

# Дифференцирования в алгебре

курс И.В. Аржанцева

летняя школа "Современная математика" (г. Дубна), 20-24 июля 2014 года

## ЗАДАЧИ К ЗАНЯТИЮ 3

**Задача 1.** Пусть  $D \in \text{LND}(A)$  и  $\bar{D} \in \text{Der}(A[x])$ , причем  $\bar{D}|_A = D$ . Докажите, что  $\bar{D}$  локально нильпотентно тогда и только тогда, когда  $\bar{D}(x) \in A$ .

**Задача 2.** Пусть  $D \in \text{Der}(A)$ . Докажите, что  $\text{Pl}(D) := \text{Ker } D \cap \text{Im } D$  является идеалом в  $\text{Ker } D$ . Приведите примеры, где  $\text{Pl}(D) = 0$ . Докажите, что если  $D$  локально нильпотентно, то  $\text{Pl}(D) \neq 0$ .

**Задача 3.** Пусть  $D, E \in \text{LND}(A)$  и  $\text{Ker } D = \text{Ker } E := B$ . Докажите, что найдутся такие  $a, b \in B$ , что  $aD = bE$ .

**Задача 4.** Приведите пример локально нильпотентного дифференцирования алгебры  $k[x, y]$ , которое не является треугольным ни относительно переменных  $x, y$ , ни относительно переменных  $y, x$ .

**Задача 5.** Докажите, что не существует локально нильпотентного дифференцирования  $D$  алгебры  $k[x, y]$ , для которого  $\text{Ker } D = k$ .