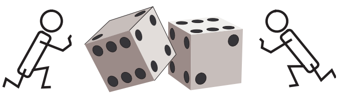
Whether you think you can or
whether you think you can't, you're right!
Henry Ford

MA-72. *ТЕХНИКА ИНТЕГРИРОВАНИЯ*

§1. Замена переменной

Ретроспективно оглядываясь на дифференцирование, легко выделить в ремесле взятия производных две составляющих. Во-первых, нужно знать или иметь перед глазами таблицу производных простейших функций. Во-вторых, нужно уметь комбинировать элементы таблицы, опираясь на *свойства производных*: производная суммы, произведения, частного, композиции функций.



Со взятием неопределённых интегралов — такая же история. «Таблица», собственно, та же самая, разве что вывернутая наизнанку. Да и «приёмы комбинирования» те же, но «киноплёнка» крутится в обратном направлении. Впечатления, соответственно, другие. Пересматривать приходится заново.

• Интегрирование, как и дифференцирование, — линейная операция, т. е. если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, а $G(x)$ — первообразная $g(x)$, то

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha F(x) + \beta G(x)$$

при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

• Широко распространены переходы к интегрированию по другой переменной, в основе которых лежит формула

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)), \tag{1}$$

где $F(g)$ — первообразная $f(g)$.

Равенство (1) представляет собой опять-таки «вывернутое наизнанку» правило дифференцирования сложной функции. Дифференцируя в (1) $F(g(x))$, получаем

$$F'_g(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x),$$

т. е. как раз подынтегральное выражение.

Фокус практического использования формулы (1) для $\displaystyle\int \varphi(x)dx$ заключается в изобретении представления

$$\varphi(x) = f(g(x))g'(x)$$

с функцией f, первообразная которой известна или легко вычисляется. Часто это получается само собой.

• Например,

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x \, d \sin x = \frac{1}{4} \sin^4 x$$

или

$$\Phi(x) = \int \frac{2x dx}{1 + x^4} = \int \frac{dx^2}{1 + x^4} = \operatorname{arctg} x^2.$$

За кадром-то здесь фигурирует замена $x^2 = t$, далее берётся интеграл $\displaystyle\int \frac{dt}{1 + t^2}$, после чего исполняется возврат к переменной x. Понятно, что сию кухню проще держать в голове, не оставляя следов.

• Замена, конечно, не всегда сама напрашивается. Иногда приходится повозиться. Не так легко, например, додуматься, что проблему взятия интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ решает замена $t = \sqrt{1+x^2}+x$. Возведение $t-x = \sqrt{1+x^2}$ в квадрат даёт

$$x = \frac{t^2-1}{2t}, \quad \sqrt{1+x^2} = \frac{t^2+1}{2t}, \quad dx = \frac{t^2+1}{2t^2}dt,$$

откуда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|\sqrt{1+x^2}+x|.$$

Последний пример демонстрирует, что трюк (1) может быть лишь элементом более сложных манипуляций.

- Если $F(x)$ — первообразная $f(x)$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b).$$

§2. Интегрирование по частям

Обращение правила дифференцирования произведения приводит к формуле *интегрирования по частям*

$$\int udv = uv - \int vdu, \tag{2}$$

проверяемой дифференцированием с учётом

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Диапазон применения (2) весьма широк. Осваивать инструмент надо на примерах

- $\int \ln x dx = x\ln x - \int xd\ln x = x\ln x - \int dx = x\ln x - x,$
- $\int x\cos xdx = \int xd\sin x = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x.$

Возможны и более крутые виражи

- $\int e^x\cos xdx = \int e^x d\sin x = e^x\sin x - \int e^x\sin xdx =$

$$= e^x \sin x + \int e^x d\cos x = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx,$$

откуда $2\int e^x \cos x dx = e^x(\sin x + \cos x)$.

В том же духе:

- $$\int \sqrt{\alpha^2 - x^2} dx = x\sqrt{\alpha^2 - x^2} - \int \frac{\alpha^2 - x^2 - \alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} dx =$$
$$= x\sqrt{\alpha^2 - x^2} - \int \sqrt{\alpha^2 - x^2}\, dx + \alpha^2 \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}},$$

откуда

$$\int \sqrt{\alpha^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{\alpha^2 - x^2} + \frac{\alpha^2}{2} \arcsin \frac{x}{\alpha}.$$

Всё это к существу интегрирования имеет весьма отдалённое отношение. В основном, это касается жонглирования и комбинирования простых фактов, что широко распространено во всех сферах деятельности. Часть населения устремляется к задачам олимпиадного уровня, но и в рядовых ситуациях необходима определённая ловкость.

- $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \int \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx =$$
$$\frac{1}{2a}(\ln|x-a| - \ln|x+a|) = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|.$$

Следующий пример несколько сложнее.

- $$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d(x/2)}{\sin(x/2)\cos(x/2)} = \int \frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)} \frac{d(x/2)}{\cos^2(x/2)} =$$
$$= \int \frac{d\,\mathrm{tg}(x/2)}{\mathrm{tg}(x/2)} = \ln \left| \mathrm{tg}\, \frac{x}{2} \right|,$$

Не следует забывать, что некоторые интегралы не выражаются через элементарные функции[1], например,

$$\int \frac{\sin x}{x}\, dx, \qquad \int \frac{dx}{\ln x}.$$

[1]Тогда как дифференцирование не выводит из области элементарных функций.