t^{p+1} - t^p$ в $\mathbf{F}_p[t]$, то проверьте, что $f'(\alpha) = 0 \Longrightarrow f(\alpha) \in \{0, 1\}$ (в алгебраическом замыкании поля $\mathbf{F}_p$), но неравенство (1) для f является строгим.

г) Пусть L поле простой характеристики p. Покажите, что неравенство является равенством тогда и только тогда, когда все следующие условия удовлетворяются: (1) $f'(\alpha) = 0 \Longrightarrow f(\alpha) \in \{0, 1\}$, (2) НОД$(p, \deg f) = 1$ (*т.е.*, $\deg f' = \deg f - 1$), (3) кратность каждого корня многочлена f взаимно проста к p. Какие из этих трех условий не работает для примеров в конце части в?