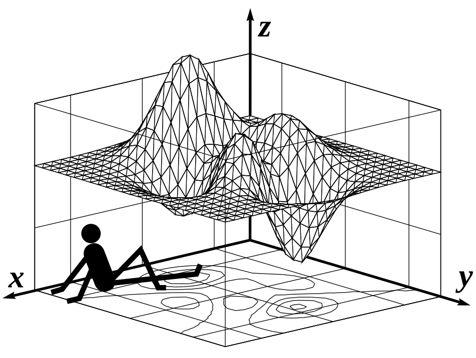
Модельные представления о мире,
созданные «не выходя из дома»,
на просторах Вселенной перестают работать.

МА-9. *ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ*

§1. В двух словах о векторах

Если x, y — длина, ширина прямоугольника, то площадь $z = xy$ представляет собой функцию двух переменных. В общем не очень сложном случае графиком $z = f(x, y)$ будет некая поверхность.



Изначально имеет смысл ориентироваться всё же на произвольное число переменных. В случае функциональной зависимости $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ комплект

$$\boldsymbol{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

удобно считать *вектором*, мысленно откладывая $x_1, \ldots, x_n$ по координатным осям, и коротко записывая $f(\boldsymbol{x})$.

Поначалу возникает впечатление, что векторные понятия используются для краткости. Это лишь часть правды. Геометрия пространства имеет «*некоординатный*» характер, и *координатное насилие* над ней мешает видеть такие простые понятия как расстояние, направление, ортогональность, без которых «за деревьями леса не видно». В полной мере эти факторы выявляются в «Линейной алгебре», но и в данном контексте без них не обойтись.

Поэтому очень коротко напомним некоторые пункты существенные для дальнейшего. Аналогия с обычным представлением о векторах становится осмысленной при подходящем определении операций:

- *умножение на скаляр*[1], $\lambda \boldsymbol{x} = \{\lambda x_1, \dots, \lambda x_n\}$,
- *сложение*, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \{x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n\}$,
- *скалярное произведение*, $\boxed{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n}$,
  эквивалентные обозначения: $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = \langle \boldsymbol{x}\boldsymbol{y} \rangle$.

С помощью скалярного произведения вводится *евклидова норма (длина вектора)*,

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

а с помощью нормы *расстояние* $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ между векторами $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$.

Множество векторов, на которых введены перечисленные операции, называют *n-мерным евклидовым* пространством и обозначают $\mathbb{R}^n$.

Скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$ обычно определяется как произведение длин векторов на косинус угла между ними. Потом выясняется, что $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_3 y_3$ даёт то же самое. В общем случае такое соответствие имеет место благодаря *неравенству Коши–Буняковского*,

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \leqslant \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|, \tag{1}$$

[1]Обратите внимание, что изложение ведётся с расчётом на некоторую догадливость читателя. Разумеется, здесь λ — скаляр, и не составило бы труда написать $\lambda \in \mathbb{R}$, что принято в математических текстах. Но учебник со справочником «в одном флаконе» имеет свои минусы. Плюсы тоже есть, однако, хотя «кашу маслом не испортишь», с некоторого момента *каша с маслом* превращается в *масло с кашей*.

которое даёт возможность ввести понятие косинуса, $\cos\varphi = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}/\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|$, угла между векторами при любом n.

Неравенство (1) доказывается совсем просто. Раскрывая скобки в очевидном неравенстве $(\boldsymbol{x}-\lambda\boldsymbol{y})^2 \geqslant 0$, имеем $\lambda^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - 2\lambda\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} + \|\boldsymbol{x}\|^2 \geqslant 0$ для любого λ, — что возможно лишь при неположительности дискриминанта квадратного многочлена — а это и есть (1).

Существенную конструктивную роль в многомерном анализе играет понятие *ортогональности*. Векторы $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ определяют как *ортогональные*, если их *скалярное произведение* равно нулю, $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0$. Ортогональность в свою очередь позволяет ввести в $\mathbb{R}^n$ понятие *плоскости*, как множества элементов $\boldsymbol{x}$, ортогональных вектору $\boldsymbol{a}$,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} = 0, \qquad \text{т. е.} \qquad a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0.$$

§2. Предел и сходимость

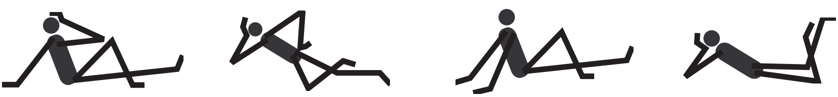
Векторный язык при изучении функций $y = f(x_1,\dots,x_n)$ оказывается удобен и даже необходим с первых шагов.

• ***Определение.*** *Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при x стремящемся к a,*

$$f(x)\to A \quad \textit{при} \quad x\to a, \tag{2}$$

если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое δ, что[2]

$$|f(x)-A| < \varepsilon, \qquad \textit{как только} \qquad 0 < \|x-a\| < \delta. \tag{3}$$



Вся разница с определением предела функции одной переменной заключается в замене меры близости $|x-a|$ на $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|$. В результате n условий $|x_i - a_i|\to 0$ заменяются одним $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|\to 0$. Но вода камень точит. Капля за каплей, и *пределы* выруливают на новую платформу, где мозаика подробностей перестаёт ретушировать суть.

[2]Обратите внимание в (3) на существенность условия $0 < \|x-a\|$.

• ***Определение.*** *Число A называется пределом функции $y = f(\boldsymbol{x})$ при $\boldsymbol{x} \to \infty$, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $M > 0$, что $|f(\boldsymbol{x}) - A| < \varepsilon$, как только $\|\boldsymbol{x}\| > M$. Вместо $A = \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\infty} f(\boldsymbol{x})$ используют также запись*

$$A = \lim_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty} f(\boldsymbol{x}).$$

Заметим, что (ε, δ)-определение предела (2), как и в одномерном случае, эквивалентно следующей дефиниции.

• *Число A есть предел функции $f(x)$ при $x \to a$, если*

$$f(x_n) \to A$$

на любой последовательности $x_n \to a$ $(x_n \neq a)$[3].

Здесь, кстати, можно многое повторить в новой обстановке, воспроизводя многоголосие учения о пределах функции одной переменной[4]. Некоторые учебники так и делают, решая заодно государственные задачи типа «чем-то занять население» или «отвлечь от психологически опасных попыток поиска смысла жизни». На самом деле важно понять, что в основе всевозможных определений пределов в разных дисциплинах лежит одна и та же схема. И когда она усваивается, человеку легче самому сконструировать нужное определение, чем выискивать его в тексте. Поэтому здесь можно рекомендовать вернуться к пределам функции одной переменной и посмотреть, как там трансформировались бы понятия при смене формата $y = f(x)$ на $y = f(x_1, \ldots, x_n)$.

[3]Опять-таки обратите внимание на принципиальное условие $x_n \neq a$.

[4]Начиная приблизительно из того же положения: векторные последовательности вместо числовых, *последовательности Коши*, *бесконечно малые величины*.

§3. Непрерывность

При переходе к функциям многих переменных не меняется также и определение непрерывности. Не меняется по сути. Изменяется лишь мера близости. Поэтому звучит та же мелодия немного в другой аранжировке.

• *Функция $f(x)$ непрерывна в точке*[5] $x = a$, *если*

$$f(x) \to f(a) \quad \textit{при} \quad x \to a,$$

т. е. если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое δ, что

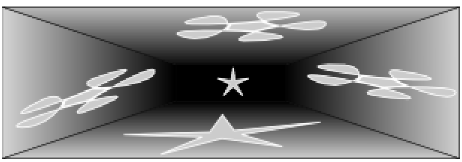
$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon, \quad \textit{как только} \quad \|x - a\| < \delta.$$

Аналогия с одномерным случаем сохраняется тотально. Ту же роль играют *последовательности Коши*. Если установлено существование предела $f(x) \to A$ при $x \to a$, то $f(x_k) \to A$ на любой последовательности $x_k \to a$, и обратно.

• Из любой ограниченной последовательности $\boldsymbol{x}^k$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность (*лемма Больцано – Вейерштрасса*).

• Непрерывная на ограниченном замкнутом множестве функция $y = f(\boldsymbol{x})$ ограничена снизу и сверху, и достигает своих минимального и максимального значений (*теорема Вейерштрасса*).

• Функция $f(\boldsymbol{x})$, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве X, автоматически *равномерно непрерывна*[6] на X (*теорема Кантора*).



[5] И непрерывна на $X \subset \mathbb{R}^n$, если непрерывна в любой точке X.

[6] Функция $f(\boldsymbol{x})$ равномерно непрерывна на X, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое δ, что

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad \|x - y\| < \delta$$

для любых $x, y \in X$.

§4. Частные производные

Если у $f(x_1, \ldots, x_n)$ зафиксировать все переменные кроме x_i, — получится функция одной переменной x_i, её обыкновенную производную называют частной производной $f(\boldsymbol{x})$ по x_i, и обозначают $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, или f'_{x_i}. Избежать недопонимания проще всего, рассмотрев несколько примеров.

$$z = xy^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy;$$

$$p = \frac{RT}{V} \qquad \Rightarrow \qquad p'_T = \frac{R}{V}, \quad p'_V = -\frac{RT}{V^2};$$

$$x = \sin(\omega t + \varphi) \qquad \Rightarrow \qquad x'_t = \omega \cos(\omega t + \varphi), \quad x'_\varphi = \cos(\omega t + \varphi).$$

• Пусть $z = f(u, v)$. Тогда производная функции одной переменной $z(t) = f(u(t), v(t))$ равна

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} u'_t + \frac{\partial f}{\partial v} v'_t. \qquad \textbf{(?)}$$

Конечно, определить частную производную — дело нехитрое. Вопрос в другом. Какова роль частных производных в анализе функций многих переменных?