1. Одна такая ABC-тройка в $\mathbf{Z}^+$, что $c = \mathrm{rad}(abc)$ — это $(1, 1, 2)$. Есть ли другие примеры?

2. Есть 12 таких ABC-троек в $\mathbf{Z}^+$, что $\mathrm{rad}(abc) = 30$. Найдите их.

3. Все известные ABC-тройки удовлетворяют

$$\max(|a|, |b|, |c|) < \mathrm{rad}(abc)^2.$$

Предполагая, что это неравенство верно всегда, используйте его для того, чтобы доказать Великую Теорему Ферма для всех степеней $n \geq 6$. (ВТФ для $n < 6$ была доказана давно: для $n = 3$ Эйлером, для $n = 4$ Ферма, и для $n = 5$ независимо Дирихле и Лежандром.)

4. Покажите, что следующие варианты ABC-гипотезы, первый для положительных целых и второй для ненулевых целых, эквивалентны (конечно, исключения в каждом варианте зависят от ε):

   - Для всех $\varepsilon > 0$ все такие тройки (a, b, c) в $\mathbf{Z}^+$, что $a+b = c$ и НОД$(a, b) = 1$, кроме конечного числа, удовлетворяют $c < \mathrm{rad}(abc)^{1+\varepsilon}$.
   - Для всех $\varepsilon > 0$ все тройки (a, b, c) в $\mathbf{Z} - \{0\}$, что $a + b = c$ и НОД$(a, b) = 1$, кроме конечного числа, удовлетворяют $\max(|a|, |b|, |c|) < \mathrm{rad}(abc)^{1+\varepsilon}$.

   Указание: Можно переписать $5 - 32 = -27$ в виде $5 + 27 = 32$.

5. Перепишите неравенство

$$\max(|a|, |b|, |c|) \leq \kappa_\varepsilon \,\mathrm{rad}(abc)^{1+\varepsilon}$$

из ABC-гипотезы в виде

$$\kappa_\varepsilon \geq \frac{\max(|a|, |b|, |c|)}{\mathrm{rad}(abc)^{1+\varepsilon}}.$$

Рассмотрев $a = 1$, $b = 3^{2^n} - 1$, и $c = 3^{2^n}$ для больших n, используйте второй вариант для того, чтобы показать, что $\kappa_\varepsilon \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$.

Указание: В первой лекции мы увидели, что для этого выбора a, b, и c, получается $\mathrm{rad}(abc) < 3c/2^{n+1}$. Здесь c зависит от n.

6. Рассмотрим следующие утверждения.

   (1) Для всех $\varepsilon > 0$, все такие тройки (a, b, c) в $\mathbf{Z} - \{0\}$, что $a + b = c$ и НОД$(a, b) = 1$, кроме конечного числа, удовлетворяют $\max(|a|, |b|, |c|) < \mathrm{rad}(abc)^{1+\varepsilon}$. (Исключения зависят от ε.)

   (2) Для всех $\varepsilon > 0$ существует такая константа $\kappa_\varepsilon > 0$, что если $a+b = c$ и НОД$(a, b) = 1$, то $\max(|a|, |b|, |c|) \leq \kappa_\varepsilon \, \mathrm{rad}(abc)^{1+\varepsilon}$. (Нет исключений.)

   (3) Для каждого $m \geq 1$ уравнение $\mathrm{rad}(abc) = m$ имеет конечное число решений среди ABC-троек (a, b, c).

   Первое и второе утверждения —два варианта ABC-гипотезы для троек ненулевых целых. Мы доказали во второй лекции, что из (3) следует эквивалентность (1) и (2).

   Покажите что из (1) для некоторого ε следует (3), и из (2) для некоторого ε следует (3).

7. Для $n \geq 3$ и $d, k \in \mathbf{Z} - \{0\}$ покажите, что из ABC-гипотезы следует, что уравнение $x^n - dy^n = k$ имеет конечное число целых решений (x, y). Случай $n = 3$ был разобран во второй лекции. Рассмотрите сперва случай, когда $x = 0$ и $y = 0$.

   Указание: Используйте ABC-гипотезу для $\varepsilon < n/2 - 1$.

8. Зафиксируйте положительное целое k и целые $m, n \geq 2$, хотя бы одно из которых больше 2 (т.е., $(m, n) \neq (2, 2)$).

   а) Покажите, что из ABC-гипотезы следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая константа $C_{\varepsilon,m,n} > 0$, что все целые решения (x, y) уравнения $y^n = x^m + k$ ограничены:

$$|x| \leq C_{\varepsilon,m,n} k^{\frac{1/m}{1-1/m-1/n}(1+\varepsilon)}, \quad |y| \leq C_{\varepsilon,m,n} k^{\frac{1/n}{1-1/m-1/n}(1+\varepsilon)}.$$

   Рассмотрите сперва случаи, когда $x = 0$ или $y = 0$, а потом используйте ABC-гипотезу для ненулевых x и y тем же способом, что мы применили ее для уравнения Морделла $y^2 = x^3 + k$.

б) Покажите, что все *взаимно простые* решения (x, y) уравнения $y^n = x^m + k$ можно оценить через радикал от k: для всех $\varepsilon > 0$ существует такая константа $C'_{\varepsilon,m,n} > 0$, что

$$|x| \leq C'_{\varepsilon,m,n} |\operatorname{rad} k|^{\frac{1/m}{1-1/m-1/n}(1+\varepsilon)}, \quad |y| \leq C'_{\varepsilon,m,n} |\operatorname{rad} k|^{\frac{1/n}{1-1/m-1/n}(1+\varepsilon)}.$$

9. Зафиксируйте ненулевые целые a, b и k, и целые $m, n \geq 2$, хотя бы одно из которых больше 2 (т.е., $(m, n) \neq (2, 2)$). Выведите из ABC-гипотезы, что для всех $\varepsilon > 0$ всякое решение уравнения $ax^m + by^n = k$ в ненулевых числах имеют оценки сверху через a, b, m, n и k:

$$|x| \leq C_{\varepsilon,m,n,a,b} |k|^{\frac{1/m}{1-1/m-1/n}(1+\varepsilon)}, \quad |y| \leq C_{\varepsilon,m,n,a,b} |k|^{\frac{1/n}{1-1/m-1/n}(1+\varepsilon)}$$

для некоторой константы $C_{\varepsilon,m,n,a,b}$, которая независима от k, и получите похожие оценки, когда x и y взаимно просты, используя $\operatorname{rad} k$ вместо k в правой части. Это включает результаты предыдущих двух упражнений как частные случаи.

10. Неравенство $\max(|a|, |b|, |c|) < \operatorname{rad}(abc)^{1+\varepsilon}$ в ABC-гипотезе эквивалентно тому, что

$$\frac{\ln \max(|a|, |b|, |c|)}{\ln \operatorname{rad}(abc)} < 1 + \varepsilon.$$

Назовём отношение в левой части *качеством* ABC-тройки (a, b, c), и обозначим его через $Q(a, b, c)$. Например,

$$Q(23, 25, 48) = \frac{\ln(48)}{\ln(690)} \approx 0,59226, \quad Q(3, 125, 128) = \frac{\ln(128)}{\ln(30)} \approx 1,42657.$$

а) Покажите, что ABC-гипотеза эквивалентна тому, что для каждого $t > 1$ лишь конечное число ABC-троек (a, b, c) имеют качество большее, чем t.

В частности, так как есть ABC-тройки, качество которых больше 1, эквивалентная формулировка ABC-гипотезы выше означает, что есть ABC-тройка наибольшего качества. В таблице ниже выписаны ABC-тройки самого большого известного качества. Первая тройка в списке, имеющая наибольшее известное качество, получена Эриком Рейссатом (Eric Reyssat) в 1987 г. Оно меньше 2, поэтому считается, что $\max(|a|, |b|, |c|) < \operatorname{rad}(abc)^2$

для всех ABC-троек.

a	b	c	Качество
2	$3^{10} \cdot 109$	23^5	1.6299
11^2	$3^2 \cdot 5^6 \cdot 7^3$	$2^{21} \cdot 23$	1.6259
$19 \cdot 1307$	$7 \cdot 29^2 \cdot 31^8$	$2^8 \cdot 3^{22} \cdot 5^4$	1.6234
283	$5^{11} \cdot 13^2$	$2^8 \cdot 3^8 \cdot 17^3$	1.5807
1	$2 \cdot 3^7$	$5^4 \cdot 7$	1.5678

б) Если вы слушали курс анализа, используйте тройки $a = 1$, $b = 3^{2^n} - 1$, $c = 3^{2^n}$ для того, чтобы доказать, что $\overline{\lim}\, S \geq 1$, где

$$S = \{Q(a, b, c) : (a, b, c) = ABC\text{-тройка}\}$$

и $\overline{\lim}$ значит "lim sup". Также докажите, что ABC-гипотеза эквивалентна соотношению $\overline{\lim}\, S = 1$.

11. Пусть $k(t)$ непостоянный многочлен в $\mathbf{C}[t]$. Напомним, что теорема Дэвенпорта утверждает, что для всех ненулевых многочленов $f(t), g(t) \in \mathbf{C}[t]$, которые удовлетворяют $g(t)^2 = f(t)^3 + k(t)$, выполнена оценка

$$\deg f \leq 2(\deg k - 1).$$

Это было выведено в первой лекции из теоремы Мейсона-Стотерса в предположении, что $f(t)$ и $g(t)$ взаимно просты.

а) Докажите, что из теоремы Мейсона–Стотерса следует, что

$$\deg f \leq 2(\deg k - 1) \quad \text{и} \quad \deg g \leq 3(\deg k - 1)$$

без предположения о взаимной простоте f и g. Используйте идеи из доказательства того, что из ABC-гипотезы следует гипотеза Холла.

б) Если f и g взаимно просты, докажите более строгие оценки

$$\deg f \leq 2(\deg \operatorname{rad} k - 1), \qquad \deg g \leq 3(\deg \operatorname{rad} k - 1),$$

где вместо k подставлено $\operatorname{rad} k$.

c) Что можно сказать об оценках на $\deg f$ и $\deg g$, если $g^2 = f^3 + k$ и $k \in \mathbf{C}^{\times}$?

12. Пусть m и n целые, большие или равные 2 и одновременно не равные 2 (т.е., $m \geq 2$, $n \geq 2$, и $(m, n) \neq (2, 2)$).

    а) Пусть $g^n = f^m + k$ в $\mathbf{C}[t]$, где f, g, и k ненулевые и не все постоянны. Используя теорему Мейсона–Стотерса, покажите, что

    $$\deg f \leq \frac{1/m}{1 - 1/m - 1/n}(\deg k - 1), \quad \deg g \leq \frac{1/n}{1 - 1/m - 1/n}(\deg k - 1).$$

    б) Если НОД$(f, g) = 1$, докажите более строгие оценки

    $$\deg f \leq \frac{1/m}{1 - 1/m - 1/n}(\deg \operatorname{rad} k - 1), \quad \deg g \leq \frac{1/n}{1 - 1/m - 1/n}(\deg \operatorname{rad} k - 1).$$

    Оценки здесь похожи на те, что в Упражнении 8. Когда $m = 3$ и $n = 2$, они становятся оценками из Упражнении 11.