Группы Шоттки. Занятие 2

Н. Гончарук, Ю. Кудряшов

июль 2015, ЛШСМ, Ратмино

Задача 1. Для следующих отображений нарисуйте орбиту какой-нибудь точки кроме нуля и бесконечности. Нарисуйте какую-нибудь фундаментальную область или объясните, почему её не существует. Если фундаментальная область существует, то как выглядит фактор-многообразие?

a) $z \mapsto z+1$;

b) $z \mapsto 2z$;

c) $z \mapsto e^{2\pi i\sqrt{2}}z$;

d) $z \mapsto (1+i)z$.

Задача 2. Выполните аналогичные задания для групп, порождённых следующими наборами отображений:

a) $z \mapsto z+1$ и $z \mapsto 2z$;

b) $z \mapsto \frac{1}{z}$ и $z \mapsto 2z$;

c) $z \mapsto z+1$ и $z \mapsto z+\sqrt{2}$;

d) $z \mapsto iz$, $z \mapsto 2z$;

e) $z \mapsto z+1$, $z \mapsto -z$ и $z \mapsto \frac{1}{z}$;

f) $z \mapsto \frac{1}{z}$ и $z \mapsto \frac{1}{z-5}+5$;

g) $z \mapsto 10z$ и $z \mapsto \frac{1}{z-5}-5$.

Задача 3. Когда группа, порождённая сдвигами $z \mapsto z+a$ и $z \mapsto z+b$, совпадает с группой, порождённой сдвигами $z \mapsto z+a'$ и $z \mapsto z+b'$?

Задача 4. Пусть $f(z) = 10z$, $g(z) = \frac{1}{z-5} - 5$. Докажите, что группа, порождённая f и g, *свободна*, то есть никакая нетривиальная композиция отображений f, f^{-1}, g, g^{-1} не является тождественным отображением. Композиция считается тривиальной, если при последовательным вычёркиванием стоящих рядом пар обратных отображений получается пустая композиция.