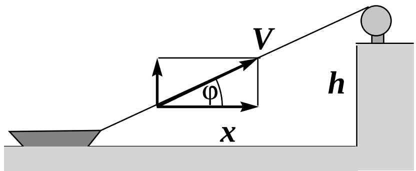
©*В.И.Опойцев* 2015 oschool.ru

Keep your eyes on the stars,
and your feet on the ground.
Theodore Roosevelt

МА-5. *КАК РАБОТАЮТ ПРОИЗВОДНЫЕ*

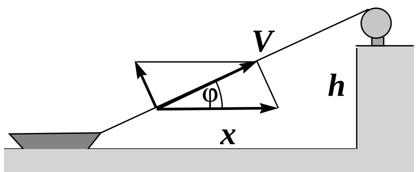
§1. Кинематический сюрприз

• *Рассмотрим простую на вид задачу. Лодка подтягивается к берегу лебёдкой, установленной на высоком берегу.*



(1)

Верёвка вытягивается со скоростью V*. С какой скоростью* $\dot{x}$ *лодка плывёт к берегу?* Обычно V раскладывают на составляющие по образцу (1), получая $\boxed{\dot{x} = V\cos\varphi}$, — но это неправильно. Раскладывать V надо иначе:



(2)

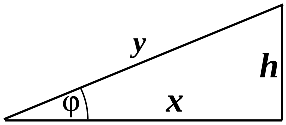
В итоге (правильное решение) $\boxed{\dot{x} = \dfrac{V}{\cos\varphi}}$, что у многих вызывает сомнение[1]. Это хорошая задача для тренировки

[1]Поскольку для определения горизонтальной силы, действующей на лодку, натяжение верёвки надо раскладывать по типу (1).

физического чутья и адекватного восприятия действительности. По крайней мере она даёт повод задуматься о бдительности при разложении сил и скоростей.

С помощью производных задача решается совсем просто.

Если в треугольнике

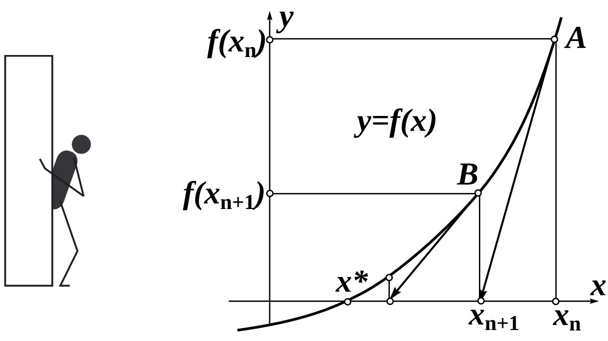


гипотенуза $y(t)$ уменьшается со скоростью $\dot{y} = V$, то в силу $y = \sqrt{x^2 + h^2}$, имеем

$$\dot{y} = \frac{2x\dot{x}}{2\sqrt{x^2 + h^2}}, \quad \text{откуда} \quad \boxed{\dot{x} = \frac{\dot{y}}{\cos\varphi}}.$$

§2. О методе Ньютона

• Для вычисления корня x^* уравнения $f(x) = 0$ широко используется итерационный *метод Ньютона*. Для n-го приближения x_n вычисляется $f(x_n)$, затем к графику функции — рис. (3) — в точке $A = \{x_n, f(x_n)\}$ проводится касательная до пересечения с осью x-ов в точке x_{n+1}.



(3)

Далее повторяется всё сначала. И так раз за разом. В естественных условиях алгоритм сходится к решению,

$$x_n \to x^* \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то ли независимо от начального приближения x_0, то ли при некоторых ограничениях. Но как процесс описать формулами? Компьютер же не будет касательные проводить циркулем и линейкой.

• Без производных здесь не обойтись. Касательная в точке A — есть прямая $y = kx+b$, причём $k = f'(x_n)$ и $f(x_n) = f'(x_n)x_n+b$, что задаёт b. Тем самым уравнение касательной

$$y = kx + b \tag{4}$$

полностью определено. Полагая в (4) $y = 0$ и решая $0 = kx_{n+1} + b$, находим точку пересечения касательной с осью иксов. В результате

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{5}$$

что представляет собой формульную запись описанной выше геометрической процедуры.

• В случае $f(x) = x^2 - 2$, $f'(x) = (x^2 - 2)' = 2x$, — процедура (5) вычисляет $\sqrt{2}$, давая последовательные приближения

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}. \tag{6}$$

Интересно, что дюжина итераций (6), начиная, допустим, с $x_0 = 1$, даёт тысячу **(!)** верных знаков после запятой.

Так что мир, оказывается, стоит не на трёх китах, а на *дифференциальном исчислении.*

§3. Дифференциальные описания

Пусть T обозначает температуру тела, находящегося в среде с температурой T_0. Как будет проходить процесс нагревания или охлаждения? Поведение $T(t)$ в целом определяется на основе естественной гипотезы: скорость $\dot{T}$ изменения T пропорциональна разности температур $T_0 - T$,

$$\dot{T} = \xi(T_0 - T),$$

где $\xi > 0$ — коэффициент пропорциональности.

Это простейший вариант *дифференциального уравнения*. На подобного сорта уравнениях базируется вся физика и другие прикладные науки. Как, скажем, движутся механические тела? Дифференциальный закон Ньютона,

$$m\ddot{x} = F,$$

обеспечил путь к решению любых механических задач[2].

Решение дифференциальных уравнений — обширная математическая дисциплина. О её отправных точках мы поговорим чуть позже в данном курсе.

§4. Пределы с помощью производных

Производные, будучи сами предельными понятиями, довольно эффективно помогают вычислять пределы с различными неопределённостями.

• Когда ищется предел отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, стремящихся к нулю функций (при $x \to a$), говорят о *неопределённости* $\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$. Если у обеих функций в точке a существуют конечные производные $f'(a)$, $g'(a)$, то

$$f(x) = f'(a)(x-a) + o(x-a), \qquad g(x) = g'(a)(x-a) + o(x-a),$$

поскольку $f(a) = g(a) = 0$. Поэтому

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a) + \triangle}{g'(a) + \triangle}, \quad \text{где} \quad \triangle = \frac{o(x-a)}{x-a} \to 0,$$

что при условии неравенства нулю хотя бы одной из производных $f'(a)$, $g'(a)$ влечёт за собой справедливость ***правила Лопиталя***:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

В случае $f'(a) \neq 0$, $g'(a) = 0$, предел бесконечен.

[2]Уравнения электродинамики, диффузии, распространения волн и эпидемий, гидро- и аэродинамики — *дифференциальные*.

Идея Лопиталя работает и в более широких условиях. Если f и g в точке a обращаются в нуль вместе со своими $k-1$ производными, и $f^k(a)$ (или $g^k(a)$) — первая ненулевая производная, то ряды Тейлора f и g начинаются с k-х членов. Поэтому

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(k)}(a)}{g^{(k)}(a)}.$$

Случай бесконечного a не исключается. Надо лишь отношение производных заменить их пределом[3],

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Правило Лопиталя работает и в случае *неопределённостей* $\frac{\infty}{\infty}$.

• Если $f(x), g(x) \to \infty$ и существует предел отношения $f'(x)/g'(x)$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

На практике встречаются неопределённости и других видов, но они легко сводятся к уже рассмотренным. Скажем, $0\cdot\infty$ можно заменить на $0/(1/\infty) = 0/0$. В ситуациях «0^0, ∞^0, 1^∞» выручает логарифмирование.

Примеры

1.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x^2-\sqrt{x})'}{(\sqrt{x}-1)'} = \lim_{x\to1}\frac{2x-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}} = 3.$$

2.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x} = \left.\frac{\alpha e^{\alpha x}-\beta e^{\beta x}}{1}\right|_{x=0} = \alpha-\beta.$$

3. Во многих случаях наиболее эффективно непосредственное использование формулы Тейлора. Например,

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}} = \lim_{x\to0}\frac{x-x+\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)}{x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)-x+\dfrac{x^2}{2}} = \frac{1}{2}.$$

---

[3] Разумеется в предположении, что он существует.