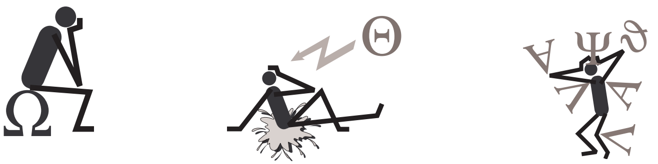
90% разговоров бесплодны, но без них
суть дела висит в пустом пространстве.

МА-1.2. *ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРЕДЕЛЫ*

§1. О теории вещественных чисел

Человеку удобнее думать о целых числах как о делениях на бесконечной прямой. Далее мысль течёт сама собой, сопоставляя точкам между делениями дроби. А когда выясняется, что этих p/q не хватает, возникает идея использования сходящихся последовательностей. Препятствия на этом пути с некоторыми усилиями преодолеваются, и вещественная прямая в самом деле может быть построена таким способом. Есть также порочный путь: «*вещественные числа — это бесконечные десятичные дроби*», — соблазняющий обманчивой простотой. Здесь не удаётся снять логические противоречия, но мало кто думает, что проблема так уж серьёзна. Мол, разве имеют значение мелкие нюансы?



Имеют. От мелочей зависит ВСЁ. Возьмём *аксиому выбора*: «*в любом семействе* Φ *непустых множеств в каждом множестве* $X \in \Phi$ *можно выбрать по одному элементу*». Словоблудие, казалось бы. Вещь очевидная, стоимость нулевая. Да и как оно может влиять на «грубую реальность»?

До *Цермело* так и думали, вернее, даже не задумывались, принимая «аксиому» за самоочевидный факт. Но будучи явно сформулирована, *аксиома выбора* вызвала ожесточенную критику из-за разительного контраста между своей банальностью и «невероятностью» следствий. Яркий пример — *парадокс Банаха – Тарского*:

> *Шар B в $\mathbb{R}^3$ допускает разбиение на конечное число непересекающихся множеств $B_1, \ldots, B_k \subset \mathbb{R}^3$, из которых можно составить передвижением B_j, как твёрдых тел (перенос плюс поворот), шар вдвое большего радиуса.*

Так что очень отдалённая казуистика может революционным образом вмешиваться в будничную жизнь. Мелкие логические нестыковки и «пустячки» аукаются так далеко и так громко, что предосторожности выходят в математике на передний план.

Теория Дедекинда ликвидирует такие нестыковки и строит удобную игровую площадку (вещественную прямую) для матанализа. Стартовой площадкой служат рациональные числа с определёнными арифметическими операциями.

• *Непустое множество A рациональных чисел $d(A)$ назовём* ***сечением Дедекинда*** *при выполнении двух условий*:
1. *В A нет наибольшего числа.*
2. *Если $\alpha \in A$, $\beta < \alpha$ и β — рациональное число, то $\beta \in A$.*

Называть сечением множество, разумеется, противоестественно. Но дело в том, что мы хотим поймать журавля в небе, имея в руках синицу. Если бы речь шла о множестве A рациональных $x < 3$, то на роль сечения годилось бы число 3. Однако в случае «$x^2 < 5$» указать сечением $\sqrt{5}$ нет возможности, поскольку игра начинается в отсутствие иррациональных чисел. Поэтому в роли сечения оказывается само множество A, что режет слух, но таковы стартовые условия.

Подготавливая почву для сечений стать числами, надо определить для них понятия больше, меньше, равенства, суммы и т. д. Это делается совсем легко, но скучно. Например, неравенству $d(A) < d(B)$ приходится сопоставить[1] строгое включение: $A \subset B$, но $A \neq B$. Сумме $d(A) + d(B)$ — сечение множества $A + B$, состоящего из рациональных чисел $\alpha + \beta$, где $\alpha \in A$, $\beta \in B$. Чтобы такие определения имели смысл, надо проверить стандартные условия, которым они обязаны удовлетворять. Скажем, отношение неравенства должно быть транзитивно:

$$\alpha < \beta, \quad \beta < \gamma \quad \Rightarrow \quad \alpha < \gamma.$$

В данном случае это обеспечивается транзитивностью строгого включения для множеств: $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$. Так же легко проверяются обычные свойства сложения для сечений. И так далее. Короче, все это рутинная работа, которая заканчивается определением на сечениях обычных числовых операций. После этого *термин «сечение» приравнивается термину «вещественное число»*. Рациональные сечения (множество элементов $x < \alpha$, где α рационально) оказываются рациональными числами. Все другие сечения называются — *иррациональными*.

Особо выделяются понятия *инфимума* и *супремума*. Пусть множество M ограничено снизу. Определим множество Γ нижних граней M, как множество таких рациональных γ, что $\gamma < m$ для любого рационального $m \in M$. Легко убедиться, что Γ является сечением.

• *Число* $d(\Gamma)$ *называется точной нижней гранью множества* M *и обозначается* $\inf M$. *Если* M *не ограничено снизу, то полагают* $\inf M = -\infty$.

Аналогично определяется *точная верхняя грань* $\sup M$.

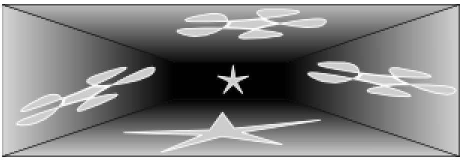
---

[1]Чтобы не нарушить уже имеющиеся неравенства для рациональных чисел.

Остаётся главный вопрос «о полноте вещественной прямой». Рациональные числа не исчерпывали всех точек. Хватит ли для «сплошного заполнения» дедекиндовых сечений? Рациональным последовательностям a_n теперь есть «куда сходиться». Но *не потребуется ли новое пополнение для иррациональных* a_n*?* Не появятся ли «новые числа», если сечения производить уже с помощью вещественных множеств A, удовлетворяющих тем же условиям 1, 2? Не появятся.

• ***Основная теорема Дедекинда.*** *Любое сечение в области вещественных чисел является вещественным числом.*

◄ *Доказательство* совсем просто. Пусть сечение определяется множеством A вещественных чисел. Пусть A_r — множество всех рациональных чисел из A. *Вещественное число* $\sup A_r$ определяет сечение A, как множество чисел $x < \sup A_r$. ►



§2. Надумана ли проблема и каковы блага

Лемма Вейерштрасса[2] получает теперь вместо наводящих соображений совершенно строгое обоснование. ◄ У ограниченного множества $\{a_n\}$ «у *Дедекинда*» есть супремум $a = \sup\{a_n\} < \infty$. Из монотонного возрастания a_n теперь следует $a_n \to a$. Всё. ►

Лемма Вейерштрасса порождает цепную реакцию возникновения удобных инструментов в теории пределов.

• ***Лемма о вложенных отрезках.*** *Пересечение бесконечного множества вложенных друг в друга отрезков,*

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n] \quad \text{\textit{при любом}} \quad n = 1, 2, \dots,$$

[2] *Если последовательность a_n монотонно возрастает и ограничена сверху, то она сходится, $a_n \to a < \infty$.*

длина которых стремится к нулю, всегда не пусто[3]*.*

◀ По условию $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \ldots \leqslant \ldots \leqslant b_1$. Поэтому последовательность a_n монотонна и ограничена, и потому сходится, $a_n \to a$. А поскольку $b_n = a_n + (b_n - a_n)$ и $b_n - a_n \to 0$, то и $b_n \to a$. Точка a, в силу $a_n \leqslant a \leqslant b_n$, принадлежит всем отрезкам. ▶

Рассматривая последовательности, удобно пользоваться разными трюками перехода к *подпоследовательностям*.

• *Пусть n_k произвольная расходящаяся последовательность целых чисел*[4]*. Последовательность a_{n_k} называют* ***подпоследовательностью*** *последовательности a_n.*

Если подпоследовательность a_{n_k} сходится, то её предел называют *предельной точкой (или точкой сгущения) последовательности a_n*.

• ***Лемма Больцано – Вейерштрасса***[5]***.*** *В ограниченной последовательности a_n всегда можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

◀ В силу ограниченности, все a_n принадлежат некоторому отрезку $I_0 = [a, b]$. Разделим I_0 пополам и выберем ту его половину I_1, которая содержит бесконечно много элементов a_n. Затем разделим I_1 пополам и выберем ту его половину I_2, которая опять содержит бесконечное число элементов a_n. Продолжая процесс до бесконечности, получим бесконечную цепочку вложенных отрезков $I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_k \supset \ldots$, длины которых стремятся к нулю. В силу *леммы Вейенштрасса* все I_k имеют общую точку c. Тогда $a_{n_k} \to c$, поскольку все $a_{n_k} \in I_k$. ▶

Теперь упоминавшаяся ранее *теорема Вейерштрасса* может быть обоснована строго.

• ***Теорема Вейерштрасса.*** *Непрерывная на $[a, b]$ функция ограничена снизу и сверху.*

---

[3]Имеется точка, принадлежащая всем отрезкам.

[4]$n_k \to \infty$ при $k \to \infty$

[5]Широко используется в рассуждениях и доказательствах.

Утверждение интуитивно естественное[6]. Но попробуйте его доказать кустарными методами.

◀ Неограниченность $f(x)$, например, сверху — означает, что для любой последовательности $M_n \to \infty$ можно указать такую последовательность $c_n \in [a, b]$, что $f(c_n) > M_n$. *Лемма Больцано – Вейерштрасса* гарантирует существование у c_n сходящейся подпоследовательности. Чтобы не усложнять обозначений, можно считать сходящейся саму последовательность $c_n \to c$. Тогда, в силу непрерывности, $f(c_n) \to f(c)$, что вступает в противоречие с $f(c_n) > M_n \to \infty$. ▶

В данном контексте стоит отметить ещё один результат.

• ***Лемма Гейне – Бореля.*** *Из любого покрытия σ отрезка $[a, b]$ интервалами можно выбрать конечное подпокрытие.*

◀ Допустим противное. Разделим $[a, b]$ пополам и выберем ту половину, которая не покрывается конечным числом интервалов. Эту половину снова разделим пополам — и так далее. В результате получим цепочку вложенных отрезков $[a_k, b_k]$, длины которых стремятся к нулю, но каждый сегмент $[a_k, b_k]$ не покрывается конечным множеством интервалов из σ. Но тогда (*лемма о вложенных отрезках*) все $[a_k, b_k]$ имеют общую точку c. Точка c принадлежит некоторому интервалу $[a^*, b^*] \in \sigma$, который, начиная с какого-то номера содержит все последующие $[a_k, b_k]$, что рождает противоречие. ▶

Леммы Гейне – Бореля и *Больцано – Вейерштрасса* глубинно «эквивалентны», поскольку отражают одно и то же свойство компактности. Множество X в общем случае определяется как **компактное**, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие. Так что *лемма Гейне – Бореля* устанавливает компактность любого отрезка $[a, b]$. Вообще говоря, на прямой все это большого смысла не имеет — компактность X означает ограниченность и замкнутость. Но в функциональных пространствах понятие компактности выдвигается на передний фронт и работает весьма эффективно.

---

[6]В значительной мере потому, что интуиция считает функцию непрерывной, «если её график можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги».

§3. Равномерная непрерывность

• *Функция $f(x)$, непрерывная на некотором множестве X, называется равномерно непрерывной на X, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое δ, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, как только $|x - y| < \delta$, — для любых $x, y \in X$.*

Функции $y = \ln x$, $y = 1/x$ на интервале $(0, 1)$ не являются равномерно непрерывными.

• ***Теорема Кантора.*** *Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, автоматически равномерно непрерывна на $[a, b]$.*

◀ В предположении противного для некоторого ε не найдется нужного δ. Это означает, что для любой последовательности положительных $\delta_n \to 0$ можно указать такие x_n, y_n, что $|x_n - y_n| < \delta_n$, но

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$$

при любом $n = 1, 2, \ldots$

По *лемме Больцано – Вейерштрасса* из x_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Для простоты, будем считать, что сходится сама последовательность x_n, т. е. $x_n \to c \in [a, b]$. Но тогда и $y_n \to c$ в силу $x_n - y_n \to 0$. В этом случае $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$ противоречит непрерывности $f(x)$ в точке c. ▶