

"Автоморфизмы аффинного пространства"

курс И.В. Аржанцева

летняя школа "Современная математика" (г. Дубна), 21-24 июля 2013 года

ЗАДАЧИ К ЗАНЯТИЮ 2

Задача 1. Найдите явный вид обратного автоморфизма к

(а) автоморфизму Нагаты

$$(x, y, z) \mapsto (x - 2(xz + y^2)y - (xz + y^2)^2z, y + (xz + y^2)z, z);$$

(б) автоморфизму Аника

$$(x, y, z, u) \mapsto (x - u(xz + yu), y + z(xz + yu), z, u).$$

Задача 2. Докажите, что автоморфизм

$$(x, y, z, u) \mapsto (x - 2(xz + y^2)y - (xz + y^2)^2z, y + (xz + y^2)z, z, u)$$

ручной, разложив его в композицию аффинных и треугольных автоморфизмов.

Задача 3. Пусть $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ – координата. Тогда найдутся такие многочлены $g_1, \dots, g_n \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, что

$$1 = g_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + g_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Задача 4. Пусть $F = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ – автоморфизм \mathbb{A}^2 , причем $\deg(f_1) \geq \deg(f_2) \geq 2$. Обозначим через h_1 и h_2 старшие однородные компоненты многочленов f_1 и f_2 соответственно. Докажите, что

(а) $J(h_1, h_2) = 0$;

(б)* найдутся однородный многочлен h и натуральные k, s , для которых h_1 и h_2 пропорциональны h^k и h^s соответственно.