Игрушечная модель выводит мысль
из замешательства
и даёт импульс в продуктивном направлении.

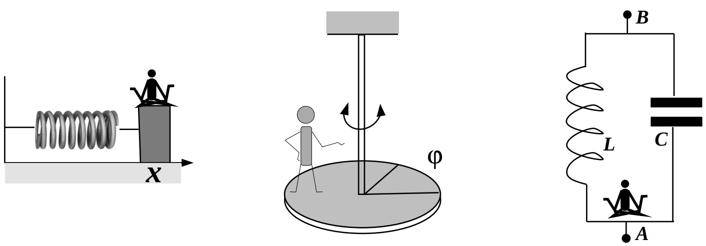
МА-8. *ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ*

§1. Дифференциальные описания

По мере изучения анализа и физики человек начинает понимать, что дифференциальное исчисление — это ДНК Вселенной. Возникает даже недоумение. Откуда у дифференциальных описаний всепроникающая сила? А секрет-то весьма прост. Процессы, разворачивающиеся во времени, не укладываются в голове одномоментно, фотографически. О движении кометы или остывании утюга человеку, как и Создателю, легче судить «здесь и сейчас», а не как о траектории $x(t)$ на всей оси времени. Поэтому *закон Ньютона*[1],

$$m\ddot{x} = F, \quad \text{равносильно} \quad m\dot{v} = F, \tag{1}$$

описывает динамический процесс $x(t)$, или $v(t)$, в каждый данный момент, в каждой данной точке, озадачивая нас по поводу траекторий в целом.



(2)

[1] Рáвно как и другие физические законы.

Разумеется, в (1) необходимо указать, как сила F зависит от текущего положения точки $x(t)$ и/или скорости $\dot{x}(t) = v(t)$. В частности, **«маятник на пружине»** (2) движется в соответствии с уравнением $m\ddot{x} + kx = 0$, где k — коэффициент упругости пружины, m — масса грузика. **Крутильные колебания** описывает такое же уравнение

$$I\ddot{\varphi} + J\varphi = 0,$$

I – момент инерции диска, $J\varphi$ – крутящий момент стержня.

В компанию (2) попадает и **колебательный контур**, представляющий собой электрический маятник. Уравнение колебаний снова имеет тот же вид,

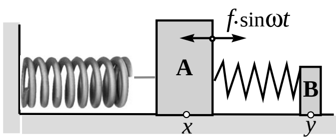
$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0,$$

названия коэффициентов другие: q — электрический заряд, L — индуктивность, C — емкость. Место «возвращающей силы» занимает электрическое напряжение q/C.

При наличии вязкого трения уравнение, например, $m\ddot{x} + kx = 0$ усложняется[2], приобретая вид

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0. \tag{3}$$

Далее обстоятельства и факторы растут как снежный ком. Появляются задачи с несколькими взаимодействующими телами, и там возникают уже системы дифференциальных уравнений. Прикиньте хотя бы описание системы из двух грузиков:



[2]В связи с появлением силы вязкого трения.

Так что спрос на решение *дифференциальных уравнений* широк и многообразен[3], а соответствующая математическая дисциплина изящна и глубока. Но первые шаги (самые первые) имеет смысл сделать в рамках матанализа.

§2. Простейшие уравнения

Решение дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(t) \tag{4}$$

сводится к обыкновенному интегрированию,

$$x(t) = \int f(t)dt + c,$$

где c — произвольная константа, которая выбирается обычно из *начального условия* типа $x(0) = x_0$, в связи с чем часто сразу пишут

$$x(t) = x(0) + \int\limits_0^t f(s)ds. \tag{5}$$

Вообще говоря, называть (4) дифференциальным уравнением даже язык не поворачивается. Дана производная, надо найти первообразную. Что тут нового? Но глубокие воды начинаются с маленьких ручейков. Так что лицезрея только (4), выводы делать рано.

Несколько сложнее уравнение, $\dot{x} = f(x)$, т. е. $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$, которое переписывают в виде

$$\frac{dx}{f(x)} = dt,$$

и после интегрирования получают

$$\int \frac{dx}{f(x)} = \int dt = t + c, \tag{6}$$

что неявно определяет функцию $x(t)$. Всё благополучно разрешается, если интеграл в (6) берётся, что случается, когда задача «хорошо поставлена». Высшими силами, например.

[3]Уравнения электродинамики, диффузии, распространения волн и эпидемий, гидро- и аэродинамики — *дифференциальные*.

В частности, для $\underline{\dot{x} = \lambda x}$ легко получаем:

$\int \frac{dx}{x} = \int \lambda dt$, откуда $\ln x = \lambda t + \mathrm{const}$, окончательно $\underline{x(t) = ce^{\lambda t}.}$

Заметим, что уравнение

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{7}$$

в общем случае уже не решается ни в элементарных функциях, ни в квадратурах. То есть решение не удаётся записать даже с участием интегралов. При этом «нерешаемыми»[4] оказываются самые простые с виду уравнения. Например, $\dot{x} = x^2 + t^2$.

Рассмотрим для иллюстрации несколько примеров.

• *В момент $t = 0$ двигатель лодки выключается. Какое расстояние лодка пройдет по инерции, если скорость в момент выключения — v_0, а сила сопротивления воды пропорциональна скорости, $F = -\beta v$?*

Интегрирование уравнения движения,

$$m\frac{dv}{dt} = -\beta v,$$

даёт

$$\int \frac{dv}{v} = -\frac{\beta}{m}\int dt \quad \Rightarrow \quad \ln v + C = -\frac{\beta}{m}t.$$

Константа определяется из условия $v(0) = v_0$. В итоге

$$v(t) = v_0 e^{-\dfrac{\beta}{m}t}.$$

Окончательно,

$$S_{max} = \int\limits_0^\infty v dt = -\frac{v_0 m}{\beta} e^{-\dfrac{\beta}{m}t}\Bigg|_0^\infty = \frac{v_0 m}{\beta}$$

[4]Но в этой «нерешаемости» нет ничего страшного, о чём будем говорить уже в курсе *дифференциальных уравнений.*

• ***Реактивное движение.*** В неподвижной системе координат в некоторый момент масса ракеты равна M, скорость — v. Через малый промежуток времени $\triangle t$ скорость ракеты увеличится на $\triangle v$, масса уменьшится на $\triangle M$, причём $\triangle M$ будет иметь некоторую скорость V.

◀ Закон сохранения количества движения

$$Mv = (M - \triangle M)(v + \triangle v) + \triangle M \cdot V$$

после деления на $\triangle M$ и перехода к пределу при $\triangle M \to 0$ приводит к

$$M\frac{dv}{dM} + V_g = 0, \quad \text{или} \quad dv = -V_g \frac{dM}{M},$$

где $V_g = V - v$ — скорость истечения газов.

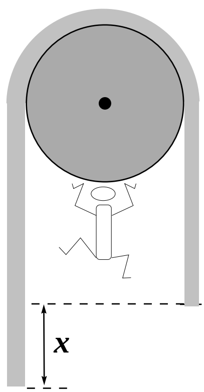
Интегрирование последнего уравнения даёт

$$v = \int dv = -V_g \int \frac{dM}{M} = -V_g \ln M + C.$$

Константа C определяется, например, из условия $M = M_0$ при $v = 0$, что даёт $v = V_g \ln \dfrac{M_0}{M}$, откуда следует *формула Циолковского*

$$\frac{M_0}{M} = e^{v/V_g}. \quad ►$$

• *Веревка длины l перекинута через блок. В начале один из свисающих концов длиннее другого на h. Найти x в момент t. Трение отсутствует.*



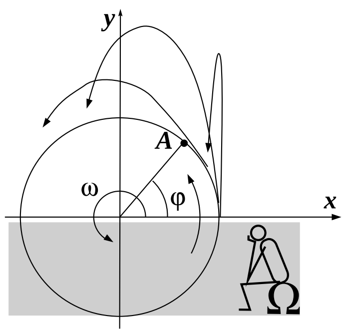
◀ При плотности веревки (на единицу длины) равной ϱ *вес* длины x будет $\varrho g x$, а *масса* всей веревки ϱl. Закон движения (Ньютона) принимает вид

$$\rho\, l \frac{1}{2}\ddot{x} = \rho g x, \quad \text{т.е.} \quad \ddot{x} = \frac{2g}{l}x.$$

Подстановка $x = e^{\lambda t}$ приводит, с учётом начальных условий $x(0) = h$, $\dot{x}(0) = 0$, к результату

$$x(t) = \frac{h}{2}\left(e^{\sqrt{\frac{2g}{l}}\,t} + e^{-\sqrt{\frac{2g}{l}}\,t}\right). \quad ►$$

• *Точильное колесо радиуса R, погруженное нижней половиной в воду, вращается с угловой скоростью ω. На какую максимальную высоту забрасываются брызги?*



◀ Фиксируем на ободе колеса некоторую точку A. Её координата y меняется по закону

$$y = R\sin\omega t, \text{ откуда } \dot{y} = R\omega\cos\omega t.$$

Брызги, срывающиеся с колеса в точке A, взлетают на высоту

$$h = y + \frac{\dot{y}^2}{2g} = R\sin\varphi + \frac{R^2\omega^2}{2g}\cos^2\varphi,$$

где $\varphi = \omega t$.

В точке максимума производная h по φ должна быть равна нулю,

$$\frac{dh}{d\varphi} = R\cos\varphi - \frac{R^2\omega^2}{2g}2\cos\varphi\sin\varphi = 0,$$

откуда либо $\cos\varphi = 0$, либо $\sin\varphi = g/R\omega^2$. ▶

§3. Уравнения второго порядка

Как уже отмечалось, малые колебания маятников единообразно описываются уравнением

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{8}$$

Общим решением (8) служит[5]

$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta),$$

где A – амплитуда, δ – сдвиг по фазе, ω – круговая частота. Задание начальных условий $x(0)$, $\dot{x}(0)$ определяет выбор констант A, δ.

При наличии *вязкого трения* уравнение (3), т. е.

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{9}$$

[5]Легко проверяется дифференцированием.

сопряжено с некоторыми проблемами. Обойтись тригонометрическими функциями при решении (9) уже не удаётся. Трение влечёт за собой энергетические потери, и колебания должны затухать. В качестве решения напрашивается $e^{\lambda t}$. Поскольку дифференцирование экспоненты даёт $\left(e^{\lambda t}\right)' = \lambda e^{\lambda t}$, подстановка $e^{\lambda t}$ в (9) приводит к $(\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2)e^{\lambda t} = 0$. Поэтому, если λ — корень уравнения

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2 = 0, \tag{10}$$

то $e^{\lambda t}$ удовлетворяет (9). Поэтому общее решение имеет вид

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

где λ_1, λ_2 — корни (10).

В случае комплексных корней λ_1, λ_2 возникает впечатление, что нашла коса на камень. Но тревога оказывается ложной. Более того, все разрешается наилучшим образом — эффективно и просто. Если $e^{\lambda t}$ удовлетворяет уравнению (9) при $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, — то уравнению (9) удовлетворяет как действительная часть функции

$$e^{\alpha t}(\cos\beta t \pm i \sin\beta t),$$

так и мнимая. Поэтому все действительные решения уравнения (9) исчерпываются семейством

$$x(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos\beta t + c_2 \sin\beta t).$$