Листок 1

Функция Мебиуса $\mu(n)$ принимает значение $(-1)^r$, если $n = p_1 p_2 \dots p_r$, для *различных* простых $p_1, \dots, p_r$, и равна нулю для всех других n. Например, $\mu(1) = 1$, $\mu(2) = -1$, $\mu(3) = -1$, $\mu(4) = 0$, $\mu(6) = 1$, $\mu(2016) = 0$.

Задача 1.1. Докажите, что

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1 \\ 0, & \text{если } n > 1. \end{cases} \qquad \sum_{d: d^2|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ не делится на квадраты простых} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Задача 1.2. Докажите, что для функций $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ следующие два соотношения эквивалентны:

$$\text{для любого } n\text{:}\ \ g(n) = \sum_{d|n} f(d), \qquad \text{для любого } n\text{:}\ \ f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Задача 1.3. Используя равенство $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, докажите, что $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^2} = \frac{6}{\pi^2}$.

Задача 1.4. Пусть $P_{squarefree}(N)$ — это вероятность того, что (равномерно) случайное число n, $1 \le n \le N$, не делится на квадрат никакого простого числа. Докажите, что $\lim_{N\to\infty} P_{squarefree}(N) = \frac{6}{\pi^2}$.

Указание. Например, можно воспользоваться принципом включения-исключения и/или предыдущими задачами.

Задача 1.5. Пусть $P_{coprime}(N)$ — это вероятность того, что независимые, (равномерно) случайные числа a, b, $1 \le a, b \le N$, взаимно просты. Найдите предел $\lim_{N\to\infty} P_{coprime}(N)$.

$\Omega = \{a_1, \dots, a_k\}$ — дискретное вероятностное пространство. Каждая его точка имеет вероятность $P : \Omega \to [0; 1]$, причем $\sum_{i=1}^{k} P(a_i) = 1$. Событием называется любое подмножество $A \subset \Omega$. Вероятность события равна сумме вероятностей входящих в это подмножество элементов.

Случайная величина — это функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$. Математическое ожидание: $\mathbf{E}(\xi) := \sum_{i=1}^{k} P(a_i)\xi(a_i)$. Для любых случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_k$ выполнено $\mathbf{E}(\xi_1 + \dots + \xi_k) = \mathbf{E}(\xi_1) + \dots + \mathbf{E}(\xi_k)$.

Задача 1.6. Колода из 32 карт (в которой 4 туза) тщательно перемешивается, после чего верхняя карта колоды откладывается в сторону. Оставшиеся карты вновь тщательно перемешиваются, после чего вновь верхняя карта колоды откладывается. Процедура повторяется 7 раз — в итоге 7 карт оказываются вне колоды. Найти математическое ожидание количества тузов среди этих отложенных карт.

Задача 1.7. (Равномерно) случайным образом выбирается перестановка из n элементов. Найти математическое ожидание суммы квадратов длин ее циклов.

Задача 1.8. Пусть множества $A_1, \dots, A_{2000} \subset A$ содержат по крайней мере 6 элементов, и не все они совпадают. Доказать, что существует 100 таких разбиений множества A на попарно непересекающиеся множества $E_1, \dots, E_5$, таких что каждое множество A_i содержит представителей хотя бы двух множеств E_j.

Задача 1.9. Доказать, что существует квадратная матрица A порядка 11, у которой все элементы равны 1 или -1, такая что $\det(A) > 4000$.