Листок 2

События $A_1, A_2, \dots, A_k$ называются *независимыми* (иногда поясняют: в совокупности), если для любых различных индексов $1 \le i_1, \dots, i_r \le k$ выполнено $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\dots P(A_{i_r})$. Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_k$ называются независимыми, если для любого $S \subset \mathbb{R}$ события $\{\xi_1 \in S\}$, ..., $\{\xi_k \in S\}$ независимы.

Для независимых случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_k$ выполнено $\mathbf{E}(\xi_1 \dots \xi_k) = \mathbf{E}(\xi_1)\dots\mathbf{E}(\xi_k)$.

Дисперсия: $\mathbf{D}\xi := \mathbf{E}\left((\xi - \mathbf{E}\xi)^2\right)$.

Задача 2.1. Укажите 3 события, которые попарно независимы, но не независимы в совокупности.

Задача 2.2. Пусть ξ — случайная величина. Докажите, что

$$P(|\xi| \ge \epsilon) \le \frac{\mathbf{E}|\xi|}{\epsilon}, \qquad P(|\xi| \ge \epsilon) \le \frac{\mathbf{E}(\xi^2)}{\epsilon^2}, \qquad P(|\xi - \mathbf{E}\xi| \ge \epsilon) \le \frac{\mathbf{D}\xi}{\epsilon^2}.$$

Задача 2.3. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_k$ — независимые случайные величины. Докажите, что $\mathbf{D}\left(\xi_1 + \dots + \xi_k\right) = \mathbf{D}\xi_1 + \dots + \mathbf{D}\xi_k$.

Пусть $p, q \in [0;1]$, $p + q = 1$; $\Omega_n = \{w : w = (a_1, \dots, a_n), a_i \in \{0, 1\}\}$, $P(\{w\}) = p^{\sum a_i} q^{n - \sum a_i}$. Пусть $\xi_i = a_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, — случайные величины.

Задача 2.4. Докажите, что случайные величины ξ_i, введенные выше, независимы. Докажите, что $\mathbf{E}(\xi_i) = p$, $\mathbf{D}(\xi_i) = pq$.

Задача 2.5. Пусть $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$. Докажите, что

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \ge \epsilon\right) \le \frac{pq}{n\epsilon^2}.$$

Заметим, что правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$ и фиксированном ϵ. Таким образом, доказан (один из возможных вариантов) *закона больших чисел*.

Две функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ будем считать асимптотически эквивалентными (обозначение: $g_1 \sim g_2$), если $\lim_{x \to \infty} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = 1$.

Пусть $\pi(x) := \sum_{p \le x} 1$ — число простых чисел, меньших $x \in \mathbb{R}$.

Задача 2.6. Пусть p_n — это n-ое по величине простое число. Докажите, что утверждения $\pi(x) \sim x/\ln x$ и $p_n \sim n \ln n$ эквивалентны.

Пусть

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \ln p, \text{ если } n = p^\alpha \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases} \qquad \psi(x) := \sum_{n \le x} \Lambda(n).$$

Задача 2.7. Докажите, что утверждения $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ и $\psi(x) \sim x$ эквивалентны.

В последующих задачах может быть полезна формула суммирования по частям (другое название: преобразование Абеля). А именно, пусть дана последовательность a_n и функция $f(x)$. Определим $S(x) := \sum_{1 \le n \le x} a_n$. Тогда

$$\sum_{A < n \le B} a_n f(n) = f(B)S(B) - f(A)S(A) - \sum_{A-1 < n \le B-1} S(n)(f(n+1) - f(n))$$

$$= f(B)S(B) - f(A)S(A) - \int_A^B S(x) f'(x) dx.$$

(проверьте это равенство).

Пусть
$$L(x) := \sum_{1\le n\le x} \ln n.$$

Задача 2.8. Докажите, что
$$L(N) = N\ln N - \int_1^N \frac{[x]}{x}dx = N\ln N - N + O(\ln N).$$

Задача 2.9. Докажите, что
$$L(x) = \sum_{d\le x} \Lambda(d)\left[\frac{x}{d}\right] = \sum_{m\le x} \psi(x/m).$$

Задача 2.10. Из пред-предыдущей задачи следует, что $L(x) - 2L(x/2) = x\ln 2 + O(\ln x)$. Используя эту оценку и предыдущую задачу, выведите, что $x\ln 2 + O(\ln x) < \psi(x) < 2x\ln 2 + O(\ln x)$.

Эти оценки дают правильную зависимость числа простых чисел, меньших x, но не дают точной константы.

Напомним, что суммирование по индексу p подразумевает суммирование по простым числам.

Задача 2.11. Используя предыдущие задачи, докажите, что
$$\sum_{d\le x} \frac{\Lambda(d)}{d} = \ln x + O(1), \qquad \sum_{p\le x} \frac{\ln p}{p} = \ln x + O(1).$$

Задача 2.12. Докажите, что
$$\sum_{d\le x} \frac{\Lambda(d)}{d\ln d} = \frac{1}{\ln x}(\ln x + O(1)) + \int_2^x \frac{\ln t}{t(\ln t)^2}dt + O(1) = \ln\ln t + O(1).$$
$$\sum_{p\le x} \frac{1}{p} = \ln\ln x + O(1).$$