Задачи к лекции 3
курса Г.Б.Шабата
Введение в адельную демократию

3.1. Рассмотрите для $\lambda \in \mathbb{Q}$ так называемое *логистическое* отображение $T_\lambda : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p : x \mapsto \lambda x(1-x)$. Докажите, что при $||\lambda||_p \leq 1$ и $||x||_p \leq 1$ существует предел $\lim_{n\to\infty} \|T_\lambda^{n\circ}(x)\|_p$. Верно ли какое-либо аналогичное утверждение в архимедовом случае?

3.2. Необходимо ли в предыдущей задаче ограничение $\|\lambda\|_p \leq 1$? Рассмотрите случай $p = 2$, $\lambda = \frac{7}{2}$ и изучите орбиту точки $x = \frac{3}{7}$.

3.3. В обозначениях двух предыдущих задач в случае $\|\lambda\|_p > 1$ докажите, что T_λ-прообраз любой точки из $\mathbb{Z}_p$ состоит ровно из двух точек.

3.4. Для отображения $f_c : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p : x \mapsto x^2 + c$ свяжите *преорбиты* нуля $f_c^{-1\circ}(0)$, $f_c^{-2\circ}(0)$, $f_c^{-3\circ}(0)\ldots$ с выражениями

$$\pm\sqrt{-c}, \pm\sqrt{-c \pm \sqrt{-c}}, \pm\sqrt{-c \pm \sqrt{-c \pm \sqrt{-c}}}, \ldots$$

В каких случаях эти выражения имеют p-адический смысл?

3.5. Могут ли f_c-орбиты какой-либо точки $x \in \mathbb{Q}$ при каком-либо $c \in \mathbb{Q}$ "уходить на бесконечность" при всех простых p, то есть возможно ли $\forall p \in \mathcal{P}; \lim_{n\to\infty} \|f_c^{n\circ}(x)\|_p = \infty$?

3.6. Множество вида $\{x \in \mathbb{Q}_p \mid \|x - a\|_p < r\}$ или $\{x \in \mathbb{Q}_p \mid \|x - a\|_p > r\}$ называется *обобщённым шаром* в $\mathbb{Q}_p$. Докажите, что образ любого конечного пересечения объединений обобщённых шаров под действием

(a) многочлена
(b) рациональной функции – отношения двух многочленов

является пересечением нескольких объединений (других) обобщённых шаров.

3.7 Рассмотрим многочлен $f(x) = px^3 - x^2 + x$ над $\mathbb{Q}_p$. Найдите

(a) Образ кольца $\mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$;
(b) Прообраз множества целых чисел $\mathbb{Z}_p$;
(c) Прообраз шара $\{\|x\| \leq \|p\|_p^{-3}\}$.

Для каждой точки x найдите число её прообразов.