Задачи по лекции Л.Д. Беклемишева

Логика Гёделя–Лёба **GL** задаётся над логикой высказываний следующими аксиомами и правилами вывода:

L1. $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$; L2. $\Box A \to \Box\Box A$;

L3. $\dfrac{A, \quad A \to B}{B}$; L4. $\dfrac{A}{\Box A}$; L5. $\dfrac{\Box A \to A}{A}$.

Аксиомами *логики Соловея* **GLS** являются все теоремы логики **GL**, формулы $\Box A \to A$, а единственным правилом вывода – правило L3.

0.0. Выведите в логике **GL**:
(а) $\Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$; (б) $(\Box A \vee \Box B) \to \Box(A \vee B)$.

0.1*. Выведите в логике **GL** формулу $L = (\Box(\Box A \to A) \to \Box A)$. (*Указание:* выведите формулу $\Box L \to L$ и примените к ней правило L5.)

Моделью Крипке называется конечное дерево $(W, \prec)$, рассматриваемое как строгий частичный порядок, вместе с функцией $v : \mathrm{Var} \to \mathcal{P}(W)$. (Функция v приписывает каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$ множество тех элементов W, где p считается истинной.) Функция v однозначно распространяется на множество всех формул по правилам:
$v(A \wedge B) = v(A) \cap v(B)$; $v(\neg A) = W \setminus v(A)$; $v(\Box A) = \{x \in W : \forall y \in W \ (x \prec y \Rightarrow y \in v(A))\}$.

Теорема Сегерберга: формула A выводима в **GL** тогда и только тогда, когда $v(A) = W$ для любой модели Крипке $(W, \prec, v)$.

1.0. Установите выводимость или невыводимость в **GL**:
(a) $\Box(A \vee B) \to (\Box A \vee \Box B)$; (b) $\Box\Box A \to \Box A$; (c) $\Diamond A \to \Box\Diamond A$; (d) $(\Box(A \to B) \wedge \Diamond A) \to \Diamond B$.

1.1. Докажите, что $\mathbf{GL} \vdash \Box A$ влечёт $\mathbf{GL} \vdash A$ для любой формулы A.

1.2*. Покажите, что множество выводимых формул логики **GL** не изменится, если добавить формулу L в качестве аксиомы и удалить L2 и L5.

Последовательность Тьюринга расширений гёделевой теории S определяется по индукции: $S_0 = S$, $S_{n+1} = S_n + \mathrm{Con}(S_n)$. *Характеристикой* $\mathrm{ch}(S)$ теории S называем наименьшее n (если оно существует) для которого теория S_n противоречива; иначе полагаем $\mathrm{ch}(S) := \infty$.

2.0 Докажите, что если S — теория в арифметическом языке и $\mathbb{N} \models S$, то $\mathrm{ch}(S) = \infty$. Как можно обобщить это утверждение на произвольные гёделевы теории?

2.1 Докажите, что для любого n в S выводимо $\mathrm{Con}_{S_n} \leftrightarrow \neg\, \mathrm{Pr}_S^{n+1}(\bot)$.

2.2 Докажите, что теория $S + \mathrm{Pr}_S^n(\bot)$ имеет характеристику n.

Арифметической моделью называем гёделеву теорию S (вместе с фиксированной арифметической формулой $\mathrm{Pr}_S(x)$, выражающей доказуемость в S формулы с гёделевым номером

x) и функцию $v : \mathrm{Var} \to \mathsf{St}_S$, сопоставляющую переменным $p \in \mathrm{Var}$ предложения языка теории S. Арифметическая оценка v распространяется на множество всех модальных формул по правилам: $v(A \wedge B) = v(A) \wedge v(B)$; $v(\neg A) = \neg v(A)$; $v(\Box A) = \mathrm{Pr}_S(\ulcorner v(A) \urcorner)$.

Теорема Соловея: 1) Пусть $\mathrm{ch}(S) = \infty$. Тогда $\mathbf{GL} \vdash A$, если и только если $S \vdash v(A)$ для любой арифметической оценки v.
2) Пусть гёделева теория S в арифметическом языке и $\mathbb{N} \models S$. Тогда $\mathbf{GLS} \vdash A$, если и только если $\mathbb{N} \models v(A)$ для любой арифметической оценки v.

Для решения следующих задач рекомендуется использовать теоремы Соловея и Сегерберга. Всюду ниже рассматриваем гёделевы теории S в арифметическом языке.

3.1. Пусть S - непротиворечива. Докажите, что существуют арифметические предложения ϕ, ψ такие, что $S + \phi \nvdash \psi$ и $S + \psi \nvdash \phi$.

3.2. Существует ли *истинное* арифметическое предложение ϕ такое, что $S + \neg\mathrm{Con}(S) \vdash \phi$ и $S \nvdash \phi$?

3.3. Существует арифметическое предложение ϕ такое, что $S \vdash \mathrm{Pr}_S(\phi) \to \mathrm{Pr}_S(\bot)$ и $S \vdash \mathrm{Pr}_S(\neg\phi) \to \mathrm{Pr}_S(\bot)$.

3.4. Существуют арифметические предложения ϕ, ψ такие, что $S \vdash \mathrm{Pr}_S(\phi) \vee \mathrm{Pr}_S(\psi)$, но $S \nvdash \mathrm{Pr}_S(\phi)$ и $S \nvdash \mathrm{Pr}_S(\psi)$.

3.5. (a) Докажите, что любая теория S_n из последовательности Тьюринга содержится в теории
$S' = S + \{\mathrm{Pr}_S(\phi) \to \phi : \phi \in \mathsf{St}_S\}$.

(b*) Докажите, что для вывода формулы $\mathrm{Con}(S_n)$ в S' необходимо (и достаточно) использовать не менее $n+1$ различных аксиом вида $\mathrm{Pr}_S(\phi) \to \phi$.

3.6*. Обозначим через C_n формулу $\Box^{n+1}\bot \wedge \Box^n\bot$. Докажите, что каждая модальная формула, не содержащая переменных, эквивалентна в логике $\mathbf{GL}$ формуле вида $\bigvee_{n\in X} C_n$ для некоторого конечного подмножества $X \subseteq \mathbb{N}$, или же отрицанию такой формулы.