Whether you think you can
or whether you think you can't, you're right!
Henry Ford

МА-92. *О РОЛИ ПОВТОРНЫХ ПРЕДЕЛОВ*

§1. Равенство повторных пределов

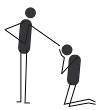
Повышенное внимание к повторным пределам типа

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y)$$

и сосредоточенность на изучении равенств

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y) = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y) \qquad (1)$$

выглядят весьма странно, ибо думается, что главным действующим лицом в подобном контексте должен быть предел



$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y), \qquad (2)$$

не зависящий от пути стремления $(x,y)\to(a,b)$. Но существование (2) из (1) даже не следует, да и обратная импликация не работает, см. далее примеры.

Поэтому (1) и (2) — явления независимые, хотя и соприкасающиеся. При этом (1) имеет важное самостоятельное значение, едва ли не большее чем (2). Дело в том, что в подноготной основных операций матанализа (дифференцирования, интегрирования, суммирования рядов) лежат предельные переходы. И вопросы изменения порядка этих операций упираются, по существу, в равенство повторных пределов. Можно ли менять порядок дифференцирования[1],

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \tag{?}$$

вносить дифференцирование под интеграл,

$$\frac{d}{dy} \int\limits_{\Omega} f(x,y)dx = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx, \tag{?}$$

менять местами интегрирование с переходом к пределу,

$$\lim_{y \to 0} \int\limits_{\Omega} f(x,y)dx = \int\limits_{\Omega} \lim_{y \to 0} f(x,y)dx, \tag{?}$$

— это всё разные лица равенства (1).

Поэтому на первом этапе изучения проблематики разумно сконцентрироваться на ситуациях, где всё на виду. И там особое внимание уделить осмотру «берегов», тех территорий, где желанные и ожидаемые свойства нарушаются.

§2. Примеры

• Вот простейшая ситуация

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \frac{ax + cy}{bx + dy} = \frac{a}{b}, \qquad \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} \frac{ax + cy}{bx + dy} = \frac{c}{d},$$

---

[1] Функция

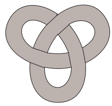
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} xy\,, & \text{если} \quad x, y \neq 0; \\[2ex] 0\,, & \text{если} \quad x = y = 0, \end{cases}$$

имеет в нуле частные производные $f_{xy}(0,0) = 1$, $f_{yx}(0,0) = -1$, что противоречит расхожему представлению о равенстве смешанных производных независимо от порядка дифференцирования. Но в данном случае «не хватает» непрерывности f_{xy} и f_{yx} в окрестности нуля.

в которой повторные пределы могут не совпадать.

• У функции

$$f(x,y) = x \sin \frac{1}{y}, \tag{3}$$



доопределённой в нуле по непрерывности, $f(0,0) = 0$, существует *двойной предел* при $(x,y) \to (0,0)$, *но только один из повторных.*

• А у функции

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}\,, & \text{если} \quad x, y \neq 0; \\[2ex] 0\,, & \text{если} \quad x = y = 0. \end{cases} \tag{4}$$

в нуле ***существуют и равны*** оба повторных предела, но двойного — ***вообще нет***[2].

§3. Теоремное обеспечение

Повторные пределы ускользают из-под контроля при наличии у функции тех или иных особенностей. В благоприятных ситуациях предосторожности чаще всего излишни.

• ***Теорема.*** *Если функция $f(x,y)$ при $x \to a$, $y \to b$ имеет двойной предел A (конечный или бесконечный), и при любом*

---

[2] Обратим внимание, функция (4) имеет разрыв в нуле, причём довольно экзотический:

- Предела у $f(x)$ при $(x,y) \to 0$ нет, но при стремлении к нулю вдоль любой прямой $x = ky$ значение f имеет предел $\dfrac{k}{1+k^2}$.

- Несмотря на разрыв, при любом фиксированном y функция $\varphi(x) = f(x, \mathrm{const})$ — непрерывна, и имеет частные производные всюду, в том числе в нуле, т. е. в точке разрыва!

y из некоторой окрестности точки b существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$, то существует и

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y) = A.$$

Другой повторный предел, как следует из примера (3), может не существовать. Если однако, в дополнение к условиям теоремы, при любом x из некоторой окрестности точки a существует предел $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$, то оба повторных предела существуют и равны двойному.

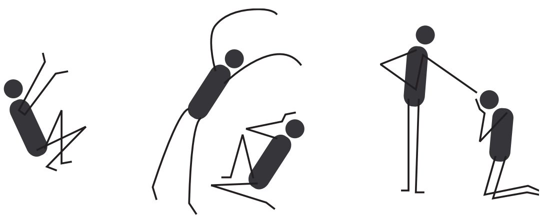
◀ Доказательство теоремы несложно. По любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что

$$|x-a| < \delta,\ |y-b| < \delta \quad\Rightarrow\quad |f(x,y) - A| < \varepsilon \quad\Rightarrow\quad |g(y) - A| < \varepsilon,$$

где $g(y) = \lim\limits_{x\to a} f(x,y)$. Поэтому $\lim\limits_{y\to b} g(y) = A$. ▶

Вот ещё один удобный на практике результат.

• *Пусть при любом x из некоторой окрестности точки a существует предел $\lim\limits_{y\to b} f(x,y) = \varphi(x)$, а при каждом y из некоторой окрестности b существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x,y) = \psi(y)$. Если при этом $f(x,y)$ стремится к $\varphi(x)$ равномерно по x, то оба повторных предела существуют и равны друг другу.* **(?)**



§4. О равномерной сходимости

На практике часто рассматривается последовательность функций $f_n(\boldsymbol{x})$, поточечно сходящаяся к «некой» функции $f(\boldsymbol{x})$, т. е. $f_n(\boldsymbol{x}) \to f(\boldsymbol{x})$ при каждом фиксированном $\boldsymbol{x}$. В качестве $f_n(\boldsymbol{x})$ обычно фигурируют частичные суммы какого-либо ряда $\sum^{\infty} \varphi_k(\boldsymbol{x})$. При этом возникают стандартные вопросы наследования функцией $f(\boldsymbol{x})$ тех или иных свойств функций $f_n(\boldsymbol{x})$. Например, непрерывна ли $f(\boldsymbol{x})$ в точке $\boldsymbol{x}_0$, если все $f_n(\boldsymbol{x})$ непрерывны в $\boldsymbol{x}_0$? Легко видеть, что положительный ответ эквивалентен равенству

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \lim_{n\to\infty} f_n(\boldsymbol{x}) = \lim_{n\to\infty} \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f_n(\boldsymbol{x}).$$

Проблема существования двойного предела даже не возникает.

Ключом к решению в такого рода задачах служит часто та или иная разновидность *равномерной сходимости*. Последовательность функций $f_n(\boldsymbol{x})$, поточечно сходящихся к $f(\boldsymbol{x})$ для любого $\boldsymbol{x} \in X$, называют ***равномерно сходящейся***, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что[3]

$$|f_n(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})| < \varepsilon, \quad \text{при} \quad n > N, \;\; \boldsymbol{x} \in X.$$

• ***Теорема.*** *Если последовательность непрерывных функций $f_n(\boldsymbol{x})$ сходится к $f(\boldsymbol{x})$ равномерно на замкнутом ограниченном множестве X, то $f(\boldsymbol{x})$ непрерывна на X.*

◀ Равномерная сходимость $f_n(\boldsymbol{x})$ к $f(\boldsymbol{x})$ означает $f(\boldsymbol{x}) = f_n(\boldsymbol{x}) + \varphi_n(\boldsymbol{x})$, где $\varphi_n(\boldsymbol{x})$ равномерно сходится к нулю. Поэтому

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| \leqslant |f_n(\boldsymbol{x}) - f_n(\boldsymbol{y})| + |\varphi_n(\boldsymbol{x})| + |\varphi_n(\boldsymbol{y})|.$$

[3] Идея равномерной сходимости может принимать разные облики. Поэтому важно ощущать саму идею, чтобы не запоминать слишком много определений. Вместо дискретного параметра n, например, может фигурировать — непрерывный.

Далее по заданному $\varepsilon > 0$ выберем такое n, что (в силу равномерного стремления $\varphi_n(\boldsymbol{x})$ к нулю)

$$|\varphi_n(\boldsymbol{z})| < \varepsilon/3$$

для любого $\boldsymbol{z} \in X$. Затем для выбранного n укажем такое δ (в силу непрерывности функций $f_n(\boldsymbol{x})$), что из $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| < \delta$ будет следовать $|f_n(\boldsymbol{x}) - f_n(\boldsymbol{y})| < \varepsilon/3$, и в итоге $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < \varepsilon$. ►

С феноменом *равномерной сходимости* целесообразно освоиться на примерах и контрпримерах, дабы «чувствовать берега» и придерживаться магистральных путей.

• Стандартной иллюстрацией на тему «как плоха поточечная сходимость в отсутствие равномерной» обычно служит последовательность $f_n(x) = x^n$, которая при любом фиксированном $x \in (0, 1)$ сходится к нулю, при $x = 1$ — к единице. Иными словами, x^n на $[0, 1]$ *поточечно* сходится к разрывной функции.

• Функция

$$f(x, y) = \begin{cases} 2\left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y^2}\right), & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant y; \\ \\ 0, & \text{если } y \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

при $y \to 0$ сходится к нулю не равномерно, поэтому следствия типа

$$\lim_{y\to 0} \int_0^1 f(x, y)dx = 1, \qquad \int_0^1 \lim_{y\to 0} f(x, y)dx = 0$$

не вызывают удивления.

• Но равномерная сходимость сама по себе не гарантирует благополучия, особенно если находится в глубине многослойной задачи. Пусть например, $f_n(x) = \dfrac{1}{n}$ при $x \in [0, n]$, и $f_n(x) = 0$ при $x > n$. Очевидно, последовательность функций $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к нулю на $[0, \infty)$, но

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)dx = 1.$$