Ability may get you to the top,
but it takes character to keep you there.
John Wooden

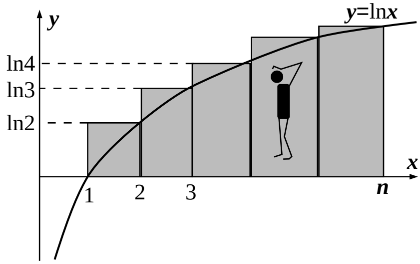
МА-73. *ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА*

§1. Длины, площади

• Площадь под синусоидой

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 2.$$

• ***Формула Стирлинга.*** Сумма $\ln n! = \ln 1 + \dots + \ln n$ равна сумме площадей заштрихованных прямоугольников,



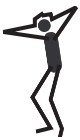
и может быть приближённо заменена площадью под кривой $\ln x$. Поэтому

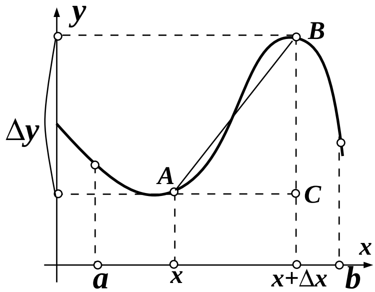
$$\ln n! \simeq \int_1^n \ln x \, dx = x \ln x - x \Big|_1^n \simeq \ln \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

т. е. $n! \simeq (n/e)^n$. Прибавление площадей выступающих над кривой $\ln x$ треугольников приводит к более точному результату

$$n! \simeq \sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n .$$

• **Длина дуги.** Пусть $\triangle s$ обозначает длину дуги кривой $y = f(x)$ между точками A и B.





Из прямоугольного треугольника ABC

$$\triangle s \simeq \sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2} = \sqrt{1 + (\triangle y^2 / \triangle x^2)} \triangle x.$$

Поэтому $ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$. Интегрирование дифференциала ds от a до b даёт формулу вычисления длины дуги на любом конечном участке.

Тестовый пример — длина c_R окружности $x^2 + y^2 = R^2$. На верхней полуокружности

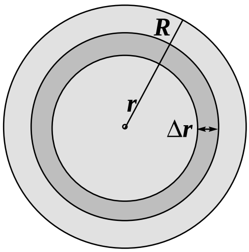
$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \qquad y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

В результате

$$\frac{c_R}{2} = \int_{-R}^{R} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = R \int_{-R}^{R} \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = R \arcsin \frac{x}{R} \Big|_{-R}^{R} = \pi R.$$

Что касается площадей фигур, то они обычно строятся на базе покрытия фигур мелкими квадратиками с последующим предельным переходом, что приводит к *двойным интегралам*, см. далее. Метод достаточно универсален, но в конкретных случаях существуют более экономные приемы, использующие специфику задачи, например, симметрию. Скажем, вычисление площади круга, при известной формуле длины окружности, разбиение на квадратики выглядело бы насмешкой над здравым смыслом. Действовать тут надо более рационально.

• Площадь круга радиуса R можно вычислять как сумму площадей тонких колец радиуса r и толщины $\triangle r$.



В свою очередь площадь кольца в первом приближении равна $2\pi r \triangle r$. Это определяет дифференциал площади круга $dS = 2\pi r\,dr$ *при разбиении на кольцевые слои*, что в итоге позволяет вычислить площадь круга

$$S_R = \int\limits_0^R 2\pi r\,dr = \pi R^2.$$

Пример рассматривается не в качестве изобретения велосипеда, а как образец для подражания, демонстрирующий стереотип использования симметрии задачи.

• Найдём площадь поверхности вращения[1] при вращении кривой

[1]Мы пока делаем вид, что все просто, хотя здесь есть подводные камни, см. «парадокс Шварца».

$y = f(x)$ вокруг оси x. Малый элемент длины дуги ds вращается вокруг оси x на расстоянии $y = f(x)$. Поэтому площадь, описываемая элементом ds при полном обороте, равна

$$dS = 2\pi y ds = 2\pi y\sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

что после интегрирования в тех или иных пределах даёт желаемый «криволинейный» результат. Вращение полуокружности, например, порождает сферу. Площадь вычисляется по найденному рецепту:

$$S = 2\pi \int\limits_{-R}^{R} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx = 2\pi \int\limits_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = 4\pi R^2.$$

§2. Вычисление моментов инерции

При вращении механического тела вокруг некоторой фиксированной оси с переменной угловой скоростью $\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$ каждая частица массы $\triangle m_i$, находящаяся от оси на расстоянии r_i, движется со скоростью $v_i = r_i\omega$ и ускорением

$$\dot{v}_i = r_i\dot{\omega} = r_i\ddot{\varphi}.$$

Умножая закон движения каждой частицы $\triangle m_i\dot{v}_i = F_i$ на r_i и суммируя по i, после перехода к пределу при $\triangle m_i \to 0$ получим

$$J\ddot{\varphi} = M,$$

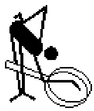
где M — результирующий момент[2] действующих сил, J — момент инерции тела, представляющий собой интеграл $\boxed{\int\limits_V r^2 dm}$, в котором суммирование производится по объёму тела.

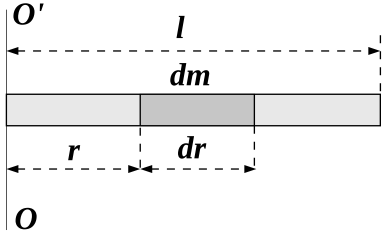
Найдем моменты инерции некоторых стандартных тел.

• ***Однородный стержень длины l***. Ось вращения OO' проходит

[2]Обратим внимание, что момент сил, также как угловая скорость, — это вектор, см. «Векторный анализ».

перпендикулярно стержню через его конец.

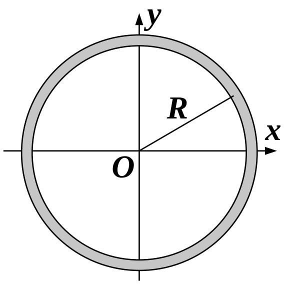


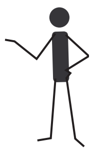


Элемент длиной dr имеет массу $dm = m\dfrac{dr}{l}$. Поэтому

$$J = \int_0^l r^2 dm = \int_0^l \frac{m}{l} r^2 dr = \frac{ml^2}{3}.$$

• ***Обруч*** *при условии, что ось вращения проходит через центр и лежит в плоскости обруча.*





(1)

Из соображений симметрии ясно, что моменты инерции относительно перпендикулярных осей x, y равны, $J_x = J_y$, т. е.

$$J_x = \int x^2 dm, \qquad J_y = \int y^2 dm,$$

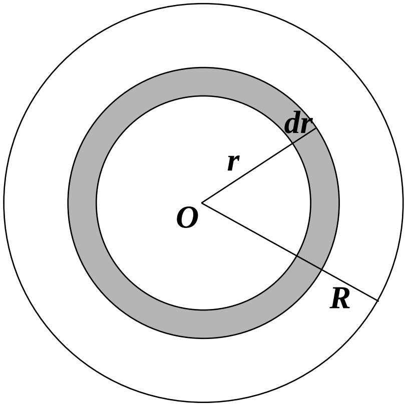
откуда

$$2J = J_x + J_y = \int (x_i^2 + y_i^2) dm = \int R^2 dm = mR^2,$$

что даёт

$$J = \frac{mR^2}{2}.$$

• ***Однородный диск*** радиуса R. *Ось проходит через центр перпендикулярно плоскости диска.*



Выделим из диска обруч радиуса r и ширины dr. Его масса равна

$$dm = m\frac{dS}{S} = m\frac{2rdr}{R^2}, \qquad S = \pi R^2.$$

Поэтому

$$J = \frac{2m}{R^2}\int\limits_0^R r^3 dr = \frac{mR^2}{2}.$$

• ***Однородный диск*** *радиуса R относительно диаметра* (рисунок тот же, но теперь ось лежит в плоскости диска). Момент инерции выделенного обруча (1) относительно диаметра равен $dJ = dmr^2/2$. Отсюда

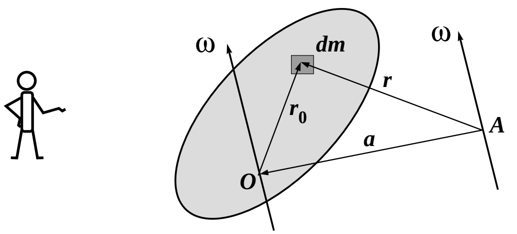
$$J = \frac{1}{2}\int\limits_0^R r^2 dm = \frac{m}{R^2}\int\limits_0^R r^3 dr = \frac{mR^2}{4}.$$

• Образовавшуюся небольшую коллекцию моментов инерции имеет смысл пополнить следующим результатом, который значительно расширяет ассортимент.

Теорема Штейнера. *Если момент инерции J_0 относительно оси, проходящей через центр тяжести тела, известен, то момент* *инерции J_A относительно параллельной оси, отстоящей от первой на расстоянии a, определяется формулой*

$$J_A = J_0 + ma^2.$$

◀ Ситуацию иллюстрирует рисунок



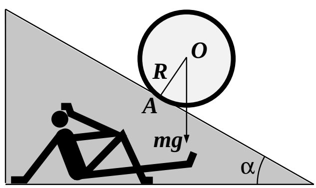
(2)

Подстановка в $J = \int r^2 dm$ значения[3]

$$r = r_0 + a \quad \Rightarrow \quad r^2 = r_0^2 + a^2 + 2r_0 \cdot a, \tag{3}$$

с учётом $\int r_0 dm = 0$ даёт нужный результат. ▶

6. *С каким ускорением полый цилиндр радиуса R скатывается с наклонной плоскости, рис. (4)?*



(4)

Уравнение моментов относительно мгновенной оси вращения в данном случае имеет вид

$$J_A \frac{d\omega}{dt} = mgR \sin\alpha.$$

В силу $v = \omega R$ и $J_A = 2mR^2$, ускорение цилиндра получается равным

$$\dot{v} = \frac{1}{2} g \sin\alpha.$$

[3]Соотношения в (3) векторные, $r_0 \cdot a$ — скалярное произведение.