Существует достаточно света для тех,
кто хочет видеть,
и достаточно мрака для тех,
кто — не хочет.
Паскаль

МА-3. *ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ*

§1. Основные формулы

• Производная степенной функции.

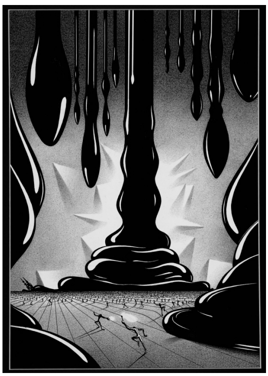
В случае x^n при целом положительном n из формулы *бинома Ньютона*

$$(x+\triangle x)^n = x^n + nx^{n-1}\cdot\triangle x + C_n^2 x^{n-2}\cdot\triangle x^2 + \cdots$$

следует

$$(x+\triangle x)^n - x^n = nx^{n-1}\triangle x + o(\triangle x),$$

откуда легко вытекает $(x^n)' = nx^{n-1}$.



[1] Рисунки *Анатолия Фоменко*

В общем случае степенной функции $y = x^\lambda$ с произвольным $\lambda \neq 0$ возни чуть больше. Сначала установим вспомогательный факт

$$◀\ \frac{(1+t)^\lambda - 1}{t} \to \lambda \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

Вводя новую переменную $s = (1+t)^\lambda - 1$ (очевидно, $s \to 0$ при $t \to 0$) и логарифмируя равенство $(1+t)^\lambda = 1 + s$, имеем

$$\lambda \ln(1+t) = \ln(1+s),$$

откуда

$$\frac{(1+t)^\lambda - 1}{t} = \frac{s}{t} = \lambda \, \frac{s}{\ln(1+s)} \, \frac{\ln(1+t)}{t} \to \lambda,$$

в силу того, что (при $t \to 0$)

$$\frac{\ln(1+t)}{t} = \ln(1+t)^{\frac{1}{t}} \to \ln e = 1.$$

Теперь легко получаем нужный результат

$$y' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{(x + \triangle x)^\lambda - x^\lambda}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\left(1 + \dfrac{\triangle x}{x}\right)^\lambda - 1}{\dfrac{\triangle x}{x}} \, x^{\lambda - 1} = \lambda x^{\lambda - 1}. ▶$$

Таким образом $\boxed{\left(x^\lambda\right)' = \lambda x^{(\lambda-1)}}$. В частности,

$$\boxed{\text{const}' = 0, \qquad x' = 1, \qquad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}.$$

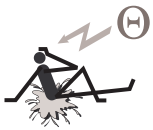
• Производная показательной функции.

◀ Для $y = a^x$ имеем

$$y' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{a^{x + \triangle x} - a^x}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} a^x \frac{a^{\triangle x} - 1}{\triangle x} = a^x \ln a,$$

поскольку
$$\frac{a^\tau - 1}{\tau} \to \ln a \quad \text{при} \quad \tau \to 0,$$
что следует из
$$\frac{a^\tau - 1}{\tau} = \frac{\sigma}{\log_a(1+\sigma)} = \frac{1}{\log_a(1+\sigma)^{1/\sigma}} \to \frac{1}{\log_a e} = \ln a,$$
где $a^\tau - 1 = \sigma$. ▶

Таким образом $\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$. В частности,



$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

Особая роль числа e при дифференцировании показательной функции — есть *та самая причина*, которая ставит e в разряд важнейших констант. Принципиальная роль показательной функции в «устройстве Вселенной» — это уже другой вопрос. Из приведённых формул ясно, например, что дифференциальному уравнению $y' = ky$ удовлетворяет функция $y = e^{kx}$. Аналогичным образом e появляется при решении любых линейных дифференциальных уравнений, которыми описывается большинство прикладных задач в физике, биологии, экономике и других областях.

Функцию e^x называют также *экспонентой.* Вместо e^x иногда используют обозначение $\exp x$.

• Производная логарифмической функции.

Функции $x = a^y$ и $y = \log_a x$ взаимообратны. Поэтому производная логарифмической функции определяется формулой *производной обратной функции.*
$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Таким образом,

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}}.$$

• Производные тригонометрических функций.

В случае $y = \sin x$ имеем[2].

$$y' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\sin(x + \triangle x) - \sin x}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \cos\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right) \frac{\sin(\triangle x/2)}{(\triangle x/2)} = \cos x,$$

с учётом установленного ранее предела

$$\frac{\sin \tau}{\tau} \to 1 \quad \text{при} \quad \tau \to 0.$$

Производная косинуса вычисляется аналогично. Можно также воспользоваться формулой производной композиции функций либо для представления

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}, \tag{$*$}$$

либо, что целесообразнее, для

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \tag{$**$}$$

Тут, как говорится, все дороги ведут в Рим. Но в случае (*) необходимы предосторожности и лишние усилия из-за «плохо выбранной дороги». Манипуляция

$$(\cos x)' = \frac{1}{2\sqrt{1 - \sin^2 x}}(-2 \sin x \cos x) = -\frac{\sin x \cos x}{\cos x} = -\sin x$$

[2]Пользуясь формулой разности синусов.

представляет собой лишь канву. Корень — функция неоднозначная, сокращать на $\cos x$, который время от времени обращается в ноль, тоже не с руки. Все эти препятствия можно обойти, но зачем лишняя работа. При опоре на (**) производная косинуса вычисляется без проблем. В итоге

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x,} \qquad \boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

Производные тангенса и котангенса вычисляются по формуле производной отношения двух функций.

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}, \qquad \boxed{(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$$

Наконец, производные обратных тригонометрических функций вычисляются по формуле производной для обратной функции, что уже было продемонстрировано ранее на примере арксинуса.

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\operatorname{arcctg})' = -\frac{1}{1+x^2}}$$