50 ЛЕТ КОЛМОГОРОВСКОЙ ЭНТРОПИИ: ИСТОРИЯ И НОВЫЕ ПЕРСПЕКТИВЫ

А. М. Вершик

ПОМИ РАН, 22 декабря 2008 г.

СОДЕРЖАНИЕ.

1.ИСТОРИЯ. К.ШЕННОН-А.Н.КОЛМОГОРОВ. ИНФОРМАЦИЯ, ЭНТРОПИЯ КАК МЕТРИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ С ИНВАРИАНТНОЙ МЕРОЙ.
2.ДВА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭНТРОПИИ. СЛЕДСТВИЯ. РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ.
3.К-СИСТЕМЫ, ("ХАОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ"КЛАССИЧЕСКИЕ ПРИМЕРЫ) —- НУЛЕВАЯ ЭНТРОПИЯ ("ДЕТЕРМИНИРОВАННОЕ ПОВЕДЕНИЕ") ПРИМЕРЫ.
4.ПОЧЕМУ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ РОСТ ПРИВОДИТ К ИНВАРИАНТУ (ЭНТРОПИИ), А МЕНЬШИЙ РОСТ - НЕТ.

СОДЕРЖАНИЕ(продолжение).

5.КАК ИСПРАВИТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ.
ЭПСИЛОН-ЭНТРОПИЯ; ЭНТРОПИЙНЫЕ ИНВАРИАНТЫ.
6.ТОЧНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАСШТАБИРОВАННОЙ ЭНТРОПИИ".
7.*ДИНАМИКА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ С МЕРОЙ - ЭВОЛЮЦИЯ МЕТРИК*
8.ПРИМЕРЫ. ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР (СВЯЗЬ С ЭНТРОПИЕЙ КИРИЛЛОВА-КУШНИРЕНКО, РАТНЕР). ПОТОК ОРИЦИКЛОВ.
9.ИТЕРАЦИИ МЕТРИКИ КАНТОРОВИЧА И ПРОШЛОЕ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ.

ДВА ОПРЕДЕЛЕНИЯ —КОЛМОГОРОВА И СИНАЯ

Энтропия дискретной меры:

$$H(\mu) = -\sum_i p_i \log p_i. \quad \mu = (p_1 \dots)$$

Пусть T - преобразование с инвариантной мерой реализованное, как сдвиг в пространстве двусторонних последовательностей символов, т.е., как случайный стационарный процесс; разбиение ζ — "прошлое"процесса.

Колмогоров: $H(\zeta \mid T^{-1}\zeta)$ - условная энтропия (информация) на один шаг. "прошлое"

Синай: T то же самое в произвольном пространстве с мерой, ξ конечное разбиение; $T\xi, T^2\xi \dots T^{n-1}\xi$ - T-образы ξ,

$$\bigvee_{i=0}^{n-1} T^i\xi \equiv \xi_T^n$$

— произведение разбиений

$$\lim \frac{H(\xi_T^n)}{n} = h(T,\xi); \quad \sup_\xi h(T,\xi) = h(T) \quad \text{– энтропия} \quad T$$

СЛЕДСТВИЯ, РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ

Энтропия – метрический инвариант: $h(T) = h(STS^{-1})$
T_μ - сдвиг Бернулли с одномерным распределением
$\mu = \{p_1, p_2 \dots p_n\}$; $h(T) = H(\mu) = \sum_i p_i \log p_i$
Д.Орнштейн 1.

$$H(\mu_1) = H(\mu_2) \Rrightarrow T_{\mu_2} = ST_{\mu_1}S^{-1}.$$

Сдвиги Бернулли расклассифицированы с помощью энтропии.
2.Энтропия не единственный инвариант "хаотических"преобразований (K-систем, K-автоморфизмов): существует континнум попарно неизоморфных с одинаковой энтропией. (K-автоморфизмы - автоморфизмы с вполне положительной энтропией или колмогоровские)

Колмогоровская энтропия буквально не деформируема

Theorem

Пусть $\lim_n \frac{c_n}{n} = 0$, *а* T*- произвольное эргодическое преобразоваие. (например, иррациональное вращение окружности). Существут такое конечное разбиение* ξ, *что*

$$\lim \frac{H(\xi_T^n)}{c_n} = +\infty.$$

т.е. при сублинейном росте буквально нового инварианта нет. ПОЧЕМУ? На множестве малой меры разбиение ξ_T^n может быть очень мелким.

Идея эпсилон-энтропиии

Рассмотрим функцию

$$H_\epsilon(\xi) = \inf_{A:\mu A > 1-\epsilon} H(\xi \mid_A)$$

и

$$h_T(\xi, n, \epsilon) = H_\epsilon(\xi_T^n)$$

Класс последовательностей положительных чисел $\{c_n\}$ назовем масштабирующим (scaling) для эргодического преобразования T, если для любого конечного разбиения ξ

$$\lim_{\epsilon \to 0} \limsup_n \frac{h_T(\xi, n, \epsilon)}{c_n} < \infty$$

и существуют такие ξ, что

$$\lim_{\epsilon \to 0} \liminf_n \frac{h_T(\xi n, \epsilon)}{c_n} > 0.$$

(все такие последовательности $\{c_n\}$ эквивалентны между собой при $n \to \infty$).

Масштабированная энтропия

Theorem

Масштабирующий класс последовательностей для данного преобразования есть метрический инвариант преобразования, он может различеть преобразования с нулевой колмогоровской энтропией. Класс последовательностей $\{c_n\} \sim \{n\}$ *отвечает колмогоровской энтропии.*

Иногда можно выбрать в классе эквивалентных последовательностей какую-то одну для всех пребразование с этим классом, и тогда мы получаем в качестве инварианта - число, называемое *масштабированной энтропией*.

Примеры

1)Колмогоровская энтропия - последовательности $\{c_n\} \sim \{n\}$.
2)Класс ограниченных последовательностей - $\sup c_n < \infty$ - соответствуют преобразованиям с дискретным спектром. Изометрии компактных абелевых групп. (S.Ferenci, связь с энтропией Кириллова-Кушниренко).
3)Поток орициклов $\{c_n\} \sim \{(\log n)^k\}$ (M.Ratner, A.Кушниренко)
4)Адический автоморфизм; автоморфизм Паскаля, Юнга...???

Допустимые (полу)метрики на пространстве с мерой.

Конечное разбиение определяет полуметрику.
$\rho_\xi(x,y) =$
$\delta_{C(x),C(y)}, \quad C(x) -- \quad$ элемент разбиения содержащий $\quad x$,
$\rho_{\xi^n_T} = \sup_{i=0}^{n-1} \rho_{T^i\xi}$
Введем понятие допустимой (полу)метрики на пространстве с мерой (пространстве Лебега).
1.Метрика $\rho(.,.)$ - измерима как функция двух перменных,
2.Пространство (X,ρ) -квазикомпакт. Классы $\mod 0$ совпадающих метрик.
$\mathcal{R}$ - конус (классов) допустимых метрик, замкнут относительно взятия супремумов конечного числа метрик.
Группа преобразований, сохраняющих меру, действует на конусе $\mathcal{R}$.
Динамика метрик и ее асимптотика. Энтропия и масштабированная энтропия инварианты.

Эпсилон-энтропия мер в метрическом пространстве

Definition

(Колмогоров) Пусть μ - вероятностная борелевская мера в сепарабельном метрическом пространстве (X, ρ). Функция $H(\rho, \mu, \epsilon) = \inf\{H(\nu) : k_\rho(\mu, \nu) < \epsilon\}$, где ν - пробегает множество дискретных мер, а k_ρ - расстояние Канторовича между мерами в метрическом пространстве (X, ρ).

Можно рассматривать последовательности метрик:

$$\rho_T^n = \sup_{i=0}^{n-1} T^i\rho \quad (T^i\rho)(x, y) = \rho(T^i x, T^i y)$$

или

$$\rho_T^n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i\rho$$

и т.д.

Интерес представляют асимптотические инварианты этой последовательности метрик.

Более глубокий взгляд на энтропию и масштабированную энтропию.

Рассмотрим масштабирование пределов эпсилон-энтропии, т.е. классы таких монотонных последовательностей чисел $\{c_n\}$, что выполнено условие

$$0 < \lim_{\epsilon \to 0} \liminf_{n} \frac{H(\rho_T^n, \mu, \epsilon)}{c_n} \leq \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n} \frac{H(\rho_T^n, \mu, \epsilon)}{c_n} < \infty.$$

Theorem

Масштабированная энтропия эргодического автоморфизма T Класс последовательностей $\{c_n\}$), удовлетворяющих написанному условию относительно начальной метрики не зависит от выбора начальной метрики ρ, если она удовлетворяет дополнительному условию: 3.(X, ρ, T) - топологически транзитивен. Если существует предел для выражения выше, при некотором каноническом выборе последовательности из класса эквивалентности, то он называется масштабированной энтропией автоморфизма.

Динамика метрических компактов и асимптотика динамики метрик

Таким образом, масштабированная энтропия есть асимптотический инвариант динамики метрик. Энтропии - простейший асимптотический метрический инвариант динамики метрик.
Энтропии характеризуют рост "размерности"компакта.
Другие инварианты - регулярность роста (very weak), небернуллиевские K-системы

Другая динамика метрик: энтропии фильтраций.

Фильтрация: убывающая последовательность σ-алгебр. Например, последовательность "прошлых"$\{T^{-n}\mathfrak{A}\}, n = 0, 1, \dots,$ где $\mathfrak{A}$ - T-инвариантная σ-алгебра $T^{-1}\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}$. Эргодическая фильтрация по определению имеет тривиальное пересечение.
Если T - сдвиг Бернулли, то соответствующая фильтрация (она эргодична по закону $0 - 1$ Колмогорова) называется стандартной. Существуют эргодические фильтрации, финитно изоморфные, но не изоморфные бернуллиевской.

продолжение

Фундаментальное значение имеет следующая динамика (полу)метрик, порожденная фильтрацией Рассмотрм допустимую метрику ρ на пространстве (X,μ) и будем ее итерировать по Канторовичу.
Перейдем от фильтрации σ-алгебр к (убывающей) фильтрации разбиений $\xi_1 \succ \xi_2 \succ \dots$

$$\rho_0 = \rho; \rho_1(x,y) = k_{\rho_1}(\mu^{C_1(x)}, \mu^{C_1(y)}), \dots$$

$$\rho_m(x,y) = k_{\rho_{m-1}}(\mu^{C_m}, \mu^{C}_m(y)) \dots,$$

где $_m(x)$ элемент разбиения ξ_m, содержащий точку x, μ^C - условная мера на элементе разбиения C, и $k_\rho(.,.)$ метрика Канторовича между мерами на метрическом пространстве с мерой $(X.\mu), \rho$.
$\{\rho_m\}.m = 0 \dots$ последовательность полуметрик на (X,μ) в ее терминах можно, повидимому выразить все инвариантные свойства фильтрации.

Примеры

Критерий стандартности.
1)(Вершик, 1970) Последовательность метрик стремится к вырожденной метрике (пространство стягивается в точку) тогда и только тогда, когда фильтрация стандартна. Это означает, что масштабированная энтропия последовательности метрик равна нулю для любой растущей последовательности $\{c_n\}$.
2)(Rudolf-Heilenken-Hofman, Вершик-А.Горбульский)
Рассмотрим случайное блуждание с случайной среде.
$\mathbb{Z}^d$-решетка, рассмотрим простое случайное блуждание на $(0-1)$-конфигурациях на решетке. Задан марковский процесс.
При $d=1$ это небернуллиевский K-автоморфизм (Каликов).
При $d=2$ -? При $d>2$ - бернуллиевский. Какова фильтрация прошлых?
Масштабированная энтропия положительна при росте $c_n = n^{\frac{d}{2}}$.
Следствие. При разных d фильтрации неизоморфны, и поэтому нельзя перекодировать один процесс в другой с сохранение прошлого без потери информации.