If the shoe fits, its ugly.
Gold's law

МА-6. *КОНТРПРИМЕРЫ И ПАРАДОКСЫ*

§1. Об ощущении берегов

Когда плывёшь по течению в окружении теорем, необходимо чувствовать берега. То есть иметь представление, что там, за пределами оговоренных условий. Куда можно угодить, делая шаг в сторону. Поэтому примеры и контрпримеры не менее важны чем теоремы.

Ещё важнее понимать, обеспечивают ли «оговоренные условия» безопасность «рейса». Исключены ли аномалии. Не могут ли хлынуть в пробоину определений какие-нибудь несуразности. Дело в том что некоторые предположения теорем, находясь в тени, кажутся несущественными, и выводы мерещатся справедливыми без них. Вот тогда и возникает потребность в контрпримерах.

§2. Ловушка непрерывности

Всякое определение минирует *математику*. Казалось бы, что может быть проще и естественнее понятия непрерывной функции. Но в расщелину соответствующего определения просачиваются многочисленные уродцы.

Первые признаки того, что непрерывность вмещает в себя всякую чертовщину, возникают довольно просто. График везде непрерывной[1] функции $y = x \sin \dfrac{1}{x}$ невозможно нарисовать, а график непрерывной в нуле функции

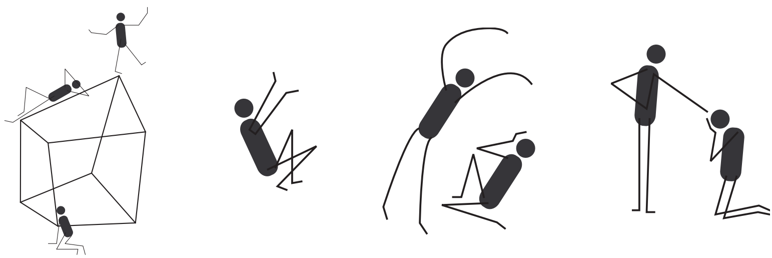
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \quad \text{рационально}, \\ x, & \text{если} \quad x \quad \text{иррационально} \end{cases}$$

всюду дыряв. Ещё экзотичнее ***функция Римана***

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{если} \quad x = \dfrac{m}{n}, \quad \text{дробь } \dfrac{m}{n} \text{ несократима}, \\ 0, & \text{если} \quad x \qquad\qquad \text{иррационально}, \end{cases} \tag{1}$$

В подобное загодя трудно поверить. Ибо можно ли заранее вообразить *функцию непрерывную в иррациональных и разрывную в рациональных точках*[2].

◀ Известно, что иррациональное x_0 невозможно хорошо приблизить рациональной дробью $\dfrac{m}{n}$ с ограниченным знаменателем[3]. Поэтому чем меньше окрестность x_0, тем больше знаменатели входящих туда дробей $\dfrac{m}{n}$ — и тем меньше значения $f\left(\dfrac{m}{n}\right) = \dfrac{1}{n}$. В итоге $f(x) \to f(x_0) = 0 \quad \text{при} \quad x \to x_0$. ▶



[1]Здесь и далее подразумевается непрерывное доопределение функций с «выколотыми точками».

[2]Тем более что наоборот, «*функцию непрерывную в рациональных и разрывную в иррациональных точках*» построить невозможно.

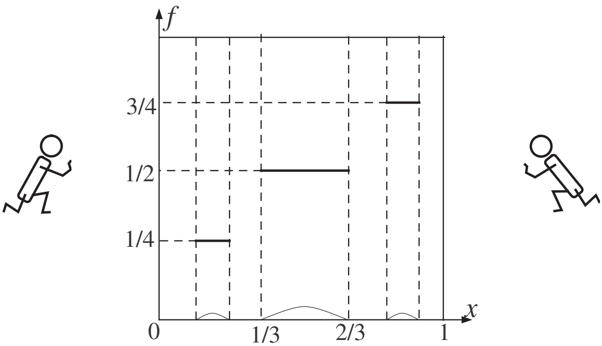
[3]См. например, *Кац М., Улам С.* Математика и логика: Ретроспектива и перспективы. «Мир».

Далее можно вспомнить *кривую Пеано* — непрерывный образ отрезка $(x(t), y(t))$, $t \in [0, 1]$, заполняющий весь квадрат[4]. Конечно, серьёзного удара по непрерывности перечисленные примеры не наносят. Да, ёмкость понятия оказывается больше, чем хотелось бы, однако неприятности терпимы. Не катастрофа, в конце концов. Но лиха беда начало.

§3. Канторова лестница*

Канторова лестница бьёт по мозгам уже сильнее. Строится она на базе **канторова множества** C, получаемого выбрасыванием третей из сегмента $[0, 1]$. Сначала $[0, 1]$ делится на три равные части, и средняя (*интервал*) удаляется. С каждой из оставшихся частей повторяется аналогичная операция — и так до бесконечности[5]. В пределе от $[0, 1]$ остается как раз множество C.

• Пусть функция $f : [0, 1] \to [0, 1]$ на **замыкании** каждого выбрасываемого (в процессе построения канторова множества) интервала — принимает значение, равное середине этого интервала. Вот так выглядит график $f(x)$ после двух шагов.



[4]См. *В. Босс.* Лекции по математике. том 12. Контрпримеры и парадоксы. URSS.

[5]Длина выброшенных третей равна $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{4}{27} + \cdots = 1$, т. е. «вся длина» $[0, 1]$ выбрасывается. Однако оставшееся множество C оказывается *равномощно континууму*, что и производит главный сюрприз.

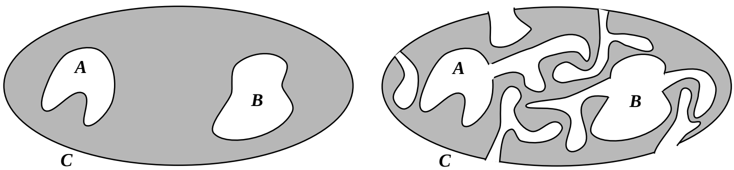
Доопределение $f(x)$ в точках второго рода по непрерывности[6] даёт *непрерывную монотонную* функцию $f(x)$, *производная* которой *почти всюду равна нулю*, — тем не менее $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Другими словами, $f(x)$ почти нигде на $[0, 1]$ не растет, успевая ощутимо вырасти на множестве нулевой меры (несмотря на непрерывность).

§4. Знаменитый пример Брауэра*

Этот удар уже не по мозгам, а едва ли не по устройству Вселенной.

• *Зададимся дурацким на вид вопросом. Могут ли на плоскости три области иметь общую границу? Не общий участок — а одну и ту же границу. Похоже на бред, но ответ — положительный.*

Идея конструкции довольно проста. Пусть в море C есть остров, на острове два озера, A и B. На сухопутной части острова выделим ε-сеть[7] S_ε. Затем от каждого озера и от моря к каждой точке S_ε пророем канал, не доводя его до этой точки на расстояние $\frac{\varepsilon}{2}$. В духе рисунка (2) справа.



(2)

На оставшуюся часть суши поместим $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть, и к точкам $S_{\varepsilon/2}$ пророем каналы, не доходящие до точек сети на $\frac{\varepsilon}{4}$. Потом накроем сушу $\frac{\varepsilon}{4}$-сетью, и так далее. Понятно, что в пределе области A, B, C разрастутся до областей A^∞, B^∞, C^∞ с общей границей Γ. Граница Γ — это все, что останется от суши. А если изначально взять остров с миллионом озер — получится *пример миллиона областей с общей границей.*

---

[6] Концы выброшенных интервалов в *канторовом множестве* C называют точками *первого рода*, остальные — *второго рода*. В точках *второго рода* $\tilde{x}$ полагается $f(\tilde{x}) = \lim f(x_k)$, где $x_k \to \tilde{x}$ и все x_k — точки *первого рода.*

[7] Эпсилон-сетью множества X называют такое его подмножество S_ε, что для любого $x \in X$ можно указать $s \in S_\varepsilon$, удалённое от x не более чем на v.

Такую галиматью возникает соблазн объявить фантасмагорией ума. Дескать, чего не бывает в больном воображении. Тем более удивительно, что картина нескольких областей с общей границей встречается не только в фантазиях, но и на практике. Итерационная процедура

$$z_{k+1} = z_k - \frac{z_k^3 - 1}{3z_k^2} \tag{3}$$

на комплексной плоскости вычисляет корень кубический из единицы, каковых имеется три,

$$1, \qquad \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \qquad \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \tag{4}$$

и есть, соответственно, три области притяжения A, B, C. Процесс (3) сходится к одному из корней (4) в зависимости от того, какой области принадлежит z_0. Пусть Γ_A, Γ_B, Γ_C обозначают границы областей A, B, C. Невероятно, но факт:

$$\Gamma_A = \Gamma_B = \Gamma_C\,, \qquad (!)$$

т. е. области притяжения имеют одну и ту же границу[8].

§5. Дифференциальная западня

Дифференцируемая функция обладает *свойством Коши*: по *теореме Дарбу её производная принимает все промежуточные значения*. Это подталкивает к выводу, что в случае дифференцируемости $f(x)$ на $[a, b]$ производная $f'(x)$ обязана быть непрерывной функцией, поскольку, мол, *свойство Коши* представляется эквивалентом непрерывности. *Неправильно то и другое.* Аргументы:

- Производная **везде дифференцируемой** функции

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}, \tag{5}$$

[8]См. п. 8.5 в книге *Кроновер Р. М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: *Постмаркет*, 2000.

равная нулю при $x = 0$ и

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \quad \text{при} \quad x \neq 0,$$

разрывна в точке $x = 0$, но обладает свойством Коши[9].

Пример (5) задаёт эталон возможных неприятностей в дифференциальном исчислении. При выборе в качестве мишени точки $x = 0$ ядром замысла обычно является произведение двух функций, одна из которых подходящим образом обнуляется в нуле, а другая, типа $\sin(1/x)$, быстро колеблется, «ускоряясь» по мере приближения к $x = 0$. Если частоты колебаний не хватает, то вместо $\sin(1/x)$ берется что-нибудь вроде $\sin(1/x^k)$. Возникающий ассортимент довольно широк.

• Везде дифференцируемая функция

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x^2}$$

имеет *неограниченную разрывную в нуле* производную, $f'(0) = 0$ и

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} \quad \text{при} \quad x \neq 0.$$

• Функция

$$f(x) = x + x^2 \sin\frac{1}{x^2}$$

имеет производную $f'(0) = 1$, но **не монотонна** в окрестности нуля.

• Функция

$$f(x) = 2x^2 + x^2 \sin\frac{1}{x^2}$$

имеет в нуле строгий минимум и равную нулю производную, но её производная в сколь угодно малой окрестности нуля принимает, как положительные, так и отрицательные значения, сколь угодно большие по модулю.

Такие примеры способствуют поддержанию бдительности, показывая не только чего надо опасаться, но и при

[9]Напомним, функции мы доопределяем по непрерывности. В данном случае $f(0) = 0$, поскольку $f(x) \to 0$ при $x \to 0$.

каких обстоятельствах. Эпизодически поговаривают о чрезмерной либеральности определения производной, которое считает дифференцируемыми в нуле функции типа $x^2\sin(1/x)$. Дескать, скверная природа таких функций портит столбовую дорогу матанализа компрометирующими закоулками. Однако проблема дифференцируемости абсолютного ответа не имеет и иметь не может. Так же как непротиворечивость гражданского или уголовного кодекса.