Теневое исчисление
С. К. Ландо
Летняя школа "Современная математика"2008 г.
(2 занятия)

Аннотация

Бином Ньютона

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n}y^n$$

(здесь $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ это биномиальный коэффициент, обозначаемый также через C_n^k) можно интерпретировать как свойство последовательности степеней $x^0, x^1, x^2, \dots$. Оказывается, эта последовательность — не единственная последовательность с таким свойством. Например, если мы рассмотрим последовательность многочленов

$$(x)_n = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$$

(«нисходящие факториалы»), то для нее также

$$(x+y)_n = \binom{n}{0}(x)_n + \binom{n}{1}(x)_{n-1}(y)_1 + \binom{n}{2}(x)_{n-2}(y)_2 + \dots + \binom{n}{n}(y)_n$$

(проверьте!). Такие последовательности многочленов называются *биномиальными*, их много, и многие из них оказываются очень интересными. Долгое время наличие у биномиальных последовательностей многочисленных общих свойств воспринималось как нечто таинственное и необъяснимое, почему их изучение и было названо umbral calculus, т.е. *теневое исчисление*. Работы Рота в 60-х годах прошлого века сорвали с теневого исчисления покров тайны, однако не уменьшили интерес к биномиальным последовательностям, поскольку они регулярно возникают в самых разных областях математики. На занятиях мы обсудим, как выписывать все биномиальные последовательности и какие у них свойства. Все необходимые для этого выходящие за рамки школьной (а изредка и университетской) программы сведения будут сообщены.

1 Определения и примеры

Итак, нас интересуют *биномиальные последовательности*, т.е. такие последовательности многочленов

$$p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots,$$

в которых $p_0(x) = 1$, степень многочлена $p_n(x)$ равна n и старший коэффициент (т.е. коэффициент при x^n) в многочлене p_n равен 1, причем такие, что

$$\begin{aligned} p_n(x+y) \quad = \quad & \binom{n}{0}p_n(x)p_0(y) + \binom{n}{1}p_{n-1}(x)p_1(y) + \binom{n}{2}p_{n-2}(x)p_2(y) + \\ & \dots + \binom{n}{n}p_0(x)p_n(y). \end{aligned} \tag{1}$$

Помимо уже упомянутых последовательностей степеней и нисходящих факториалов упомянем

- последовательность восходящих факториалов
$$(x)^n = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1);$$
- последовательность Абеля
$$A_n(x) = x(x+an)^{n-1}.$$

Задача 1.1 *Докажите, что указанные последовательности биномиальны.*

Задача 1.2 *Придумайте свои примеры биномиальных последовательностей.*

Задача 1.3 *Докажите, что $p_n(0) = 0$ при всех $n > 0$ для любой биномиальной последовательности многочленов p_n.*

Задача 1.4 *Докажите мультиномиальное свойство биномиальных последовательностей:*
$$p_n(x_1 + \dots + x_k) = \sum_{m_1+\dots+m_k=n} \binom{n}{m_1,\dots,m_k} p_{m_1}(x_1)\dots p_{m_k}(x_k),$$
где
$$\binom{n}{m_1,\dots,m_k} = \frac{n!}{m_1!\dots m_k!}$$
это мультиномиальный коэффициент.

2 Применения биномиальных последовательностей

Зная, что какая-то последовательность многочленов $p_n(x)$ биномиальна, мы можем, подставляя в определяющее соотношение (1) для этой последовательности различные числовые значения, получать интересные числовые тождества.

Задача 2.1 *Используя биномиальность многочленов Абеля докажите тождества Абеля*
$$\begin{aligned}
2(n-1)n^{n-2} &= \sum_{\substack{k,m\ge 1\\ k+m=n}} \binom{n}{k} k^{k-1} m^{m-1}\\
\frac{1}{2}(n-1)(n+6)n^{n-3} &= \sum_{\substack{k,m\ge 1\\ k+m=n}} \binom{n}{k} k^{k-2} m^{m-1}\\
(n-1)(n+6)n^{n-4} &= \sum_{\substack{k,m\ge 1\\ k+m=n}} \binom{n}{k} k^{k-2} m^{m-2}
\end{aligned}$$
и т.д.

Например, при $n = 7$ первое тождество Абеля принимает вид
$$2\cdot 6\cdot 7^5 = 7\cdot 1^0\cdot 6^5 + 21\cdot 2^1\cdot 5^4 + 35\cdot 3^2\cdot 4^3 + 35\cdot 4^3\cdot 3^2 + 21\cdot 5^4\cdot 2^1 + 7\cdot 6^5\cdot 1^0.$$

Красота тождества объясняется его полной неожиданностью — все слагаемые в правой части равенства делятся лишь на первую степень простого числа 7, тогда как их сумма делится на очень высокую (пятую) степень семерки.

Задача 2.2 *Биномиальность последовательности нисходящих факториалов можно записать в виде*

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} \binom{y}{n-k}.$$

Задача 2.3 *Обозначим через $t_{n,k}$ число лесов с n вершинами из k помеченных корневых деревьев. Тогда*

$$\sum_{k=0}^{n} t_{n,k} x^k = x(x+n)^{n-1},$$

где в правой части стоит многочлен Абеля.

3 Биномиальные последовательности и сдвиги

Дифференцирование переводит n-ю степень переменной x в ее $(n-1)$ -ую степень, умноженную на n:

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}.$$

Подобные преобразования можно определить для любой последовательности многочленов $p_0, p_1, p_2, \dots$ переменной x, таких, что каждый многочлен p_k имеет степень k и коэффициент 1 при старшей степени переменной. Любой многочлен степени не выше n представляется в виде линейной комбинации многочленов $p_0, p_1, \dots, p_n$. На пространстве многочленов $\mathbb{R}[x]$ определен *линейный оператор*

$$\Delta : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x],$$

такой, что

$$\Delta : p_n \mapsto n p_{n-1}.$$

Этот оператор определяется последовательностью многочленов p_n. Для биномиальных последовательностей он оказывается очень интересным (и в этом случае он называется *дельта оператором* этой последовательности).

Задача 3.1 *Проверьте, что оператор*

$$\frac{1}{1!}\frac{d}{dx} + \frac{1}{2!}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{d}{dx}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{d}{dx}\right)^4 + \dots = e^{d/dx} - 1$$

является оператором Δ для последовательности нисходящих факториалов.

Проще всего решить эту задачу, доказав предварительно следующее утверждение, которое, по-видимому, важнее всего, о чем идет речь на наших занятиях. Оно используется в самых разных областях математики.

Задача 3.2 *Докажите, что экспонента дифференцирования является сдвигом:*

$$e^{d/dx} f(x) = f(x+1).$$

(Достаточно доказать справедливость этого утверждения для произвольной степени $f(x) = x^n$.) Элементарное обобщение дает

$$e^{a\,d/dx} f(x) = f(x+a)$$

для произвольной константы a.

Задача 3.3 *Найдите оператор* Δ *для последовательности восходящих факториалов и для последовательности Абеля.*

Задача 3.4 *Докажите, что последовательность многочленов* $p_0, p_1, p_2, \ldots$ *является биномиальной в том и только в том случае, если оператор* Δ *эквивариантен относительно сдвига, т.е. если* $\delta_a \Delta = \Delta \delta_a$ *для любого значения* a.

Например, оператор дифференцирования $\frac{d}{dx}$ эквивариантен относительно сдвига:

$$\frac{d}{dx}\delta_a(x^n) = \frac{d}{dx}(x+a)^n = n(x+a)^{n-1} = \delta_a \frac{d}{dx}(x)^n = \delta_a(nx^{n-1}).$$

Задача 3.5 *Проверьте, что оператор* $e^{\frac{d}{dx}} - 1$ *эквивариантен относительно сдвига.*

Задача 3.6 *Докажите, что всякий линейный оператор на пространстве многочленов, эквивариантный относительно сдвига и понижающий степень многочлена, имеет вид ряда от оператора дифференцирования*

$$d_1 \frac{d}{dx} + d_2 \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + d_3 \left(\frac{d}{dx}\right)^3 + \cdots = e^{b_1 \frac{d}{dx} + b_2 \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + b_3 \left(\frac{d}{dx}\right)^3 + \cdots} - 1.$$

Отметим, что последние задачи дают универсальный способ построения биномиальных последовательностей многочленов. А именно, нужно взять произвольную последовательность коэффициентов $d_1, d_2, \ldots, d_1 = 1$ и последовательно решать уравнения $\Delta p_n = np_{n-1}$, где Δ — дифференциальный оператор

$$\Delta = d_1 \frac{d}{dx} + d_2 \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + d_3 \left(\frac{d}{dx}\right)^3 + \ldots$$

Задача 3.7 *Докажите по индукции, что эта последовательность уравнений разрешима для любой последовательности коэффициентов* $d_1, d_2, \ldots,$ *начинающейся с* 1 *(это условие означает, что оператор* Δ *понижает степень многочлена ровно на* 1*, причем* $\Delta p_n = np_{n-1}$*).*

4 Явное построение биномиальных последовательностей

Пусть $p_0, p_1, p_2, \ldots$ — биномиальная последовательность многочленов. Составим из этой последовательности *экспоненциальную производящую функцию*

$$\mathcal{P}(x,t) = p_0(x) + p_1(x)\frac{t}{1!} + p_2(x)\frac{t^2}{2!} + p_3(x)\frac{t^3}{3!} + \ldots$$

(такие производящие функции называются экспоненциальными, потому что если взять все p_n равными 1 константами, то получившаяся функция будет экспонентой:

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots)$$

Теперь равенство (1) можно переписать в виде

$$\mathcal{P}(x+y,t) = \mathcal{P}(x,t)\mathcal{P}(y,t). \tag{2}$$

Действительно, коэффициент при t^n в левой части последнего равенства равен $\frac{p_n(x+y)}{n!}$, а в правой части равен

$$\sum_{k+l=n} \frac{p_k(x)}{k!}\frac{p_l(y)}{l!}.$$

Умножив обе части последнего равенства на $n!$, мы получаем в точности равенство (1). Тем самым, для того, чтобы найти все биномиальные последовательности многочленов, нам достаточно найти все функции $\mathcal{P}$ от двух переменных, удовлетворяющие равенству (2).

Забудем пока про вторую переменную t в равенстве (2) и будем искать функции P от одной переменной, такие, что

$$P(x+y) = P(x)P(y) \qquad (3)$$

для любых значений переменных x и y. Такие функции мы знаем. Во-первых, это экспонента:

$$e^{x+y} = e^x e^y.$$

Более общим образом, это экспонента вида e^{cx} для произвольной постоянной c:

$$e^{c(x+y)} = e^{cx}e^{cy}.$$

Оказывается, что никаких других функций с таким свойством не бывает, т.е. экспонента это единственная функция которая преобразует сложение в умножение.

Задача 4.1 *Докажите, что если выполняется равенство (3), то $P(x) = e^{cx}$ для некоторой константы c, в предположении, что функция P либо а) непрерывна; либо б) разлагается в нуле в ряд по x.*

Но теперь мы можем решить и уравнение (2)! Действительно, при любом значении t функция $\mathcal{P}(x,t)$ является экспонентой от cx для некоторой константы c. Если мы хотим, чтобы в разложении по степеням t коэффициенты были многочленами от x, то мы должны положить $c(0) = 0$, в остальном эта константа может зависеть от t произвольным образом, и мы получаем следующее утверждение.

Теорема 4.2 *Биномиальные последовательности многочленов взаимно-однозначно соответствуют экспоненциальным производящим функциям вида $\mathcal{P}(x,t) = e^{xc(t)}$, где $c = c(t)$ — произвольная функция (ряд) от t, $c(0) = 0$.*

Тем самым, для построения биномиальной последовательности многочленов достаточно задать последовательность чисел $c_1, c_2, \dots$ и положить $p_n(x)$ равным коэффициенту при $t^n/n!$ в функции

$$\mathcal{P}(x,t) = e^{x(c_1t+c_2t^2+\dots)}.$$

Последовательность коэффициентов $c_1, c_2, \dots$ называется *тенью* соответствующей биномиальной последовательности.

Посмотрим, как выглядят функции $c(t)$ для имеющихся у нас примеров биномиальных последовательностей. Степеням x^n отвечает функция $c(t) = t$ (т.е. $c_1 = 1, c_2 = c_3 = c_4 = \dots = 0$). Последовательности нисходящих факториалов $(x)_n$ соответствует функция

$$c(t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots = \log(1+t),$$

т.е.
$$\sum_{n=0}^{\infty}(x)_n\frac{t^n}{n!} = e^{x\log(1+t)} = (1+t)^x.$$
Действительно, это утверждение есть не что иное как бином Ньютона:
$$(1+t)^x = 1 + \binom{x}{1}t + \binom{x}{2}t^2 + \binom{x}{3}t^3 + \dots$$

Задача 4.3 *Найдите функции $c = c(t)$ для последовательности восходящих факториалов $(x)^n$, последовательности многочленов Абеля $A_n(x) = x(x+an)^{n-1}$ и других известных вам биномиальных последовательностей многочленов.*

Задача 4.4 *Докажите, что оператор $c^{-1}(\frac{d}{dx})$ является дельта-оператором для биномиальной последовательности многочленов.*

5 Последовательности Шеффер

Последовательности Шеффер обобщают биномиальные последовательности. Пусть Δ — дельта-оператор, эквивариантный относительно сдвига. Последовательность многочленов $s_0, s_1, s_2, \dots$ степеней $0, 1, 2, \dots$ называется *последовательностью Шеффер* относительно оператора Δ, если
$$\Delta s_n = n s_{n-1}.$$
Это определение отличается от свойства биномиальных последовательностей тем, что мы не требуем, чтобы многочлены s_n принимали значение 0 при $x = 0$, т.е. делились бы на x.

Биномиальная последовательность многочленов $p_1, p_2, \dots$, отвечающая оператору Δ, является, разумеется, последовательностью Шеффер для этого оператора.

Задача 5.1 *Докажите, что для произвольной последовательности Шеффер $s_0, s_1, \dots$ выполняются равенства*
$$s_n(x+y) = \sum_{k+m=n}\binom{n}{k}s_k(x)p_m(y). \tag{4}$$

Задача 5.2 *Докажите, что экспоненциальная производящая функция для последовательности Шеффер имеет вид*
$$\sum_{n=0}^{\infty}s_n(x)\frac{t^n}{n!} = a(t)e^{xc(t)},$$
где
$$a(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots, \qquad c(t) = c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \dots.$$

Последовательности Шеффер, отвечающие оператору дифференцирования $\frac{d}{dx}$ (т.е. $c(t) = t$), называются *последовательностями Аппеля.* К их числу относятся многие знаменитые последовательности ортогональных многочленов.

Например, *многочлены Эрмита* H_n имеют экспоненциальную производящую функцию
$$\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!} = e^{-t^2/2}e^{xt},$$

многочлены Эйлера E_n имеют экспоненциальную производящую функцию

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{2}{e^t+1}e^{xt},$$

многочлены Бернулли B_n имеют экспоненциальную производящую функцию

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t-1}e^{xt}.$$

Задача 5.3 *Выпишите несколько первых многочленов Эрмита, Эйлера и Бернулли.*

Задача 5.4 *Докажите, что многочлены Эрмита имеют вид*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2/2}.$$

Задача 5.5 *Докажите свойство ортогональности многочленов Эрмита:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2/2}dx = 0$$

при $m \neq n$.

Задача 5.6 *Докажите, что*

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

Задача 5.7 *Докажите, что*

$$H_n(x) = e^{-\frac{d^2}{dx^2}}x^n.$$

Задача 5.8 *Докажите, что многочлены Бернулли имеют вид*

$$B_n(x) = \frac{\frac{d}{dx}}{e^{\frac{d}{dx}}-1}x^n.$$

Задача 5.9 *Докажите, что многочлены Бернулли однозначно определяются условием*

$$\int_x^{x+1} B_n(\xi)d\xi = x^n.$$

Другими словами, интеграл на отрезке $[x, x+1]$ *— обратный оператор к дифференциальному оператору из предыдущей задачи.*

Задача 5.10 *Докажите следующую формулу для суммы k-х степеней:*

$$1^k + 2^k + \cdots + n^k = \frac{B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}(0)}{k+1}.$$

Задача 5.11 *Докажите, что*

$$\begin{aligned} B_n(x+1) - B_n(x) &= nx^{n-1} \\ E_n(x+1) - E_n(x) &= 2x^n. \end{aligned}$$

6 Коалгебра многочленов

Теорема 6.1 *Пусть p_n, q_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ — две биномиальные последовательности. Рассмотрим линейное отображение пространства многочленов в себя, переводящее p_n в q_n. Тогда это отображение переводит любую биномиальную последовательность многочленов в биномиальную последовательность.*

Смысл этой теоремы в следующем. Введем на пространстве многочленов *коумножение* μ, определенное на базисных мономах следующим образом:

$$\mu : x^n \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \otimes x^{n-k}.$$

Это определение естественно: коумножение можно ввести таким же образом на пространстве функций на любой *группе*. А именно, пусть G — группа с операцией, которую мы записываем как сложение, и пусть $\mathcal{F}(G)$ — пространство функций на этой группе (например, с вещественными значениями). Тогда групповое коумножение

$$\mu : \mathcal{F}(G) \to \mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(G) \equiv \mathcal{F}(G \times G)$$

определяется так:

$$\mu(f)(g, h) = f(g + h).$$

В нашем случае группа G это группа вещественных чисел по сложению, а $\mathcal{F}(G) = \mathbb{R}[x]$ это пространство многочленов на ней. Разумеется, на пространстве функций на группе можно ввести и структуру алгебры — функции можно перемножать, — однако в данный момент нам эта структура неинтересна.

Биномиальные последовательности многочленов выделяются тем условием, что коумножение действует на них так же, как и на последовательности степеней x^n:

$$\mu : p_n \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k \otimes p_{n-k}.$$

Всякое отображение, переводящее некоторую биномиальную последовательность в биномиальную последовательность, является изоморфизмом коалгебр. Поэтому оно переводит любую биномиальную последовательность в биномиальную последовательность. Все теневое исчисление есть не что иное как изучение этой коалгебраической структуры.

К сожалению, литературы о теневом исчислении на русском языке практически нет.

Список литературы

[1] A. Di Bucchianico, *An introduction to Umbral Calculus*, 1998, http://www.win.tue.nl/math/bs/statistics/bucchianico

[2] S. Roman, *The Umbral Calculus*, Academic Press, 1984

[3] G.-C. Rota and B. Taylor, *An introduction to the umbral calculus*, in: Analysis, Geometry, and Groups: a Riemann Legacy Volume, Palm Harbor, pp. 513–525, Hadronic Press, 1993