A not getting what you want
is sometimes a stroke of luck.
From somewhere

МА-7. *ИНТЕГРАЛ*

§1. Первообразная

• *Операция, обратная дифференцированию, называется* ***интегрированием****. Функцию $F(x)$ — такую, что*

$$F'(x) = f(x),$$

равносильно $\boxed{dF(x) = f(x)dx}$, *— называют* ***первообразной*** *функции $f(x)$ или* ***интегралом*** *от $f(x)$.*

Если $F(x)$ — первообразная $f(x)$, то и $F(x) + C$ — первообразная $f(x)$, поскольку производная константы C равна нулю.

• *Совокупность всех первообразных $f(x)$ называют* ***неопределённым интегралом*** *и обозначают*

$$\int f(x)dx. \tag{1}$$

Под знаком интеграла $\int$ в (1) стоит дифференциал первообразной, $f(x)dx = dF(x)$. Поскольку, например, $d\sin x = (\sin x)'dx = \cos x dx$, то

$$\int \cos x dx = \sin x.$$

Точнее говоря, $\int \cos x dx = \sin x + C$, но константу мы будем опускать.

Таблица производных элементарных функций легко трансформируется в таблицу неопределённых интегралов.

$$\int e^x dx = e^x, \qquad \int a^x dx = a^x / \ln a, \quad a > 0,\ a \neq 1.$$

$$\int x^\lambda dx = \frac{1}{\lambda+1} x^{\lambda+1}, \quad \lambda \neq -1.$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x, \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x.$$

Не будем далее ломиться в открытую дверь. Некоторое количество формул, конечно, полезно иметь в запасе, дабы не ходить к соседу за справкой в процессе решения задач.

Что касается потенциальной полезности неопределённого интеграла, то первое, что приходит в голову, это задачи, в которых даны соотношения скоростей, неизвестны — пройденные пути. Не обязательно о километрах речь. Скажем, численность популяции $x(t)$ растёт со скоростью $\dot{x} = kx$. Конечно, интеграл сразу бы решал вопрос в ситуации

$$\dot{x} = \varphi(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = \int \varphi(t) dt.$$

Но и в случае $\dot{x} = kx$ интегрирование спасает:

$$\frac{dx}{dt} = kx \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = kdt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = \int kdt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ln x = kt + C \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(0)e^{kt},$$

где константа интегрирования[1] C выбрана из условия $e^C = x(0)$.

При этом возникают смутные ощущения, что подобные трюки работают также в более сложных ситуациях.

- $$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \quad (?)$$

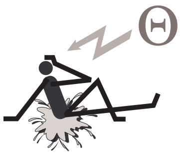
[1] О наличии которой надо вовремя вспоминать.

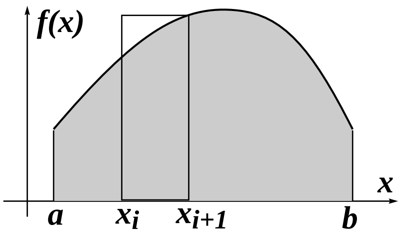
- $af(x)dx = a\int f(x)dx \quad (?)$
- $\int dx = x, \quad \int df(x) = f(x) \quad (?)$

§2. Определённый интеграл

Интегрирование, как ни странно, возникло и какое-то время развивалось независимо от дифференцирования. Источником послужила задача определения площади под графиком функции $y = f(x)$. В основу решения была положена естественная аппроксимационная идея. Отрезок $[a, b]$ разбивается на n сегментов $[x_i, x_{i+1}]$ длины $\triangle x_i$, где $x_0 = a$, $x_n = b$ рис. (3). На каждом i-м отрезке выбирается произвольная точка ξ_i, и рассматривается сумма

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\triangle x_i. \tag{2}$$





(3)

• *Предел суммы (2), если таковой существует и не зависит от разбиения $[a, b]$ и выбора точек ξ_i, при стремлении к нулю максимальной длины $\triangle x_i$ — называют определённым интегралом $f(x)$ от a до b и обозначают* $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Конечно, в таком определении слишком много «если». Кто будет производить разбор полётов в каждом конкретном случае? Поэтому идут обычно по несколько иному пути.

На каждом промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ берутся точная нижняя m_i и точная верхняя M_i границы $f(x)$, и вводятся в рассмотрение две *суммы Дарбу (нижняя и верхняя)*

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \triangle x_i, \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \triangle x_i$$

В силу $m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i$ имеем $s \leqslant \sigma \leqslant S$. Поэтому для существования предела σ достаточно, чтобы суммы Дарбу сходились к одному пределу, т. е.

$$S - s \to 0.$$

Общий предел s и S, если таковой существует, и называют *определённым интегралом.* Оба определения эквивалентны, но второе легче проверять. При этом в случае существования интеграла $\int_a^b f(x)dx$ в указанном смысле функция $f(x)$ называется ***интегрируемой по Риману***, а сам интеграл — ***интегралом Римана.***

• ***Теорема.*** *Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ существует.*

◀ Доказательство обеспечивает *теорема Кантора*, гарантирующая равномерную непрерывность $f(x)$. Поэтому по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что $\triangle x_i < \delta \Rightarrow M_i - m_i < \varepsilon$ для всех i, откуда

$$\sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \triangle x_i < \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \triangle x_i = \varepsilon(b - a),$$

что даёт $S - s \to 0$. ▶

В случае кусочной непрерывности $f(x)$ (конечного числа разрывов) результат остается в силе, поскольку[2]

$$\int\limits_a^b = \int\limits_a^{c_1} + \dots + \int\limits_{c_i}^{c_{i+1}} + \dots + \int\limits_{c_n}^b,$$

где c_i — точки разрыва.

§3. Взаимосвязь интегралов

Если рассмотреть интеграл

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt,$$

как функцию верхнего предела, то

$$\triangle\Phi = \Phi(x + \triangle x) - \Phi(x) = \int\limits_x^{x+\triangle x} f(t)dt = f(\xi)\triangle x + o(\triangle x),$$

что приводит к $\boxed{\Phi'(x) = f(x)}$, т. е. Φ — первообразная.

◀ Вот более аккуратное рассуждение. Обозначим через ξ_{min} и ξ_{max} наименьшее и наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[x, x + \triangle x]$. Очевидно, площадь $\triangle\Phi$ заключена между площадями прямоугольников $\xi_{min}\triangle x$ и $\xi_{max}\triangle x$, поэтому

$$\xi_{min} \leqslant \frac{\triangle\Phi}{\triangle x} \leqslant \xi_{max}.$$

При $\triangle x \to 0$: $\xi_{min} \to f(x)$, $\xi_{max} \to f(x)$, в силу непрерывности $f(x)$. Тогда по теореме «о трёх собачках» $\dfrac{\triangle\Phi}{\triangle x} \to f(x)$, т. е. $\Phi'(x) = f(x)$. ▶

Таким образом, ***площадь*** $\Phi(x)$ ***под графиком*** $y = f(x)$ — ***это первообразная функции*** $f(x)$***.*** Изменение точки отсчёта a добавляет к $\Phi(x)$ некоторую константу. От любой

[2] *Аддитивность интеграла* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ вытекает из определения.

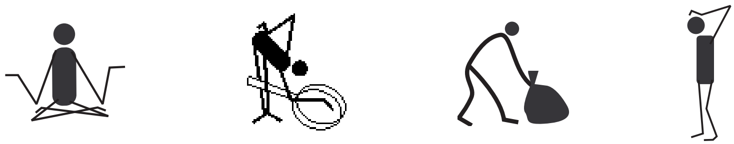
другой первообразной $F(x)$ функция $\Phi(x)$ отличается на постоянную величину, поэтому всегда[3]

$$\Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx,$$

что численно равно площади под графиком $y = f(x)$ на промежутке $[a, b]$. Если $f(x)$ на $[a, b]$ меняет знак, то из построения ясно, что площади фигур между графиком и осью x-ов засчитываются со знаком «плюс» там, где $f(x) > 0$, и — со знаком «минус» там, где $f(x) < 0$.

Дифференцируя $\Phi(\varphi(x))$ по формуле дифференцирования сложной функции, имеем

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^{\varphi(x)} f(t)dt = f(\varphi(x))\varphi'(x)$$



При манипулировании определёнными интегралами нередко требуются оценки в виде неравенств. Вот два очень простых часто используемых факта.

• Если $m \leqslant f(x) \leqslant M$ на $[a, b]$, то

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a). \quad (?)$$

[3]Заметим, что разность $F(b) - F(a)$ часто записывают в виде $F(x)|_a^b$.

• Пусть на $[a, b]$ функция $g(x)$ знакопостоянна и $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx$$

при некотором $\mu \in [m, M]$. **(?)**

- $$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx \quad (?)$$
- $$\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx \quad (?)$$
- $$\int\limits_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx \quad (?)$$
- $$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx \quad (?)$$
- $$\int\limits_a^b f(x)dx \geqslant 0, \quad \text{если} \quad f(x) \geqslant 0 \quad (?)$$