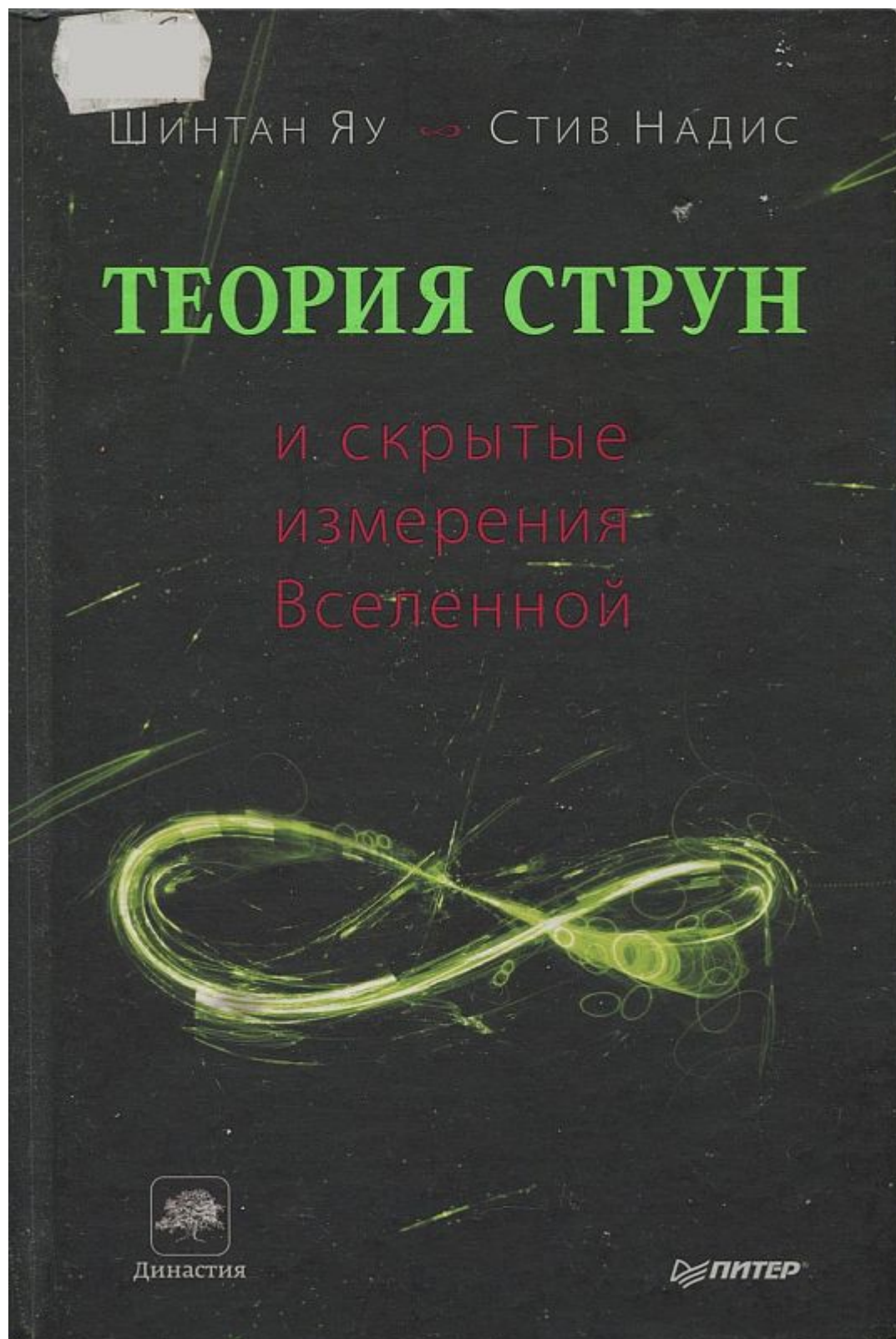


Шинтан Яу Стив Надис

Теория струн и скрытые измерения Вселенной



Шинтан Яу

Стив Надис

Теория струн и скрытые измерения Вселенной

Эта книга проведет вас по увлекательному маршруту исследования скрытых измерений пространства и его многообразия. Написанная первооткрывателем пространства Калаби-Яу, эта работа рассказывает об одной из самых ярких и противоречивых теорий в современной физике.

Брайан Грин, автор бестселлеров «Эlegantная Вселенная» и «Ткань космоса»

Предисловие

Математику часто называют языком науки или, по крайней мере, языком естественных наук, и это справедливо: законы физического мира намного точнее выражаются при помощи математических уравнений, чем будучи записаны или произнесены словами. Кроме того, представление о математике как о языке не позволяет должным образом оценить ее во всем многообразии, так как создается ошибочное впечатление, что, за исключением небольших поправок, все по-настоящему важное в математике уже давно сделано.

На самом деле это неправда. Несмотря на фундамент, созданный учеными за сотни или даже тысячи лет, математика все еще остается активно развивающейся и живой наукой. Это отнюдь не статичная совокупность знаний – впрочем, языки тоже имеют свойство меняться. Математика является динамической, развивающейся наукой, полной каждодневных озарений и открытий, которые составляют конкуренцию открытиям в других областях, хотя, конечно, они не привлекают внимания в такой же степени, как открытие новой элементарной частицы, обнаружение новой планеты или синтез нового лекарства от рака. Более того, если бы не периодические доказательства формулируемых веками гипотез, информация об открытиях в области математики вообще не освещалась бы прессой.

Для тех, кто ценит исключительную силу математики, она – не просто язык, а бесспорный путь к истине, краеугольный камень, на котором покоится вся система естественных наук. Сила этой дисциплины состоит не только в способности объяснять и воспроизводить физические реалии: для математиков сама математика является реальностью.

Геометрические фигуры и пространства, существование которых мы доказываем, для нас так же реальны, как элементарные частицы, из которых, согласно физике, состоит любое вещество. Мы считаем математические структуры даже более фундаментальными, чем природные частицы, ведь они позволяют не только понять устройство частиц, но и такие феномены окружающего мира, как черты человеческого лица или симметрия цветов. Геометров больше всего восхищают мощь и красота абстрактных принципов, лежащих в основе очертаний и форм объектов окружающего мира.

Мое изучение математики вообще и моей специальности – геометрии – в частности было приключением. Я до сих пор помню, какие ощущения испытывал на первом курсе магистратуры, будучи зеленым юнцом двадцати одного года, когда я впервые услышал о теории относительности Эйнштейна. Я был поражен тем, что гравитационные эффекты и искривление пространства могут рассматриваться как одно и то же, ведь криволинейные поверхности очаровали меня еще в первые годы обучения в Гонконге. Что-то в этих формах привлекло меня на интуитивном уровне. Сам не знаю почему, но я не мог перестать думать о них. Информация о том, что кривизна лежит в основе общей теории относительности

Эйнштейна, наполнила меня надеждой в один прекрасный день внести свой вклад в наше понимание Вселенной.

Лежащая перед вами книга рассказывает о моих исследованиях в области математики. Особый акцент сделан на открытиях, которые помогли ученым в построении модели Вселенной. Невозможно наверняка утверждать, что все описанные модели в конечном счете окажутся имеющими отношение к реальности. Но тем не менее лежащие в их основе теории имеют неоспоримую красоту.

Написание книги подобного рода является, мягко говоря, нетривиальной задачей, особенно для человека, которому проще общаться на языке геометрии и нелинейных дифференциальных уравнений, а не на неродном для него английском. Я был расстроен тем, что великолепную доходчивость и своего рода элегантность математических уравнений сложно, а порой и невозможно выразить словами. Точно так же невозможно убедить людей в величественности Эвереста или Ниагарского водопада, не имея под рукой их изображений.

К счастью, в этом аспекте я получил так необходимую мне помощь. Хотя повествование ведется от моего лица, именно мой соавтор ответствен за перевод абстрактных и сложных для понимания математических построений в понятный (по крайней мере, я на это надеюсь) текст.

Пробный оттиск книги «Calabi conjecture» – а именно она легла в основу данного издания – я посвятил моему покойному отцу Ченг Инг Чиу (Chen Ying Chiu), редактору и философу, который привил мне уважение к силе абстрактного мышления. Данную книгу я также посвящаю ему и моей покойной матери Ленг Ейк Лам (Leung Yeuk Lam), которая также оказала большое влияние на мое интеллектуальное развитие. Также я хотел бы отдать должное своей жене Ю-Юн (Yu-Yun), терпеливо переносившей мои неумеренные (а порой и одержимые) исследования и частые рабочие поездки, а также моим сыновьям Исааку и Майклу, которыми я очень горжусь.

Также я посвящаю эту книгу Эудженио Калаби (Eugenio Calabi), создателю упоминавшейся выше теории, с которым я знаком почти сорок лет. Калаби – крайне оригинальный математик, с которым я больше четверти века связан через класс геометрических-объектов – многообразия Калаби-Яу, являющиеся основной темой данной книги. Связка Калаби-Яу столь часто использовалась с момента своего появления в 1984 году, что я почти привык к тому, что Калаби – это мое имя. И это имя я бы носил с гордостью.

Работа, которой я занимаюсь, лежит на стыке математики и теоретической физики. Над такими вещами не работают в одиночку, так что я получил изрядные выгоды от сотрудничества со своими друзьями и коллегами. Упомяну только некоторых из множества сотрудничавших со мной напрямую или вдохновлявших меня тем или иным способом.

В первую очередь я хотел бы поблагодарить своих учителей и наставников, целую плеяду знаменитых ученых: Чжень Шен Черна (S. S. Chern), Чарльза Морри (Charles Morrey), Блейна Лоусона (Blaine Lawson), Изадора Зингера (Isadore Singer), Льюиса Ниренберга (Louis Nirenberg) и уже упоминавшегося Калаби. Я счастлив, что в 1973 году Зингер пригласил выступить на Стэнфордской конференции Роберта Героха (Robert Geroch). Именно выступление Героха вдохновило меня на совместную работу с Ричардом Шоном (Richard Schoen) над гипотезой положительности энергии. Моим более поздним интересом к связанной с математикой физике я также обязан Зингеру.

Я хочу сказать спасибо Стивену Хокингу (Stephen Hawking) и Гари Гиббонсу (Gary Gibbons) за беседы об общей теории относительности, которые мы вели во время моего визита в Кембриджский университет. От Дэвида Гросса (David Gross) я узнал о квантовой теории поля. Помню, в 1981 году, в бытность мою профессором в Институте перспективных исследований, Фриман Дайсон (Freeman Dyson) привел в мой офис только что прибывшего в Принстон коллегу-физика. Новоприбывший Эдвард Виттен (Edward Witten), рассказал мне о своем готовящемся к публикации доказательстве гипотезы положительности энергии, которую я вместе с коллегой ранее доказал при помощи крайне сложной методики. Именно

тогда я в первый раз был поражен силой математических выкладок Виттена.

В течение многих лет я испытывал удовольствие от сотрудничества с множеством людей: с уже упомянутым выше Шоном, Ш. Ю. Ченгом (S. Y. Cheng), Ричардом Гамильтоном (Richard Hamilton), Петером Ли (Peter Li), Биллом Миксом (Bill Meeks), Леоном Симоном (Leon Simon) и Кареном Уленбеком (Karen Uhlenbeck). Не могу не упомянуть и других друзей и коллег, различными способами внесшими свой вклад в данную книгу. Это Симон Дональдсон (Simon Donaldson), Роберт Грин (Robert Greene), Роберт Оссерман (Robert Osserman), Двонг Хонг Фонг (Duong Hong Phong) и Хунг-Си Ву (Hung-Hsi Wu).

Мне выпало счастье провести последние двадцать лет в Гарварде, который является идеальной средой для общения как с математиками, так и с физиками. Работая здесь, беседуя со своими коллегами-математиками, я испытал множество озарений. Спасибо за это Джозефу Бернштейну, Ноаму Элкису (Noam Elkies), Денису Гейтсгори (Dennis Gaitsgory), Дику Гроссу (Dick Gross), Джо Харрису (Joe Harris), Хейсуке Хиронака (Heisuke Hironaka), Артуру Яффе (который занимается и физикой тоже), Дэвиду Каздану (David Kazhdan), Питеру Кронхаймеру (Peter Kronheimer), Барри Мазуру (Barry Mazur), Кертису Макмуллену (Curtis McMullen), Дэвиду Мамфорду (David Mumford), Уилфреду Шмиду (Wilfried Schmid), Ям-Тонг Сью (Yum-Tong Siu), Шломо Штернбергу (Shlomo Sternberg), Джону Тейту (John Tate), Клифу Таубсу (Cliff Taubes), Ричарду Тейлору (Richard Taylor), Х. Т. Яу (H. T. Yau) и ныне покойным Раулю Ботту (Raoul Bott) и Джорджу Маккею (George Mackey). И все это было на фоне запоминающегося обмена мнениями с коллегами-математиками из Массачусетского технологического института. О физике же я вел бесчисленные полезные беседы с Энди Строминджером (Andy Strominger) и Кумруном Вафой (Cumrun Vafa).

За последние десять лет я дважды приглашался Эйленбергом преподавать в Колумбийский университет, где плодотворно общался с другими преподавателями, в частности с Дорианом Голдфельдом (Dorian Goldfeld), Ричардом Гамильтоном (Richard Hamilton), Двонг Хонг Фонгом (Duong Hong Phong) и С. В. Жангом (S. W. Zhang). Преподавал я и в Калифорнийском технологическом институте по приглашению Фейрчайлда и Мурса. Там я многому научился от Кипа Торна (Kip Thorne) и Джона Шварца (John Schwarz).

За последние двадцать три года мои исследования, связанные с физикой, получали поддержку от правительства США через Национальный научный фонд, Министерство энергетики и Управление научных исследований Пентагона. Большинство моих учеников получили докторские степени по физике, что для математиков несколько необычно. Но это было взаимовыгодное сотрудничество, так как они учились у меня математике, а я у них – физике. Я счастлив, что многие из этих моих учеников, имеющих образование в области физики, стали выдающимися профессорами математических факультетов в университете Брендейса, в Колумбийском университете, в Северо-Западном университете, в Оксфорде, в Токийском университете и других учебных заведениях. Некоторые из них работали над многообразиями Калаби-Яу и помогли мне с написанием этой книги. В их числе Мбоэ Эсол (Mboyo Esole), Брайан Грин (Brian Greene), Гари Горовиц (Gary Horowitz), Шинобу Хосоно (Shinobu Hosono), Тристан Хабш (Tristan Hubsch), Альбрехт Клемм (Albrecht Klemm), Бонг Лиан (Bong Lian), Джеймс Спаркс (James Sparks), Ли-Шенг Ценг (Li-Sheng Tseng), Сатоши Ямагучи (Satoshi Yamaguchi) и Эрик Заслоу (Eric Zaslow). Ну и, наконец, мои бывшие аспиранты – Юн Ли (Jun Li), Кефенг Лью (Kefeng Liu), Мелисса Лью (Melissa Liu), Драгон Ванг (Dragon Wang) и Му-Тао Ванг (Mu-Tao Wang) – также внесли свой неоценимый вклад в мои исследования. О них я еще буду упоминать на страницах своей книги.

Шинтан Яу, Кембридж, Массачусетс, март 2010

Если бы не Генри Тай, физик из Корнеллского университета (и друг Яу), который предположил, что соавторство может навести меня на интересные идеи, я, вероятно, никогда не узнал бы об этом проекте.

В этом отношении, как и во многих других, Генри оказался прав. И я благодарен ему как за начало моего неожиданного путешествия, так и за помощь во время него.

Как часто говорил Яу, отважившись на математическое путешествие, никогда не знаешь заранее, чем оно закончится. То же самое можно сказать про конец книги, над которой ты работаешь. Во время нашей первой встречи мы согласились, что нам нужно написать совместную книгу, но понимание, о чем же будет эта книга, пришло только некоторое время спустя. Можно даже сказать, что у нас отсутствовал четкий ответ на данный вопрос, пока книга не была закончена.

Теперь, чтобы исключить всякую путаницу, скажу несколько слов о продукте нашего сотрудничества. Моим соавтором является математик, работа которого, собственно, и легла в основу книги. Главы, в создании которых он принимал активное участие, написаны, как правило, от первого лица. И местоимение «я» относится к нему и только к нему. Но, несмотря на то что эта книга является его рассказом о себе, это вовсе не автобиография и не биография Яу. Часть обсуждений связана с людьми, с которыми Яу не знаком (некоторые из них умерли до его рождения), а некоторые из описанных тем – например, экспериментальная физика и космология – выходят за пределы его области знаний. Такие разделы написаны от третьего лица и основаны на различных интервью и других проведенных мной исследованиях.

Без сомнения, эта книга представляет собой необычную смесь различной информации и точек зрения. Именно так, с нашей точки зрения, было продуктивнее всего преподнести информацию, которой нам хотелось поделиться. Изложение всего этого на бумаге во многом зависело от потрясающего знания математики моим соавтором и, надеюсь, от моего умения работать со словом.

На вопрос, можно ли рассматривать эту книгу как автобиографию, следует ответить так: хотя книга, без сомнения, построена вокруг работы Яу, предполагается, что главную роль будет играть не он сам, а класс геометрических фигур – так называемое многообразие Калаби-Яу, – который он помог придумать.

Вообще говоря, эта книга представляет собой попытку понять Вселенную посредством геометрии. Примером может служить общая теория относительности – имевшая потрясающий успех в прошлом веке попытка описания силы тяжести на основе геометрии. Еще дальше идет теория струн, в которой геометрия занимает центральное место в виде шестимерных фигур Калаби-Яу. В книге рассматриваются идеи из геометрии и физики, необходимые, чтобы понять, как появились многообразия Калаби-Яу и почему многие физики и математики придают им такое значение. Мы попытались рассмотреть эти многообразия с разных сторон – их функциональные особенности; расчеты, которые привели к их открытию; причины, по которым их находят привлекательными специалисты, занимающиеся теорией струн; а также вопрос, не являются ли эти фигуры ключом к познанию нашей Вселенной (а возможно, и к другим вселенным тоже).

Примерно так можно описать предназначение данной книги. Можно дискутировать на тему, насколько нам удалось реализовать наши замыслы. Но, без сомнения, ничего не получилось бы без технической, редакторской и эмоциональной поддержки многих людей. Их было слишком много, чтобы перечислять всех, но я постараюсь это сделать.

Неизмеримую помощь я получил от лиц, уже упомянутых моим соавтором. Это Эудженио Калаби (Eugenio Calabi), Саймон Дональдсон (Simon Donaldson), Брайан Грин (Brian Greene), Тристан Хабш (Tristan Hubsch), Эндрю Строминджер (Andrew Strominger), Кумрун Вафа (Cumrun Vafa), Эдвард Виттен (Edward Witten), а особенно Роберт Грин (Robert Greene), Бонг Лиан (Bong Lian) и Ли-Шенг Ценг (Li-Sheng Tseng). Именно последние трое по мере написания книги предоставляли мне математические консультации, сочетая искусство доходчиво объяснять с поразительным терпением. В частности, именно Роберт Грин, несмотря на свою занятость, встречался со мной два раза в неделю, чтобы разъяснить особенности дифференциальной геометрии. Без его помощи я бесчисленное количество раз попадал бы в крайне затруднительное положение. Лиан помог мне вникнуть в геометрию, а

Ценг вносил последние бесценные правки в нашу все время эволюционирующую рукопись.

Физики Алан Адамс (Allan Adams), Крис Бислей (Chris Beasley), Шамит Качру (Shamit Kachru), Лиам Макаллистер (Liam McAllister) и Барт Оврут (Burt Ovrut) день и ночь отвечали на мои вопросы, позволив избежать множества неудач. Не могу не упомянуть и прочих, кто щедро делился со мной своим временем. Это Пол Эспинволл (Paul Aspinwall), Мелани Беккер (Melanie Becker), Лидия Бьери (Lydia Bieri), Фолькер Браун (Volker Braun), Дэвид Кокс (David Cox), Фредерик Денеф (Frederik Deneff), Роберт Дикграаф (Robbert Dijkgraaf), Рон Донаги (Ron Donagi), Майк Дуглас (Mike Douglas), Стив Гиддингс (Steve Giddings), Марк Гросс (Mark Gross), Артур Хебекер (Arthur Hebecker), Петр Хорава (Petr Horava), Мэтт Клебан (Matt Kleban), Игорь Клебанов (Igor Klebanov), Албион Лоуренс (Albion Lawrence), Андрей Линде (Andrei Linde), Хуан Малдасена (Juan Maldacena), Дэйв Моррисон (Dave Morrison), Любос Мотл (Lubos Motl), Хироши Огури (Hirosi Ooguri), Тони Пантев (Tony Pantev), Ронен Плессер (Ronen Plesser), Джо Полчинский (Joe Polchinski), Гэри Шуй (Gary Shui), Аарон Симонс (Aaron Simons), Раман Сандрам (Raman Sundrum), Уэти Тейлор (Wati Taylor), Брет Ундревуд (Bret Underwood), Дин Янг (Deane Yang) и Хи Ин (Xi Yin).

Это только самая верхушка айсберга. Также мне помогали Эрик Аделбергер (Eric Adelberger), Салем Али (Salem Ali), Брюс Аллен (Bruce Allen), Нима Аркани-Хамед (Nima Arkani-Hamed), Майкл Атия (Michael Atiyah), Джон Баез (John Baez), Томас Банхоф (Thomas Banchoff), Кэтрин Бекер (Katrin Becker), Джордж Бергман (George Bergman), Винсент Бушар (Vincent Bouchard), Филипп Канделас (Philip Candelas), Джон Коатс (John Coates), Андреа Кросс (Andrea Cross), Лэнс Диксон (Lance Dixon), Дэвид Дарлах (David Durlach), Дирк Феруз (Dirk Ferus), Феликс Финстер (Felix Finster), Дан Фрид (Dan Freed), Бен Фрайфогель (Ben Freivogel), Эндрю Фрей (Andrew Frey), Андреас Гатман (Andreas Gathmann), Дорон Гепнер (Doron Gepner), Роберт Герох (Robert Geroch), Сюзан Гильберт (Susan Gilbert), Кэмерон Гордон (Cameron Gordon), Майкл Грин (Michael Green), Артур Гринспун (Arthur Greenspoon), Маркус Грисару (Marcus Grisaru), Дик Гросс (Dick Gross), Моника Гика (Monica Guica), Сергей Жуков (Sergei Gukov), Алан Гут (Alan Guth), Роберт С. Харрис (Robert S. Harris), Мэтт Хедрик (Matt Headrick), Джонатан Хекман (Jonathan Heckman), Дан Хупер (Dan Hooper), Гари Горовиц (Gary Horowitz), Станислав Янечко (Stanislaw Janeczko), Лизхен Жи (Lizhen Ji), Шелдон Кац (Sheldon Katz), Стив Клейман (Steve Kleiman), Макс Кройзер (Max Kreuzer), Петер Кронхаймер (Peter Kronheimer), Мэри Левин (Mary Levin), Эрвин Лютвак (Erwin Lutwak), Джо Ликкен (Joe Lykken), Барри Мазур (Barry Mazur), Вильям Маккаллум (William McCallum), Джон Макгриви (John McGreevy), Стивен Миллер (Stephen Miller), Клифф Мур (Cliff Moore), Стив Нан (Steve Nahn), Гейл Оскин (Gail Oskin), Рахул Пандхарипанд (Rahul Pandharipande), Хоакин Перес (Joaquín Pérez), Рождер Пенроуз (Roger Penrose), Майлс Рейд (Miles Reid), Николай Решетихин (Nicolai Reshetikhin), Кирилл Сарайкин (Kirill Saraikin), Карен Шеффнер (Karen Schaffner), Майкл Шульц (Michael Schulz), Джон Шварц (John Schwarz), Ашок Сен (Ashoke Sen), Крис Сниббе (Kris Snibbe), Пол Шеллард (Paul Shellard), Ева Сильверштейн (Eva Silverstein), Джоэль Смоллер (Joel Smoller), Стив Строгац (Steve Strogatz), Леонард Зюскинд (Leonard Susskind), Ян Сойбельман (Yan Soibelman), Эрик Свенсон (Erik Swanson), Макс Тегмарк (Max Tegmark), Рави Вакил (Ravi Vakil), Фернандо Родригес Виллегас (Fernando Rodriguez Villegas), Дуайт Винсент (Dwight Vincent), Дэн Уолдрем (Dan Waldram), Девин Уолкер (Devin Walker), Брайан Вехт (Brian Wecht), Тоби Уисмен (Toby Wiseman), Джеф Ву (Jeff Wu), Чжэньнин Янг (Chen Ning Yang), Дональд Зейл (Donald Zeil) и другие.

Проиллюстрировать многие понятия из данной книги сложно, но, к счастью, эта проблема была решена с помощью Хьяотиан (Тима) Ин (Xiaotian (Tim) Yin) и Хьянфенга (Дэвида) Гу (Xianfeng (David) Gu) с кафедры вычислительной техники университета в Стони Брук, которым в свою очередь помогали Хуянг Ли (Huayong Li) и Вей Зенг (Wei Zeng). Также помощь в создании иллюстраций была оказана Эндрю Хэнсоном (Andrew Hanson) (основным визуализатором многообразия Калаби-Яу), Джоном Опра (John Oprea) и Ричардом Палейсом (Richard Palais).

Я хотел бы также поблагодарить своих друзей и родных, в том числе Вилла Бланшара (Will Blanchard), Джона ДеЛэнси (John DeLancey), Росса Итмана (Ross Eatman), Эвана Хадинггама (Evan Hadingham), ХARRИСА Маккартера (Harris McCarter) и Джона Тиббетса (John Tibbetts), которые читали черновики книги и помогали своими советами и поддержкой. За бесценную помощь в решении организационных вопросов мы с моим соавтором хотели бы сказать спасибо Морин Армстронг (Maureen Armstrong), Лили Чану (Lily Chan), Хао Ху (НАО ХИ) и Джене Бёрсан (Gena Bursan).

В тексте данной книги присутствуют ссылки на материалы из других изданий. Это, в частности, «Элегантная вселенная» Брайана Грина, «Окно Евклида» Леонарда Млодзинова и не переведенные пока на русский язык книги Роберта Оссермана «Poetry of the Universe» и «The Cosmic Landscape» Леонарда Зюскинда.

Наша книга никогда бы не увидела своего читателя, если бы не помощь Джона Брокмана (John Brockman), Катинки Мэтсон (Katinka Matson), Майкла Хэлей (Michael Healey), Макса Брокмана (Max Brockman), Рассела Вайнбергера (Russell Weinberger) и других сотрудников литературного агентства Brockman, Inc. Т. Дж. Келлехер (T. J. Kelleher) из издательства «Basic Books» поверил в нас и в нашу книгу, и с помощью его коллеги Уитни Кассер (Whitney Casser) издание обрело респектабельный вид. Кей Мариэя (Kay Mariea), выпускающий редактор «Basic Books», наблюдала за всеми стадиями издания книги, а Патрисия Бойд (Patricia Boyd) выполнила литературную редактуру. Именно от нее я узнал, что «the same» ничем не отличается от «exactly the same».

Ну и напоследок я хотел бы особо поблагодарить членов моей семьи – Мелиссу, Джульетту и Паулину, а также моих родителей Лорейна и Марти, моего брата Фреда и сестру Сью. Все они вели себя так, как будто шестимерные многообразия Калаби-Яу – это самое восхитительное, что существует в нашем мире, и даже не подозревали, что эти многообразия находятся за его пределами.

Стив Надис, Кембридж, Массачусетс, март 2010

Вступлeние

Формы грядущего

Бог – это геометр.

Платон

Примерно в 360 году до нашей эры Платон написал трактат «Тимей» – историю творения, изложенную в виде диалога между его учителем Сократом и тремя другими участниками: Тимеем, Критием, Гермократом. Тимей – это выдуманный персонаж, пришедший в Афины из южного итальянского города Локри, «знаток астрономии, сделавший ее своим главным делом, чтобы познать природу Вселенной»¹. В уста Тимея Платон вкладывает свою собственную теорию, центральная роль в которой отведена геометрии.

Платон был очарован группой выпуклых фигур, особым классом многогранников, которые получили название Платоновых тел. Грани каждого такого тела состоят из одинаковых правильных многоугольников. К примеру, у тетраэдра четыре правильные треугольные грани. Гексаэдр, или куб, составлен из шести квадратов. Октаэдр состоит из восьми равносторонних треугольников, додекаэдр – из двенадцати пятиугольников, а икосаэдр – из двенадцати² треугольников.

¹ Plato, *Timaeus*, trans. Donald J. Zeyl (Indianapolis: Hackett, 2000), p. 12.

² Так в книге. Правильно: «из двадцати треугольников» (прим. Vadi. Далее множество подобных «тупых» ошибок исправляю в тексте без примечаний)

Трехмерные фигуры, носящие название Платоновых тел, изобрел не Платон. Честно говоря, имя их изобретателя неизвестно. Принято считать, что современник Платона Теэтет Афинский доказал существование пяти и только пяти регулярных многогранников. Эвклид в своих «Началах» дал полное математическое описание этих форм.

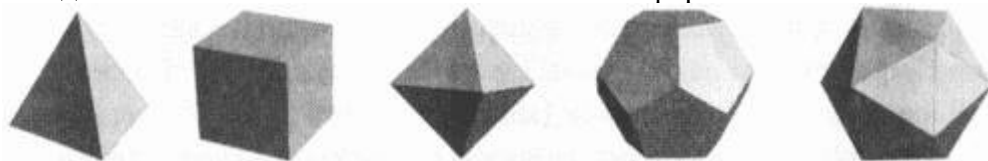


Рис. 0.1. Пять Платоновых тел: тетраэдр, гексаэдр (или куб), октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. Приставка указывает на количество граней – четыре, шесть, восемь, двенадцать и двадцать соответственно. От всех прочих многогранников их отличает конгруэнтность всех граней, ребер и углов (между двумя ребрами)

Платоновы тела имеют несколько интересных свойств, некоторые из них эквивалентны способам их описания. В каждом таком многограннике в одной вершине сходится одно и то же количество ребер. И вокруг многогранника можно описать сферу, которой будет касаться каждая вершина, – в общем случае такое поведение не характерно для многогранников. Более того, углы, под которыми сходятся ребра в каждой из вершин, всегда одинаковы. Сумма количества вершин и количества граней равна количеству ребер плюс два.

Платон придавал этим телам метафизическое значение, именно поэтому с ними оказалось связано его имя. Более того, выпуклые правильные многогранники, как описывается в «Тимее», составляют суть космологии. В философии Платона существуют четыре основных элемента: земля, воздух, огонь и вода. Если бы мы могли детально исследовать каждый из этих элементов, мы бы заметили, что они состоят из миниатюрных копий Платоновых тел. Земля, таким образом, будет состоять из крошечных кубов, воздух – из октаэдров, огонь – из тетраэдров, а вода – из икосаэдров. «Остается еще одна, пятая конструкция, – писал Платон в «Тимее», имея в виду додекаэдр. – Его бог определил для Вселенной, прибегнув к нему в качестве образца».³

С сегодняшней точки зрения, опирающейся на более чем два тысячелетия развития науки, гипотеза Платона выглядят сомнительно. В настоящее время еще не достигнуто соглашение, из чего же состоит Вселенная – из лептонов и кварков, или из гипотетических элементарных частиц преонов, или даже из еще более гипотетических струн. Тем не менее мы знаем, что это не просто земля, воздух, вода и огонь на поверхности гигантского додекаэдра. Перестали мы верить и в то, что свойства элементов строго описываются формами Платоновых тел.

С другой стороны, Платон никогда и не утверждал, что его гипотеза однозначно верна. Он считал «Тимей» «правдоподобным изложением», лучшим, что можно было предложить в то время. При этом предполагалось, что потомки могут усовершенствовать картину и даже коренным образом ее преобразовать. Как утверждает в своих рассуждениях Тимей, «...мы должны радоваться, если наше рассуждение окажется не менее правдоподобным, чем любое другое, и притом помнить, что и я, рассуждающий, и вы, мои судьи, всего лишь люди, а потому нам приходится довольствоваться в таких вопросах правдоподобным мифом, не требуя большего».⁴

Разумеется, Платон многое понимал неправильно, но если рассмотреть его тезисы в более общем смысле, мы обнаружим, что истина в них тоже присутствует. Выдающийся философ демонстрирует, вероятно, самую большую мудрость, понимая, что его гипотеза может оказаться неверной, но при этом стать основой для другой, верной теории. К примеру, его многогранники являются удивительно симметричными объектами: икосаэдр и додекаэдр можно повернуть шестьюдесятью способами (и это число не случайно представляет собой удвоенное количество ребер каждого тела), сохранив их вид неизменным. Создавая

³ Ibid., p. 46–47.

⁴ Ibid., p. 44.

космологию на этих формах, Платон совершенно верно предположил, что в основе любого правдоподобного описания природы должна лежать симметрия. И если когда-нибудь появится настоящая теория Вселенной – в которой унифицированы все силы, а все компоненты подчиняются небольшому количеству правил, – нам потребуется вскрыть лежащую в основе симметрию, упрощающий принцип, на котором строится все остальное.

Вряд ли стоит упоминать, что симметрия твердых тел является прямым следствием их точной формы, или геометрии. И именно здесь Платон сделал свой второй крупный вклад: он не только понял, что математика является ключом к познанию Вселенной, но и продемонстрировал подход, который называется геометризацией физики, – аналогичный прорыв сделал Эйнштейн. В порыве предвидения Платон предположил, что элементы природы, их качества и действующие между ними силы могут быть результатом воздействия скрытой от нас колоссальной геометрической структуры. Видимый нами мир вполне может оказаться всего лишь отражением лежащей в его основе геометрии, недоступной для нашего восприятия. Это знание мне крайне дорого, так как оно близко связано с математическим доказательством, которое принесло мне известность. Это может показаться надуманным, но существует еще один способ геометрического представления, имеющий отношение к указанной идее. Впрочем, в этом вы убедитесь в процессе чтения книги.

Первая глава

Вселенная где-то рядом

Изобретение телескопа и последующее его усовершенствование на протяжении многих лет помогло подтвердить факт, ставший сегодня азбучной истиной: есть многое во Вселенной, что недоступно нашим наблюдениям. Действительно, согласно имеющимся на сегодняшний день данным, почти три четверти материального мира существует в загадочной, невидимой форме, называемой *темной энергией*. Большая часть из оставшегося, за исключением только четырех процентов, приходящихся на обычную материю (и в том числе на нас с вами), носит название *темной материи*. Оправдывая свое название, эта материя может считаться «темной» во всех смыслах: ее трудно увидеть и не менее трудно понять.

Доступная наблюдению область космического пространства представляет собой шар радиусом порядка 13,7 миллиарда световых лет. Эту область часто называют объемом Хаббла, что, разумеется, не предполагает, будто Вселенная ограничена ее пределами. Согласно современным научным данным, Вселенная безгранична, так что прямая линия, проведенная из точки, в которой мы находимся, в любом заданном направлении, вытянется в бесконечность.

Правда, существует вероятность, что пространство искривлено настолько, что Вселенная все же конечна. Но даже если это и так, то кривизна эта настолько мала, что, согласно некоторым теориям, доступный нашему наблюдению объем Хаббла представляет собой не более чем одну из тысячи подобных ему областей, существующих во Вселенной.

А недавно выведенный на орбиту космический телескоп «Планк» уже в ближайшие годы, возможно, покажет, что космическое пространство состоит из не менее чем миллиона объемов Хаббла, только один из которых нам когда-либо будет доступен.⁵ В целом я согласен с астрофизиками, хотя и понимаю, что некоторые из приведенных выше чисел могут быть спорными. Бесспорно только то, что мы видим лишь верхушку айсберга.

С другой стороны, микроскопы, ускорители частиц и различные устройства, предназначенные для получения данных о микромире, продолжают открывать «миниатюрную» Вселенную, освещая ранее недоступный для непосредственного исследования мир клеток, молекул, атомов и еще более мелких объектов. Впрочем, сейчас

⁵ Max Tegmark (MIT), interview with author, May 16, 2005. (Note: All interviews were conducted by Steve Nadis unless otherwise noted.)

эти исследования перестали кого-либо удивлять. Более того, мы вправе ожидать, что наши телескопы проникнут еще глубже в космическое пространство, а микроскопы и другие приборы вынесут на свет еще больше объектов невидимого мира.

Впрочем, за последние десятилетия благодаря ряду достижений теоретической физики, а также некоторым успехам геометрии, к которым мне посчастливилось быть причастным, мы смогли осознать нечто еще более удивительное: Вселенная не только больше, чем мы способны увидеть, но и, возможно, содержит также большее (или даже много большее) число измерений, чем те три пространственных измерения, с которыми мы привыкли иметь дело.

Высказанное мною утверждение трудно принять на веру, поскольку если и есть что-то, что мы можем с уверенностью сказать об окружающем нас мире, что-то, что говорят нам наши ощущения, начиная с первого сознательного момента и первых осязательных опытов, – то это число измерений. И это число – три. Не «три плюс-минус один», а именно три. По крайней мере, так казалось на протяжении очень длительного времени. Но все же, возможно (только лишь возможно), что помимо этих трех существуют и некие дополнительные измерения, настолько малые, что мы просто до настоящего времени не обращали на них внимания. И, несмотря на их небольшой размер, они могут играть столь важную роль, значение которой мы едва ли можем оценить, находясь в нашем привычном трехмерном мире.

Возможно, с этим нелегко смириться, но прошедшее столетие научило нас тому, что всякий раз, когда мы выходим за рамки повседневного опыта, интуиция начинает нас подводить. Специальная теория относительности утверждает, что если мы будем двигаться достаточно быстро, то время для нас станет течь медленнее, и это никак не соотносится с нашими повседневными ощущениями. Если мы возьмем чрезвычайно маленький объект, то, согласно требованиям квантовой механики, не сможем точно сказать, где он находится. Например, если мы захотим экспериментально определить, за дверью А или за дверью В находится объект, то обнаружим, что он ни там, ни тут, – в том смысле, что он в принципе не имеет абсолютного местоположения. (Возможна также ситуация, когда объект оказывается в обоих местах одновременно!) Другими словами, многие странные явления в нашем мире не только возможны, но и вполне реальны, и, быть может, крошечные скрытые измерения представляют собой как раз одну из таких реальностей.

Если эта идея верна, то должно существовать нечто вроде скрытой Вселенной, представляющей собой существенный фрагмент объективной реальности, находящейся за пределами наших ощущений. Это был бы настоящий научный переворот сразу по двум причинам. Во-первых, существование дополнительных измерений – главная тема научной фантастики более чем ста последних лет – само по себе столь потрясающе, что достойно занять почетное место в ряду величайших открытий в истории физики. А во-вторых, подобное открытие стало бы не завершением физической теории, а, напротив, отправной точкой для новых исследований. Ибо как генерал получает более четкую картину боя, наблюдая за ходом сражения с какого-нибудь возвышенного места, используя тем самым преимущества, которые дает ему дополнительное вертикальное измерение, так и законы физики могли бы приобрести более наглядный вид и, следовательно, стать более простыми для понимания, если смотреть на них с позиции более высоких размерностей.

Нам привычны перемещения в трех основных направлениях: север-юг, запад-восток, вверх-вниз. (Или, если читателю удобнее: вправо-влево, вперед-назад, вверх-вниз.) Куда бы мы ни шли и ни ехали – будь то поездка в бакалейный магазин или полет на Таити, – наше перемещение всегда представляет собой суперпозицию перемещений в этих трех независимых направлениях. Существование именно трех измерений настолько привычно, что даже попытка представить себе некое дополнительное измерение и понять, куда оно может быть направлено, видится тщетной. В течение долгого времени казалось, что то, что мы видим, то и имеем. Фактически именно это утверждал более двух тысяч лет назад Аристотель в своем трактате «О небе»: «Величина, делимая в одном измерении, есть линия, в двух – плоскость, в трех – тело, и, кроме них, нет никакой другой величины, так как три

измерения суть все измерения».⁶ В 150 году нашей эры астроном и математик Клавдий Птолемей попытался строго доказать, что существование четырех измерений невозможно, аргументируя тем, что нельзя построить четыре взаимно перпендикулярные прямые. Четвертый перпендикуляр, согласно его утверждению, должен был бы быть «совершенно неизмеримым и неопределимым».⁷ Его аргументация, однако, представляла собой не столько строгое доказательство, сколько отражала нашу неспособность представить и изобразить что-либо в четырех измерениях.

Для математиков каждое измерение суть «степень свободы» – независимое направление перемещения в пространстве. Муха, летающая над нашими головами, способна перемещаться в любом разрешенном в небе направлении. Если на ее пути нет препятствий, то она имеет три степени свободы. Представим теперь, что муха где-нибудь на автомобильной парковке завязла в свежем гудроне. Пока она временно лишена возможности двигаться, число ее степеней свободы равно нулю, и она полностью ограничена в своих перемещениях одной точкой – миром с нулевой размерностью. Но это создание упорно, и не без борьбы оно все же выбирается из гудрона, хотя и повреждает при этом крыло. Лишенная возможности взлететь, муха теперь имеет только две степени свободы и может разве что ползать по парковке. Почувствовав приближение хищника – например, проголодавшейся лягушки, – героиня нашего повествования ищет убежище в ржавой выхлопной трубе. Теперь у мухи только одна степень свободы, по крайней мере в течение того времени, пока ее движение ограничено одномерным (линейным) миром узкой трубы.

Но все ли варианты перемещения мы рассмотрели? Муха может летать в воздухе, прилипнуть к гудрону, ползти по асфальту или перемещаться внутри трубы – можно ли представить что-нибудь еще? Аристотель или Птолемей сказали бы «нет», что, может быть, и верно с точки зрения не особо предприимчивой мухи, однако для современных математиков, не находящих убедительных причин останавливаться на трех измерениях, этим дело не ограничивается. Напротив, они убеждены, что для правильного понимания таких геометрических концепций, как кривизна или расстояние, их следует рассмотреть во всех возможных размерностях от нуля до n , причем n может быть очень большим числом. Охват рассматриваемой концепции будет неполным, если мы остановимся на трех измерениях, – суть в том, что если какое-либо правило или закон природы работают в пространстве любой размерности, то такие правила и законы являются более сильными и, скорее всего, более фундаментальными, чем утверждения, справедливые только в частных случаях.

Даже если задача, над которой вы бьетесь, относится только к двух- или трехмерному случаю, возможно, ключом к решению окажется рассмотрение задачи в других размерностях. Вернемся к нашему примеру с мухой, летающей в трехмерном пространстве и имеющей три возможных направления движения, или три степени свободы. Теперь представим себе еще одну муху, которая свободно перемещается в том же пространстве; для нее, как и для первой мухи, тоже существуют ровно три степени свободы, но система в целом имеет уже не три, а шесть измерений – шесть независимых направлений для перемещения. Если количество мух, беспорядочно кружащихся в пространстве и движущихся независимо друг от друга, станет еще больше, то соответственно возрастут и сложность системы, и ее размерность.

Одним из преимуществ перехода к системам с более высокой размерностью является возможность предугадывать закономерности, которые невозможно было бы увидеть в более простой модели. В следующей главе, например, мы обсудим тот факт, что на сферической планете, полностью покрытой огромным океаном, вся вода не может одновременно течь в одном направлении, например с запада на восток, в каждой точке. В таком океане будут существовать особые точки, в которых вода вообще не будет двигаться. И хотя это правило применимо к двумерной поверхности, оно может быть получено только путем исследования системы с большим числом измерений, в которой рассматриваются все возможные

6 Aristotle, *On the Heavens*, at Ancient Greek Online Library, http://greektexts.com/library/Aristotle/On_The_Heavens/eng/print/1043.html.

7 Michio Kaku. *Hyperspace* (New York: Anchor Books, 1995), p. 34.

конфигурации, а именно все возможные перемещения малых порций воды по поверхности планеты. По этой причине мы постоянно переходим к более высоким размерностям, чтобы увидеть, к чему это может привести и что мы можем узнать. Несомненно, введение дополнительных измерений приводит к усложнению системы. В топологии, где объекты классифицируются в терминах формы в наиболее общем смысле этого слова, имеется два вида одномерных пространств: линия (кривая с двумя концами) и окружность (замкнутая кривая). Других просто не существует. Вы справедливо заметите, что линия может быть волнистой, а замкнутая кривая может иметь вытянутую форму, но эти вопросы относятся к области геометрии, а не топологии. Разница между геометрией и топологией столь же велика, как разница между рассматриванием земной поверхности через увеличительное стекло и рассматриванием Земли с борта космического корабля. В этом случае следует задать себе вопрос: хотите ли вы разглядеть каждую мельчайшую деталь – каждый горный хребет, каждую неровность и трещину на поверхности или вас удовлетворит более общая картина («огромный шар»)? Тогда как геометры чаще занимаются определением точной формы и кривизны рассматриваемого объекта, топологов интересует только его наиболее общая форма. Иными словами, топология является дисциплиной, рассматривающей объект как некую целостность, а этот подход демонстрирует разительный контраст с другими областями математики, в которых сложные объекты исследуются путем разбиения их на меньшие и более простые.

Вернемся к нашим размерностям. Как уже было сказано, в топологии существуют только две фундаментальные одномерные формы: прямая линия, которая идентична любой волнистой линии, и окружность, которая идентична любой петле – вытянутой, волнистой или даже имеющей форму квадрата – любой, какую только можно себе представить. Двухмерные пространства также можно разделить на два фундаментальных типа: это либо сферы, либо бублики. Тополог рассматривает любую двухмерную поверхность как сферу в том случае, если в ней нет дырок, при этом включая в эту категорию такие привычные нам геометрические тела, как кубы, призмы, пирамиды и даже похожие на дыни объекты, которые носят название эллипсоидов.

Вся разница между бубликом и сферой состоит исключительно в наличии дырки в первом и отсутствии ее во второй: неважно, насколько сильно вы деформировали сферу, – пока вы не проделаете в ней дырку, вы ни за что не получите из нее бублик, и наоборот. Другими словами, нельзя проделать ни одной новой дырки в объекте или разорвать его каким-то другим образом, не изменив при этом его топологию. И наоборот, тополог считает две формы функционально эквивалентными, если, вылепив их из пластичной глины или пластилина, можно трансформировать одну в другую, только сжимая и растягивая, но не разрывая ее.

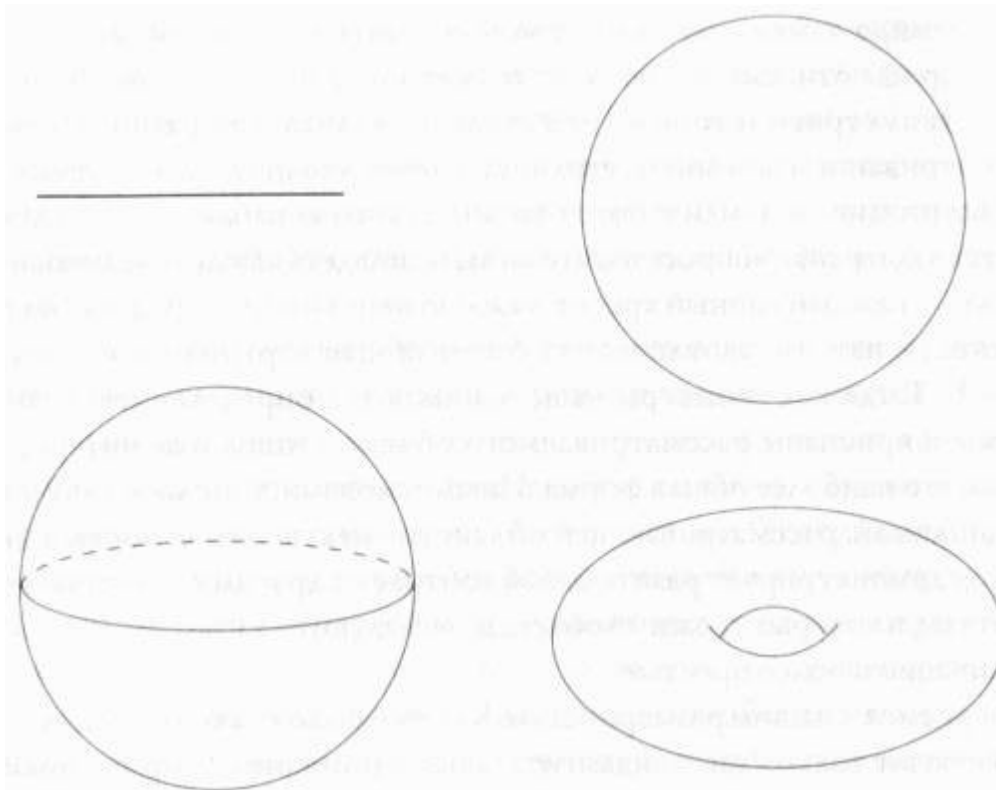


Рис. 1.1. В топологии существуют два вида одномерных пространств, принципиально отличных друг от друга: линия и окружность. Можно преобразовать окружность в петлю любой формы, но превратить окружность в линию, не разрезая ее, невозможно. Двухмерные поверхности, являющиеся *ориентируемыми*, – что означает, что они, подобно мячу, имеют две поверхности, а не одну, как лента Мёбиуса, – могут быть классифицированы по их *роду*, грубо говоря, по количеству дырок в данной поверхности. Так, сфера, имеющая род 0, в которой нет дырок, принципиально отлична от бублика, имеющего род 1 и, соответственно, одну дырку. Как и в случае с окружностью и прямой, невозможно превратить сферу в бублик, не проделав в ней дырку

Бублик с одной дыркой называется *тором*, но бубликоподобные поверхности могут иметь любое число дырок. Двухмерные поверхности, которые являются одновременно компактными (замкнутыми и ограниченными в пространстве) и ориентируемыми (имеющими две стороны), можно классифицировать по числу дырок в них, или по *роду*. Объекты, имеющие различный вид в двух измерениях, считаются топологически идентичными, если они относятся к одному и тому же роду.

Сделанное выше утверждение о существовании только двух возможных двухмерных форм – бублика и сферы, справедливо лишь в случае, когда мы ограничиваемся ориентируемыми поверхностями, а именно о таких поверхностях мы в основном и будем говорить в этой книге. Мяч, например, имеет две стороны – внутреннюю и внешнюю, и то же самое справедливо в отношении велосипедной камеры. Но существуют и более сложные поверхности – односторонние, или «неориентируемые», такие как бутылка Клейна или лента Мёбиуса, для которых указанное утверждение не верно.

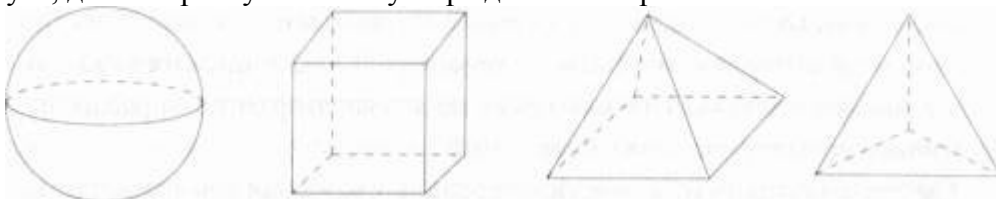


Рис. 1.2. В топологии сфера, куб и тетраэдр (как и многие другие геометрические тела) рассматриваются как эквивалентные, поскольку они могут быть получены друг из друга путем деформации, растяжения или сжатия без разрывов и разрезов

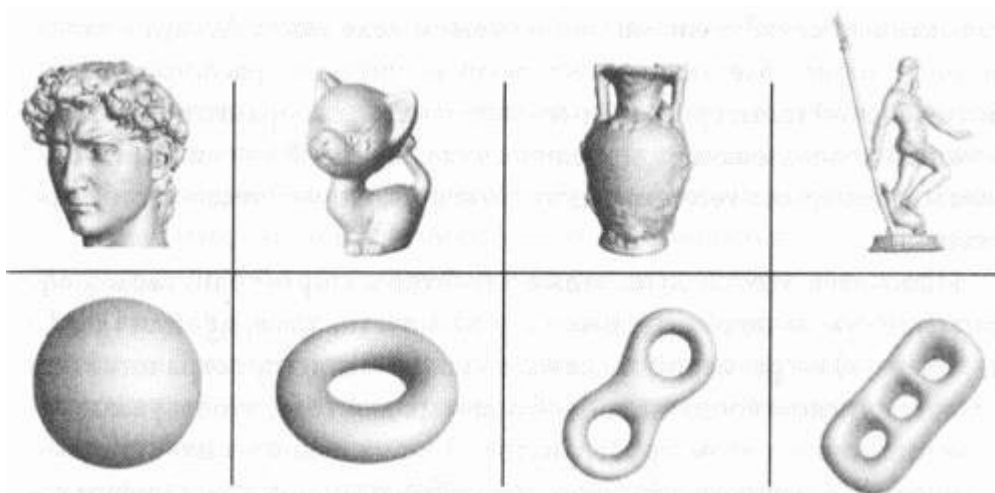


Рис. 1.3. Поверхности нулевого, первого, второго и третьего рода; термин «род» означает число дырок

Когда количество измерений превышает два, число возможных форм резко возрастает. Рассматривая пространства с большим числом измерений, мы должны допускать движения в тех направлениях, которые мы не в состоянии наглядно себе представить. Замечу, что речь идет не о тех направлениях, которые лежат, скажем, между направлением на север и направлением на запад (например, на северо-запад) и даже не о направлениях типа «к северу через северо-запад». Речь о таких направлениях, которые можно указать, только выйдя за пределы привычной нам системы координат, держа путь вдоль оси, которую только предстоит нарисовать.

Один из первых крупных прорывов на пути к изображению многомерных пространств был совершен в XVII веке великим Рене Декартом, французским математиком, философом, ученым и писателем. Впрочем, для меня он в первую очередь – геометр. В числе прочих вкладов в науку Декарт показал, что мышление на языке координат гораздо продуктивнее геометрических построений.

Система координат, которую он создал и которая сейчас носит название декартовой, объединила алгебру и геометрию. В узком смысле Декарт показал, что, построив три оси (x , y и z), перпендикулярные друг другу и пересекающиеся в одной точке, можно точно указать положение любой точки в трехмерном пространстве, используя три числа: x , y и z , называемые *координатами*. Но на самом деле вклад Декарта гораздо шире – одним блестящим жестом он значительно расширил область исследований геометрии. Применение системы координат сделало возможным использование алгебраических уравнений для описания сложных многомерных геометрических фигур, которые нелегко себе представить.

Используя этот подход, можно работать с пространством любой размерности – не обязательно (x , y , z), но и (a , b , c , d , e , f) или (j , k , l , m , n , o , p , q , r , s) – размерность каждого конкретного пространства определяется числом координат, необходимых для того, чтобы указать положение точки в этом пространстве. Вооружившись такой системой, можно рассматривать пространства любой размерности и проводить в них различные вычисления, не заботясь о том, как эти пространства изобразить.

Через два столетия после Декарта эту идею подхватил и развил великий немецкий математик Георг Фридрих Бернхард Риман. В 1850-х годах, работая над геометрией искривленных (неевклидовых) пространств – этой темы мы еще коснемся в следующей главе, – Риман установил, что такие пространства не ограничены в смысле количества измерений. Он также показал, как можно в этих пространствах точно рассчитывать расстояние, кривизну и другие характеристики. В 1854 году при соискании должности экстраординарного профессора Риман сделал доклад «О гипотезах, лежащих в основах геометрии». Изложенные в нем принципы известны с тех пор как *риманова геометрия*. В этом докладе Риман задался вопросом о размерности и геометрии Вселенной как целого.

Помимо этого, еще не достигнув тридцатилетнего возраста, Риман начал работу над математической теорией, способной связать воедино электричество, магнетизм, свет и гравитацию, – предвосхитив тем самым задачу, которая по сей день не дает покоя ученым.

Хотя Риману и удалось освободить пространство от ограничений евклидовой плоскости и трех измерений, физики в течение десятилетий не обращали внимания на его идеи. Отсутствие какого-либо интереса с их стороны можно объяснить отсутствием каких-либо экспериментальных доказательств, позволяющих сделать вывод об искривленности пространства или о существовании дополнительных измерений, помимо трех. Таким образом, новаторские математические построения Римана настолько опередили физику того времени, что потребовалось еще почти пятьдесят лет, чтобы физики (или, по крайней мере, один из физиков) смогли воспользоваться его идеями. Этим физиком стал Альберт Эйнштейн.

При разработке специальной теории относительности, которая была впервые представлена в 1905 году и в последующие годы развита в общую теорию относительности, Эйнштейн обратил внимание на идею немецкого математика Германа Минковского, состоящую в том, что время неразрывно связано с тремя пространственными измерениями, образуя с ними новую геометрическую конструкцию, известную как *пространство-время*. Так неожиданно время обрело статус четвертого измерения, которое еще десятилетиями ранее было включено Риманом в его элегантные уравнения.

Любопытно, что британский писатель Герберт Джордж Уэллс предвосхитил ту же идею десятью годами ранее в своем романе «Машина времени». Как объясняет путешественник по времени, главный герой романа: «И все же существуют четыре измерения, из которых три мы называем пространственными, а четвертое – временным. Правда, существует тенденция противопоставить три первых измерения последнему».⁸

Практически ту же самую мысль повторил Минковский в своей речи, произнесенной в 1908 году, за исключением разве что того факта, что он смог привести математическое обоснование своего претенциозного заявления: «Отныне время само по себе и пространство само по себе становятся пустой фикцией, и только единение их сохраняет шанс на реальность».⁹ Разумное обоснование того, что эти два понятия (пространство и время) были соединены чем-то вроде брачного союза – если, конечно, заключение брачного союза вообще нуждается в обосновании, – состоит в том, что любой объект движется не только через пространство, но и через время. Поэтому для того, чтобы описать какое-либо событие в четырехмерном пространственно-временном континууме, нужно не три, а четыре координаты – три пространственные и одна временная: (x, y, z, t) .

Хотя эта идея и может показаться немного пугающей, ее легко проиллюстрировать наглядным примером. Предположим, что вы собираетесь встретиться с кем-либо в торговом центре. Вы запомнили, где находится здание – например, на углу Первой улицы и Второй авеню, – и договариваетесь встретиться на четвертом этаже. Так вы задаете свои пространственные координаты x , y и z . Теперь остается только установить четвертую координату – принять решение о времени встречи. Когда все координаты, наконец, заданы, вашу встречу можно считать полностью подготовленной, за исключением разве что каких-либо непредвиденных обстоятельств, которые могут вмешаться в дело. Однако если вы хотите представить описанную выше ситуацию, пользуясь терминологией Эйнштейна, нельзя считать, что вы *отдельно* договариваетесь о месте и *отдельно* о времени встречи. На самом деле вы договариваетесь о расположении этого события в пространственно-временном континууме.

Так в начале XX века концепция пространства, в котором обитало человечество с античных времен, в один момент превратилась из уютного трехмерного уголка в эзотерическое царство четырехмерного пространства-времени. Концепция пространственно-временного континуума стала краеугольным камнем построенной

⁸ H. G. Wells, *The Time Machine* (1898), available at <http://www.bartleby.com/1000/1.html>.

⁹ Abraham Pais, *Subtle Is the Lord* (New York: Oxford University Press, 1982), p. 152.

Эйнштейном теории гравитации – общей теории относительности. Но является ли она тем самым концом пути, о котором мы уже говорили ранее? Станет ли представление о четырех измерениях окончательным или наше знание о пространстве-времени будет развиваться дальше? Возможный ответ на этот вопрос неожиданно нашелся в рукописи, присланной на рецензию Эйнштейну малоизвестным в то время немецким математиком Теодором Калуцей.

В теории Эйнштейна пространство-время задается десятью числами, позволяющими точно описать действие гравитации в четырех измерениях. Для более краткой записи уравнений гравитационного поля принято помещать эти десять чисел в матрицу 4×4 , более известную как *метрический тензор*, – квадратную таблицу, играющую в многомерных пространствах роль «линейки». В нашем случае метрика имеет 16 компонентов, но только 10 из них являются независимыми. 6 чисел из 16 повторяются, потому что гравитация наряду с другими фундаментальными взаимодействиями является по своей природе симметричной.

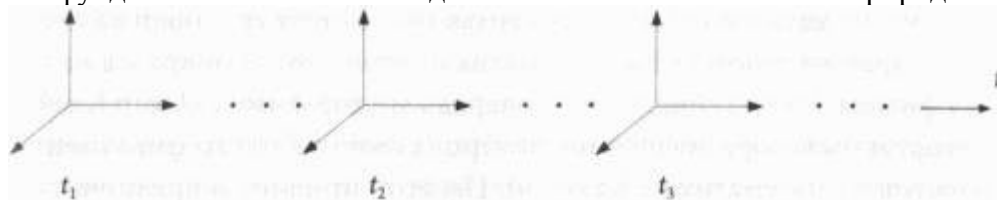


Рис. 1.4. Поскольку мы не знаем, как нарисовать четырехмерное изображение, этот рисунок представляет собой весьма грубое, умозрительное отображение четырехмерного пространства-времени. В основе концепции пространства-времени лежит предположение, что три пространственных измерения нашего мира (представленные здесь в виде осей x , y и z) полностью равноправны с четвертым измерением – временем. Мы представляем себе время как постоянно изменяющуюся *непрерывную переменную*, и на данном рисунке представлены моментальные снимки координатных осей, сделанные в различные моменты времени: t_1 , t_2 , t_3 и т. д. Таким способом мы попытались показать, что в целом существуют четыре измерения: три пространственных и еще одно, представленное временем

В своей статье Калуца взял за основу общую теорию относительности Эйнштейна и добавил еще одно дополнительное измерение, расширив матрицу 4×4 до размера 5×5 . Расширив пространственно-временной континуум до пяти измерений, Калуца сумел объединить две известные на тот момент физические силы – гравитацию и электромагнетизм – в одну единую силу. Для наблюдателя, находящегося в пятимерном мире, который вообразил Калуца, эти силы абсолютно идентичны, что, собственно, и понимается под объединением. А вот в четырехмерном мире они не сольются в одну, а, напротив, будут полностью независимы друг от друга.

Можно сказать, что это происходит потому, что обе силы просто не умещаются в одной матрице 4×4 . В то же время дополнительное измерение предоставляет достаточно свободного места в матрице для обеих сил, позволяя им быть составляющими одной более всеобъемлющей силы.

Рискуя навлечь на себя неприятности, все же скажу, что, по моему мнению, только математик обладает достаточной смелостью, чтобы считать, что переход к пространствам более высокой размерности позволит проникнуть в суть явления, которое до тех пор безуспешно пытались исследовать в пространствах более низкой размерности. Я так считаю потому, что математики все время имеют дело с дополнительными измерениями. Нам настолько удобно ими пользоваться, что мы уже не обращаем на них особого внимания. Вполне возможно, что мы способны манипулировать дополнительными измерениями даже ночью, не выходя из фазы быстрого сна.

Впрочем, хотя я и убежден, что только математик способен на столь смелый шаг, в данном случае математик в своей работе опирался на работу физика, Эйнштейна. В свою очередь другой физик, Оскар Клейн, о котором мы вскоре поговорим, построил свою работу на фундаменте, заложенном математиком Калуцей. По этой причине я предпочитаю говорить, что я работаю на стыке двух наук – математики и физики, где происходят процессы

сродни перекрестному опылению в ботанике. Именно благодаря тому, что я с 1970-х годов блуждаю по этой плодородной области, мне удалось стать причастным ко многим захватывающим открытиям.

Вернемся к провокационной идее Калуцы. Люди в те времена задавались вопросом, который не утратил своей актуальности и по сей день. И, несомненно, этим же вопросом задавался и Калуца: если действительно существует пятое измерение – абсолютно новое направление движения в знакомом нам четырехмерном мире, – почему его никто до сих пор не видел?

Очевидное объяснение состоит в том, что это измерение чрезвычайно мало. Но где же оно может находиться? Представьте себе нашу четырехмерную Вселенную как одну линию, которая простирается бесконечно в обоих направлениях. Основная идея заключается в том, что три пространственных измерения чрезвычайно (либо бесконечно) велики. Допустим, что время также можно представить в виде бесконечной линии, хотя это допущение и может быть спорным. В любом случае, каждая точка w на том, что мы представили себе как линию, на самом деле обозначает определенную точку (x, y, z, t) в четырехмерном пространстве-времени.

В геометрии линии имеют только длину, но не имеют толщины. Рассмотрим, однако, возможность того, что наша линия все же имеет какую-то толщину, увидеть которую можно лишь через очень мощное увеличительное стекло. С этой точки зрения линия, которую мы себе представили, – на самом деле не линия, а очень узкий цилиндр, что-то вроде садового шланга. Теперь, если мы разрежем наш шланг в каждой точке w , в сечении этого разреза мы получим крошечную окружность, которая, как уже говорилось выше, является одномерной кривой. Таким образом, эта окружность представляет собой дополнительное пятое измерение, которое в определенном смысле «прикреплено» к каждой точке четырехмерного пространства. Измерение, скрученное в крошечную окружность, в научном языке называется *компактным* (или компактифицированным). Значение слова «компактное» легко понять интуитивно: физики иногда говорят, что объект или пространство является компактным, если вы можете поместить его в багажник своего автомобиля. Существует и более точное определение: если вы будете двигаться вдоль компактного измерения в одном и том же направлении в течение достаточно долгого времени, то сможете вернуться в ту же точку, из которой вышли. Пятимерное пространство-время Калуцы включает в себя как протяженные (бесконечные), так и компактные (конечные) измерения.

Но если эта картина верна, то почему же мы не замечаем, что ходим кругами в пятом измерении? Ответ на этот вопрос в 1926 году дал шведский физик Оскар Клейн, развив тем самым идею Калуцы. Опираясь на квантовую теорию, Клейн рассчитал размер компактного измерения и получил число, которое действительно было крошечным – близким к так называемой планковской длине, величине настолько малой, насколько только можно себе представить – порядка 10^{-33} см в окружности.³⁰ Этим и объясняется то, что пятое измерение существует, оставаясь при этом ненаблюдаемым. Мы не способны ни увидеть это крошечное измерение, ни зафиксировать движение в его пределах.

Теория Калуцы-Клейна, как ее теперь называют, замечательно иллюстрировала роль дополнительных измерений в демистификации тайн природы. После размышлений над статьей Калуцы, длившихся на протяжении более двух лет, Эйнштейн написал в рецензии, что эта идея ему «чрезвычайно»¹⁰ понравилась. И понравилась она ему настолько, что в ближайшие двадцать лет он постоянно возвращался к ней (иногда в сотрудничестве с физиком Питером Бергманом). Но, в конце концов, теория Калуцы-Клейна была отвергнута. Отчасти это произошло потому, что эта теория предсказывала существование элементарной частицы, которая так никогда и не была обнаружена, отчасти – из-за того, что попытки использовать теорию для расчета отношения массы электрона к его заряду привели к

30 Oskar Klein, "From My Life of Physics," in The Oskar Klein Memorial Lectures, ed. Gosta Ekspong (Singapore: World Scientific, 1991), p. 110.

10 Leonard Mlodinow, *Euclid's Window* (New York: Simon & Schuster, 2002), p. 231.

неверным результатам. К тому же Калуца и Клейн – так же, как и Эйнштейн после них, – пытались объединить только электромагнетизм и гравитацию, поскольку ничего не знали ни о слабом, ни о сильном взаимодействии, природа которых была непонятна вплоть до второй половины XX столетия. По этой причине их попытки объединить все силы в одну были с самого начала обречены на провал, так как в колоде, которой они играли, не хватало пары важных карт. Но, по-видимому, основной причиной, по которой теория Калуцы-Клейна была отброшена, стало то, что ее создание пришлось как раз на то время, когда начинала набирать обороты квантовая революция.

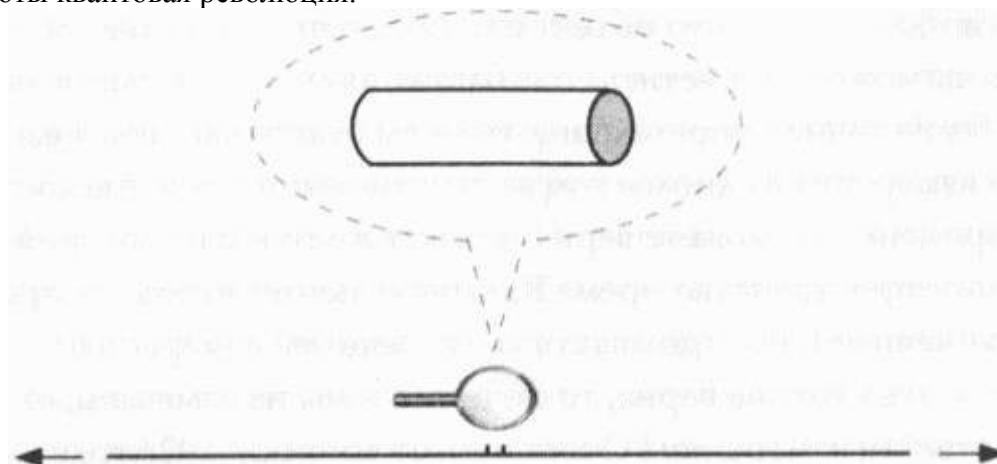


Рис. 1.5. Попробуем представить бесконечное, четырехмерное пространство-время в виде линии, неограниченно простирающейся в обоих направлениях. Линия, по определению, толщины не имеет. Но если бы мы посмотрели на эту линию через увеличительное стекло, то, как предполагается в теории Калуцы-Клейна, увидели бы, что линия все же имеет некоторую толщину. Это и есть то самое дополнительное скрытое измерение, и его размер ограничивается диаметром окружности сечения нашей линии

Тогда как Калуца и Клейн в центр своей физической модели поставили геометрические идеи, квантовая теория не только не основывается на геометрии, но и, напротив, вступает в противоречие с привычными геометрическими представлениями (этому вопросу посвящена четырнадцатая глава). В результате переворота, произведенного квантовой теорией, вихрем пронесшейся по физике XX века, и того сверхъестественно плодотворного периода, который последовал за этим, об идее дополнительных измерений вновь вспомнили лишь спустя почти пятьдесят лет.

Основанная на геометрии общая теория относительности, опубликованная Эйнштейном в 1915 году и представляющая собой квинтэссенцию современного понимания гравитации, также нашла огромный отклик в среде ученых, неизменно получая подтверждение в каждом последующем эксперименте, проводимом для ее проверки. В свою очередь квантовая теория прекрасно описывает три из четырех известных взаимодействий: электромагнитное, слабое и сильное. Фактически, это наиболее точная из всех существующих и, по словам гарвардского физика Эндрю Строминджера, «возможно, наиболее тщательно проверенная теория за всю историю человеческой мысли».¹¹ К примеру, предсказания поведения электрона в электрическом поле совпадают с экспериментальными данными с точностью до десятого знака после запятой.

К сожалению, эти две надежнейшие теории полностью несовместимы друг с другом. Все попытки соединить общую теорию относительности с квантовой механикой приводят к ужасной несурразице. Проблема в том, что объекты квантового мира постоянно движутся, или флуктуируют, и чем меньше размер, тем больше флуктуация. В результате для случая сверхмалых масштабов квантовая механика предсказывает бурную, постоянно изменяющуюся картину, которая совершенно не согласуется с геометрическим

¹¹ Andrew Strominger, “Black Holes and the Fundamental Laws of Nature,” Lecture, Harvard University, Cambridge, MA, April 4, 2007.

представлением о совершенно гладком пространстве-времени, на котором основана общая теория относительности.

В квантовой механике все основано на вероятностях, и когда в квантовую модель пытаются ввести общую теорию относительности, расчеты часто приводят к появлению бесконечных вероятностей. Возникновение при расчетах бесконечных значений является сигналом, что в них допущена какая-то ошибка. Едва ли можно радоваться такому положению дел, когда две наиболее удачные теории – одна, описывающая огромные объекты, такие как планеты и галактики, а вторая – крошечные, такие как электроны и кварки, при объединении дают полную ахинею. Решение оставить квантовую механику и общую теорию относительности в виде двух отдельных теорий тоже нельзя считать удовлетворительным хотя бы потому, что существуют такие места (например, черные дыры), где очень большое и очень малое сходятся вместе, и ни одна из теорий сама по себе не в состоянии прояснить их природу. «Там уже не будет законов физики, – утверждает Строминджер. – Там будет только один закон, и он будет прекраснейшим из всех существующих».¹²

Подобное утверждение – будто Вселенную можно описать при помощи «единой теории поля», которая соединяет все силы природы в единое целое, – является не только эстетически привлекательным, но и напрямую связано с представлением о рождении Вселенной в результате Большого взрыва. В тот момент плотность энергии Вселенной была столь велика, что все силы действовали как одна единая сила. Калуце и Клейну, точно так же, как и Эйнштейну, не удалось построить теорию, которая вобрала бы в себя все наши физические знания. Но сейчас, когда у нас больше деталей мозаики, среди которых, будем надеяться, есть все важные элементы, возникает соблазн: а не попробовать ли снова построить единую теорию поля и на этот раз достичь успеха там, где не удалось великому Эйнштейну?

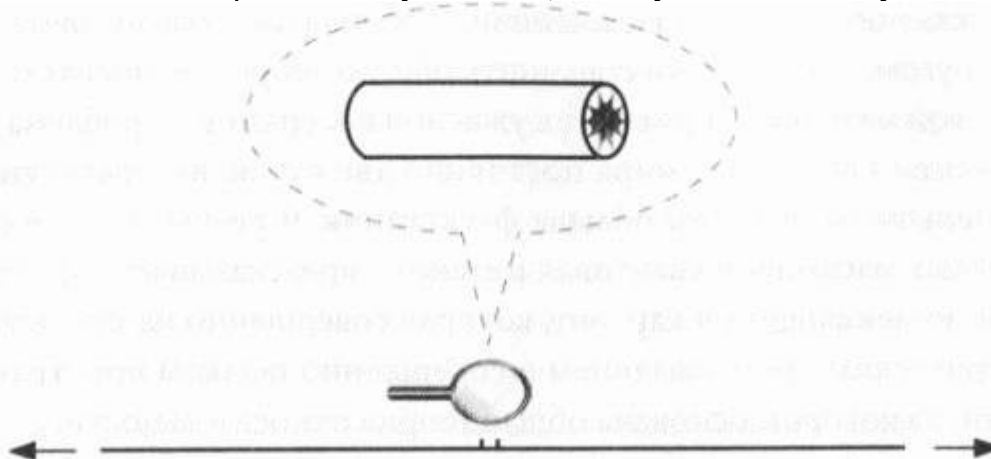


Рис. 1.6. Теория струн взяла на вооружение старую идею Калуцы-Клейна о скрытом «дополнительном» измерении и значительно расширила ее. Если мы внимательно посмотрим на четырехмерное пространство-время, представленное на рисунке в виде линии, то увидим, что на самом деле оно скрывает в себе шесть дополнительных измерений, скрученных в замысловатое, хотя и крошечное геометрическое пространство, известное как многообразие Калаби-Яу. (Более подробно эти пространства будут обсуждаться далее, поскольку они являются основной темой книги.) Какой бы участок линии вы ни вырезали, вы все равно найдете в нем скрытое многообразие Калаби-Яу, и все многообразия, полученные таким способом, будут идентичными

Именно это и пытаются сделать создатели теории струн – захватывающей, хотя и до сих пор не нашедшей экспериментального подтверждения попытки объединить различные взаимодействия путем замены точечных объектов физики элементарных частиц на протяженные (хотя и крошечные) физические объекты, называемые *струнами*. Как и теория

¹² Ibid.

Калуцы-Клейна, теория струн предполагает, что наличие дополнительных измерений помимо тех трех (или четырех), с которыми мы ежедневно сталкиваемся, является необходимым условием для объединения всех сил природы в одну. Большинство вариантов теории струн предполагают существование десяти или одиннадцати (с учетом времени) измерений, необходимых для осуществления Великого объединения.

Но дело не только в том, чтобы ввести несколько дополнительных измерений и надеяться на лучшее. Чтобы теория получила практическое применение, этим измерениям следует поставить в соответствие определенные размеры и формы (вопрос о том, какие именно размеры и формы, – пока остается открытым). Иными словами, геометрия играет в теории струн особую роль, и многие ее сторонники подтверждают, что именно геометрия дополнительных измерений во многом определяет вид той Вселенной, в которой мы живем, обуславливая свойства всех наблюдаемых (а также по тем или иным причинам ненаблюдаемых) в природе физических сил и элементарных частиц.

Начиная с шестой главы мы займемся теорией струн более подробно. Но прежде чем углубиться в сложную математику, лежащую в ее основе, следует более подробно изучить основы геометрии. (Мой, хотя и предвзятый, опыт говорит, что такая методика является удачной.) Поэтому мы отступим на несколько шагов назад от XX и XXI столетий и заглянем в историю этой почтенной науки, чтобы понять, какое место она занимает в существующем порядке вещей.

И если говорить о том месте, которое она занимает, то лично для меня геометрия всегда была чем-то вроде скоростной полосы на автобане истины – наиболее коротким путем из точки, в которой мы находимся, в точку, в которой мы хотим оказаться. Это неудивительно, если принять во внимание, что большая часть геометрических исследований посвящена как раз указанной проблеме – нахождению расстояния между двумя точками. Поэтому запаситесь терпением, если путь от математики Древней Греции к сложнейшим построениям теории струн покажется вам несколько запутанным и извилистым. Порой самый короткий путь – вовсе не самый прямой, в чем мы скоро и убедимся.

Вторая глава

Место геометрии в мироздании

На протяжении почти двух с половиной тысяч лет в европейской, точнее, в западной традиции изучение геометрии было обязательным, поскольку сложно себе представить более изящную, безупречную, образцовую истину, доступную нам вне Божественного откровения. Изучение геометрии в некотором роде вскрывает самую сущность физического мира.

Пирс Бёрсилл-Холл.

«Почему мы изучаем геометрию?»

Так что же такое геометрия? Многие полагают, что геометрия – это только предмет, который они изучали в средней школе, – совокупность технических приемов, необходимых для измерения углов между прямыми, вычисления площадей треугольников, кругов и прямоугольников и, возможно, для установления некоторой меры эквивалентности между различными геометрическими объектами. Даже если пользоваться столь ограниченным определением, не возникает сомнений, что геометрия является весьма полезным инструментом – к примеру, для архитекторов, ежедневно использующих ее в своей работе. Да, несомненно, геометрия включает в себя все вышеперечисленное, но также и многое другое, поскольку она имеет отношение к архитектуре в самом широком смысле этого слова, начиная от мельчайших масштабов и заканчивая огромнейшими. А для некоторых людей

вроде меня, одержимых идеей определения размера, формы, кривизны и структуры космического пространства, геометрия – основной инструмент.

Слово *геометрия*, произошедшее от слов *гео* (земля) и *метрео* (измеряю) изначально значило «измерение земли». Но сейчас это слово используется в гораздо более общем значении – «измерение пространства», хотя пространство само по себе и не является достаточно строго определяемым понятием. Как сказал однажды Георг Фридрих Бернхард Риман: «Геометрия предполагает заданными заранее как понятие пространства, так и первые основные понятия, которые нужны для выполнения пространственных построений, давая таким образом лишь номинальные определения понятий».¹³

Как бы странно это ни прозвучало, но мы предпочитаем сохранять понятие пространства весьма расплывчатым по той причине, что оно подразумевает многое, для чего мы не имеем других обозначений. Таким образом, эта неопределенность в каком-то плане удобна. К примеру, когда мы рассматриваем вопрос о размерности пространства или размышляем о его форме как единого целого, мы могли бы отнести эти рассуждения и ко всей Вселенной. В более узком значении понятие пространства может относиться как к весьма простой геометрической конструкции, такой как точка, линия, плоскость, сфера или тор – все те типы геометрических фигур, которые способен нарисовать студент, так и к гораздо более сложным и неизмеримо более трудноизображаемым объектам.

Представим, к примеру, что у нас имеется некая совокупность точек, расположенных совершенно случайным образом, и что при этом абсолютно невозможно ввести определение расстояния между ними. С точки зрения математики это пространство не будет иметь геометрии; это будет просто случайный набор точек. Однако стоит лишь ввести некую измерительную функцию, дающую возможность рассчитывать расстояния между любыми двумя точками, называемую метрикой, как пространство неожиданно приобретает упорядоченность. Теперь оно характеризуется определенной геометрией. Иными словами, метрика предоставляет всю информацию, необходимую для того, чтобы сделать вывод о форме пространства, на котором она задана. Вооружившись способом измерять форму пространства, можно с большой точностью определить, является ли пространство плоским, и установить степень его отклонения от плоскости, или, иными словами, вычислить кривизну пространства, что я лично нахожу наиболее интересным.

Таким образом, геометрия представляет собой нечто большее, чем просто набор методов для измерения расстояний – что, разумеется, не принижает измерительную функцию геометрии, которой я также восхищаюсь, – геометрия является одним из основных доступных нам способов исследования Вселенной. Физика и космология уже по одному своему названию играют главные роли в понимании Вселенной. Роль геометрии, хотя и менее заметна, но так же важна. Я даже рискну сказать, что геометрия не только заслуживает места за одним столом с физикой и космологией, но во многих отношениях она и является этим столом.

Это действительно так, поскольку вся вселенская драма – сложнейший танец частиц, атомов, звезд и других объектов, постоянно изменяющихся, движущихся, взаимодействующих, – разыгрывается на подмостках, называемых «пространством», и ее никогда не понять без понимания существенных особенностей самого пространства. Пространство представляет собой нечто гораздо большее, чем просто театральный задник, по сути оно обуславливает важнейшие физические свойства тех объектов, которые в нем находятся. Действительно, как принято считать в настоящее время, материя или частицы, покоящиеся или движущиеся в пространстве, на самом деле являются частями этого пространства, или, точнее, пространственно-временного континуума. Геометрия в свою очередь может накладывать ограничения на поведение пространственно-временного континуума и физических систем в целом – ограничения, которые можно обнаружить исходя исключительно из принципов математики и логики.

¹³ Georg Friedrich Bernhard Riemann, “On the Hypotheses Which Lie at the Foundations of Geometry,” lecture, Göttingen Observatory, June 10, 1854.

Рассмотрим, например, климат Земли. Хотя это и не очевидно, геометрия оказывает существенное влияние на климат – в этом случае основную роль играет форма нашей планеты. Если бы мы жили не на поверхности сферы, а на поверхности тора или бублика, то наша жизнь – так же, как и климат нашей планеты, – была бы совершенно другой.

На сфере все ветры не могут дуть одновременно в одном и том же направлении (например, восточном), так же как не могут иметь одно и то же направление одновременно все океанические течения (как было показано в предыдущей главе). Неизбежно будут существовать точки, такие как Северный и Южный полюсы, где ветры или течения больше не будут иметь восточного направления, в таких точках исчезает само понятие «восточное направление». Иная ситуация складывается на тороидальной поверхности, где подобных препятствий нет, и ветры или течения могут перемещаться в одном и том же направлении по всей поверхности без каких-либо помех. Топологические различия, несомненно, влияют на глобальные процессы циркуляции, однако, если вас интересуют более конкретные климатические последствия, такие как различие сезонных изменений на поверхности сферы и тора, – вам лучше спросить об этом метеоролога.

Область исследований геометрии на самом деле еще шире. Использование геометрии совместно с общей теорией относительности Эйнштейна показало, что масса и энергия Вселенной являются положительными величинами, и, следовательно, четырехмерное пространство-время, в котором мы живем, стабильно. Помимо этого, согласно геометрическим принципам, где-то во Вселенной должны существовать странные места, называемые сингулярностями, расположенные, к примеру, в центрах черных дыр, где плотность вещества стремится к бесконечности и известные нам законы физики перестают работать. В качестве еще одного примера – на этот раз из теории струн – можно привести геометрию загадочных шестимерных пространств, называемых многообразиями Калаби-Яу, в которых предположительно и происходит большая часть важнейших физических процессов. Эта геометрия способна объяснить разнообразие существующих элементарных частиц, предсказывая не только их массу, но и характер сил взаимодействия между ними. Помимо прочего, исследование подобных многомерных пространств позволило выявить возможные причины слабости гравитации по сравнению с другими фундаментальными взаимодействиями, а также дало ключи к открытию механизмов, лежащих в основе инфляционного расширения ранней Вселенной и существования темной энергии, управляющей расширением космического пространства.

Как видите, мои слова о том, что геометрия наряду с физикой и космологией является бесценным орудием для раскрытия секретов Вселенной, не были пустым хвастовством. Более того, если принять во внимание последние успехи математики, которые будут описаны в этой книге, прогресс в области наблюдательной космологии и возникновение теории струн, пытающейся осуществить никому не удавшийся до сих пор великий синтез, складывается впечатление, что эти три направления исследований должны сойтись в одной точке. Следовательно, человеческое познание сейчас стоит на пороге выдающихся открытий и готово сделать огромный шаг вперед, причем геометрия во всех смыслах командует парадом.

Следует помнить, что, куда бы мы ни двигались в области геометрии и что бы мы ни делали, мы не начинаем наш путь с чистого листа. Мы всегда ссылаемся на то, что было установлено до нас: гипотезы, доказательства, теоремы или аксиомы, используя фундамент, который в большинстве случаев был возведен за тысячи лет до этого. В этом смысле геометрию, как и другие науки, можно считать тщательно продуманным строительным проектом. В первую очередь закладывается фундамент, и если он заложен удачно, так сказать, положен на твердую поверхность, то устоит и само здание и надстройки на его крыше, если, конечно, они также сделаны с соблюдением разумных принципов.

В этом, по сути, и состоит красота и сила моего призвания. Если речь идет о математике, от нее всегда ожидают абсолютно точных утверждений. Математическая теорема – это точное утверждение, остающееся непреложной истиной вне зависимости от пространства, времени, мнения людей и авторитетов. Эта особенность математики резко

отличает ее от эмпирических наук, в которых основным методом исследования является постановка экспериментов, по результатам которых и принимается или не принимается то или иное утверждение (конечно, после достаточно большого испытательного срока). В этом случае при последующей проверке результаты могут быть пересмотрены, и нельзя быть уверенными на сто процентов, что установленный вами факт – истина в последней инстанции.

Конечно, часто удается найти более общий и совершенный вариант известной математической теоремы, что, впрочем, не упраздняет ее истинности. Продолжая аналогию со строительством, можно сказать, что здание при этом остается столь же крепким; производится всего лишь небольшое расширение или перепланировка, не затрагивающая фундамента. Иногда косметического ремонта оказывается недостаточно, и тогда приходится даже разрушать «интерьер» здания и создавать новый. Несмотря на то что старые теоремы все так же справедливы, порой возникает потребность в новых разработках или свежем наборе данных, чтобы создать более полную картину.

Наиболее важные теоремы обычно проверяют и перепроверяют много раз и многими способами, не оставляя ни единого шанса на ошибку. Разумеется, доказательства менее очевидных теорем, которые не подверглись столь тщательной проверке, могут содержать ошибки. Если ошибка обнаружена, комнату в здании или даже целое крыло приходится разрушать и выстраивать заново. И все же остальное здание – прочное сооружение, прошедшее проверку временем, – остается нетронутым.

Одним из величайших архитекторов геометрии стал Пифагор, которому приписывают открытие формулы, представляющей собой одно из самых прочных сооружений из когда-либо возведенных в математике. Теорема Пифагора (именно такое название она носит) утверждает, что в прямоугольном треугольнике, то есть в треугольнике, один из углов которого равен 90° , квадрат длины наибольшей из сторон (гипотенузы) равен сумме квадратов двух более коротких (катетов). Бывшие и нынешние школьники легко вспомнят соответствующую формулу: $a^2 + b^2 = c^2$. Это весьма простое, но невероятно мощное утверждение столь же важно сегодня, как и 2500 лет назад, когда оно было сформулировано. Применение данной теоремы не ограничивается школьной математикой. Эта теорема настолько важна и всеобъемлюща, что я, например, использую ее почти каждый день, практически не замечая этого.

На мой взгляд, теорема Пифагора – важнейшее утверждение в геометрии, одинаково важное как для современной математики высоких размерностей, например для нахождения расстояний в пространствах Калаби-Яу и решения эйнштейновских уравнений движения, так и для расчетов на двумерной плоскости, такой как лист бумаги с домашним заданием, или в трехмерной классной комнате начальной школы. Значимость этой теоремы обусловлена тем, что ее можно использовать для расчета расстояний между двумя точками в пространстве любой размерности. Как я уже сказал в начале этой главы, геометрия постоянно использует понятие расстояния, по причине чего эта формула является основой практически всех расчетов.

Более того, я нахожу эту теорему также чрезвычайно красивой, хотя о вкусах, как известно, не спорят. Нам, как правило, нравятся те вещи, которые хорошо нам знакомы, – вещи, которые стали для нас настолько привычными, настолько естественными, что мы считаем их само собой разумеющимися, подобно восходу и заходу солнца. Кроме того, теорема Пифагора очень лаконична – три простые переменные, возведенные во вторую степень, $a^2 + b^2 = c^2$, – ее запись почти столь же кратка, как и запись других известных законов, таких как $F = ma$ или $E = mc^2$. Красота для меня заключается в элегантности столь простого утверждения, находящегося в настолько полном согласии с природой.

Помимо ценности теоремы Пифагора самой по себе, без сомнения являющейся краеугольным камнем геометрии, не менее важным представляется и тот факт, что ее истинность была доказана, и это доказательство стало первым зафиксированным доказательством в математике. Египетские и вавилонские математики использовали

отношение между катетами и гипотенузой прямоугольного треугольника задолго до рождения Пифагора. Но ни египтяне, ни вавилоняне не только никогда не пытались доказать эту теорему, но, по-видимому, и само понятие доказательства им было незнакомо. По словам математика Э. Т. Белла, именно доказательство теоремы и стало наибольшим вкладом Пифагора в геометрию:

До него геометрия была скорее собранием эмпирически установленных правил, без каких-либо ясных указаний на их взаимную связь и без малейшего предположения, что эти правила можно логически вывести из сравнительно небольшого числа утверждений. Метод доказательства настолько пронизывает сейчас всю математику, что кажется подразумевающимся сам собой, и нам трудно представить себе время, когда этого метода еще не существовало.¹⁴

Вполне возможно, что именно Пифагор впервые доказал эту теорему, хотя вы должны были обратить внимание на мои слова о том, что ему лишь «приписывается» ее доказательство, будто бы существуют некоторые сомнения по поводу авторства. Так оно и есть. Пифагор был культовой фигурой, и многие из открытий его помешанных на математике последователей были приписаны Пифагору задним числом. Таким образом, вполне возможно, что доказательство теоремы Пифагора было получено одним из продолжателей его дела через одно или два поколения после Пифагора. Правды мы уже никогда не узнаем: Пифагор жил в VI столетии до нашей эры и практически не оставил после себя никаких записей.

К нашему счастью, сказанное выше не относится к наследию Евклида, одного из наиболее известных геометров всех времен и народов, превратившего геометрию в точную, строгую дисциплину. В отличие от Пифагора, Евклид оставил после себя огромное количество сочинений, наиболее выдающимся из которых являются «Начала», увидевшие свет примерно в 300 году до нашей эры – трактат в тринадцати томах, восемь из которых посвящены геометрии в двух и трех измерениях. «Начала» называют одной из наиболее влиятельных книг из когда-либо написанных, «прекрасным трудом, значение которого сравнимо разве что со значением Библии».¹⁵

14 E. T. Bell, *Men of Mathematics* (New York: Simon & Schuster, 1965), p. 21.

15 Leonard Mlodinow, *Euclid's Window* (New York: Simon & Schuster, 2002), p. xi.

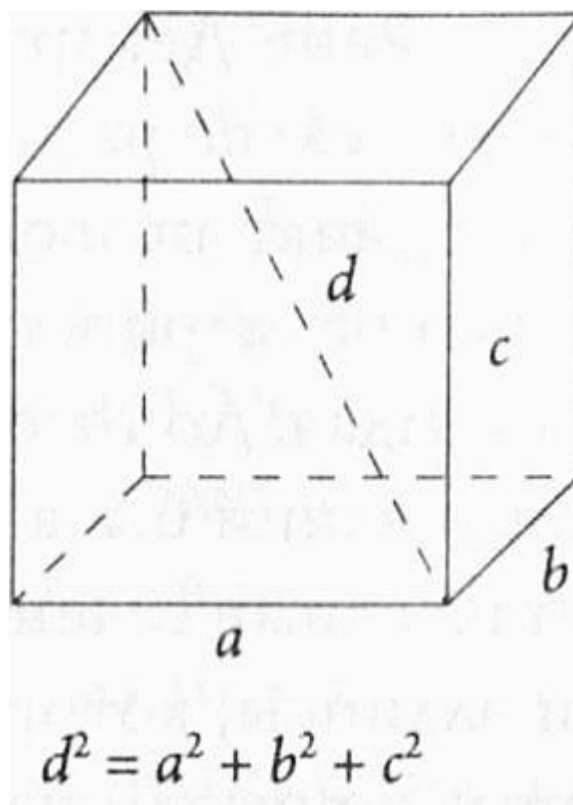


Рис. 2.1. Теорему Пифагора чаще всего иллюстрируют для случая двух измерений, изображая прямоугольный треугольник, в котором сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы: $a^2 + b^2 = c^2$. Однако, как показано на приведенном рисунке, эта теорема так же верна и для случая трех и большего числа измерений $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$

В своем знаменитом сочинении Евклид заложил основы не только геометрии, но и всей математики, которая неразрывно связана с тем принципом аргументации, который сейчас называют Евклидовым: любое доказательство начинается с четкого определения понятий и набора однозначно установленных аксиом или постулатов (эти два слова являются синонимами) и осуществляется при помощи строгих логических умозаключений; доказанная теорема, в свою очередь, может быть положена в основу доказательства дальнейших утверждений. Евклид, пользуясь исключительно этим методом, доказал в общей сложности больше четырехсот теорем, сведя таким образом воедино все геометрические знания своего времени.

Стэнфордский математик Роберт Оссерман объяснил столь безапелляционное приятие метода Евклида следующим образом: «В основе всего лежало чувство уверенности, что в мире абсурдных суеверий и сомнительных догадок утверждения, приведенные в “Началах”, являются твердо установленной истиной без малейшей тени сомнения». Эдна Сент-Винсент Миллей выразила аналогичное восхищение в своем стихотворении «Евклид один лишь видел обнаженной красоту».¹⁶

Следующим человеком, внесшим решающий вклад в предмет нашего рассказа, – впрочем, без какого-либо пренебрежения к заслугам других достойных математиков, о достижениях которых мы не упомянули – можно считать Рене Декарта. Как уже говорилось в предыдущей главе, Декарт значительно расширил сферу исследований геометрии, введя систему координат, позволившую математикам рассуждать о пространствах любых размерностей и использовать алгебру при решении геометрических задач. До того как Декарт преобразовал геометрию, ее область исследований была ограничена прямыми линиями, окружностями и коническими сечениями – такими кривыми, как параболы, гиперболы и

¹⁶ Edna St. Vincent Millay, “Euclid Alone Has Looked on Beauty Bare,” quoted in Robert Osserman, *Poetry of the Universe* (New York: Anchor Books, 1995), p. 6.

эллипсы, которые можно получить, рассекая плоскостью бесконечный конус под разными углами. Появление системы координат дало возможность описывать при помощи уравнений очень сложные фигуры, которые невозможно вообразить каким-либо другим способом. Рассмотрим, к примеру, уравнение $x + y^m = 1$. При помощи декартовых координат решить это уравнение и нарисовать соответствующую кривую не составит труда. Однако до появления системы координат было непонятно, как ее изобразить. В местах, которые ранее считались непроходимыми, Декарт указал путь, по которому двигаться дальше.

Этот путь стал еще четче, когда через пятьдесят лет после Декарта Исаак Ньютон и Готфрид Лейбниц, разделяющие идеи Декарта в области аналитической геометрии, создали дифференциальное и интегральное исчисление. На протяжении десятилетий и столетий новые инструменты дифференциального и интегрального исчисления внедрялись в геометрию такими математиками, как Леонард Эйлер, Жозеф Лагранж, Гаспар Монж и, в первую очередь, Карл Фридрих Гаусс, под чьим руководством в 1820-х достигла своего совершеннолетия так называемая *дифференциальная геометрия*. Дифференциальная геометрия предполагает использование декартовой системы координат для описания поверхностей, которые затем могут быть детально проанализированы с помощью методов дифференциального исчисления; дифференцирование – это метод нахождения угла наклона любой гладкой кривой.

Создание дифференциальной геометрии, которая продолжила свое развитие и после Гаусса, стало величайшим достижением. С помощью инструментов дифференциального исчисления геометры описывали свойства кривых и поверхностей с намного большей точностью, чем это было возможно ранее. Подобные сведения можно получить путем дифференцирования или, что эквивалентно, путем нахождения производных, показывающих, как изменяется функция в ответ на изменение аргумента. Функцию можно рассматривать как алгоритм или формулу, в которой каждому числу, поданному на вход (значению аргумента), ставится в соответствие некоторое число на выходе (значение функции). Например, в функции $y = x^2$ значение аргумента x подается на вход, а на выходе получается значение функции y . Функция однозначна: если вы будете подставлять в нее одно и то же значение x , то всегда получите одно и то же значение y , так, в нашем примере, подставляя $x = 2$, вы всегда получите $y = 4$. Производная характеризует отношение приращения значения функции к заданному приращению аргумента; величина производной отражает чувствительность функции к незначительным изменениям аргумента.

Производная – это не только абстрактное понятие; это реальное число, которое можно вычислить и которое сообщает нам о наклоне кривой или поверхности в данной точке. Например, в приведенном выше примере можно найти производную функции (которая в данном случае оказывается параболой) в точке $x = 2$. Что произойдет со значением функции y , если немного сместиться из этой точки, например, в точку $x = 2,001$? В этом случае значение y станет равным 4,004 (с точностью до трех знаков после запятой). Производная в этой точке будет равна отношению приращения значения функции (0,004) к приращению значения аргумента (0,001), то есть 4. Именно это число и будет производной функции при $x = 2$ или, другими словами, наклоном кривой (параболы) в этой точке.

Расчеты, конечно, могут оказаться гораздо более трудоемкими при переходе к более сложным функциям и более высоким размерностям. Но вернемся на время к нашему примеру. Мы получили производную функции $y = x^2$ из отношения приращения y к приращению x , поскольку производная функции говорит нам о наклоне (или крутизне) в данной точке – тогда как наклон служит непосредственной мерой приращения y по отношению к приращению x .

Проиллюстрируем это другим способом: рассмотрим мяч, лежащий на некоей поверхности. Если мы слегка толкнем мяч в какую-либо сторону, как это отразится на его вертикальной координате? Если поверхность более или менее плоская, то высота, на которой находится мяч, практически не изменится. Но если мяч находился на крутом склоне, изменение высоты будет более существенным. Таким образом, производные характеризуют

наклон поверхности в непосредственной близости от мяча.

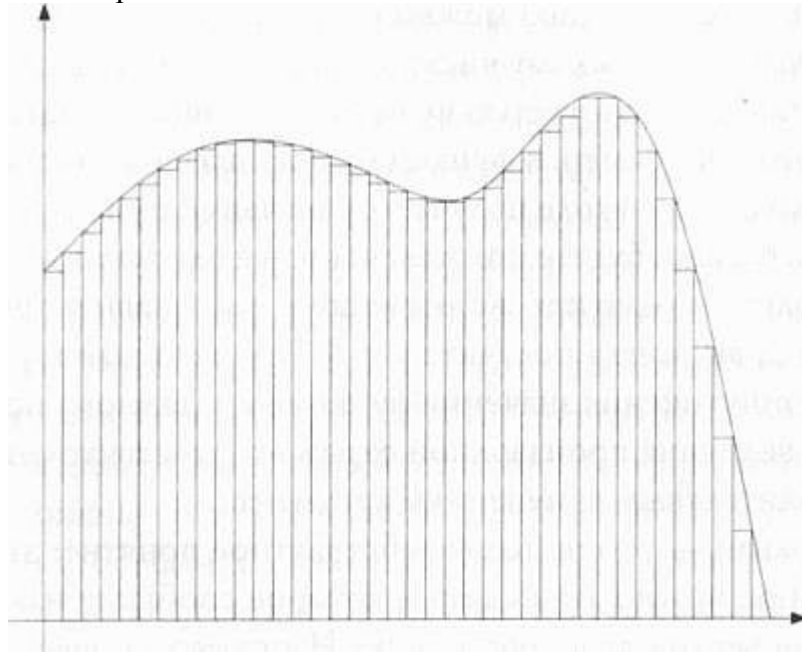
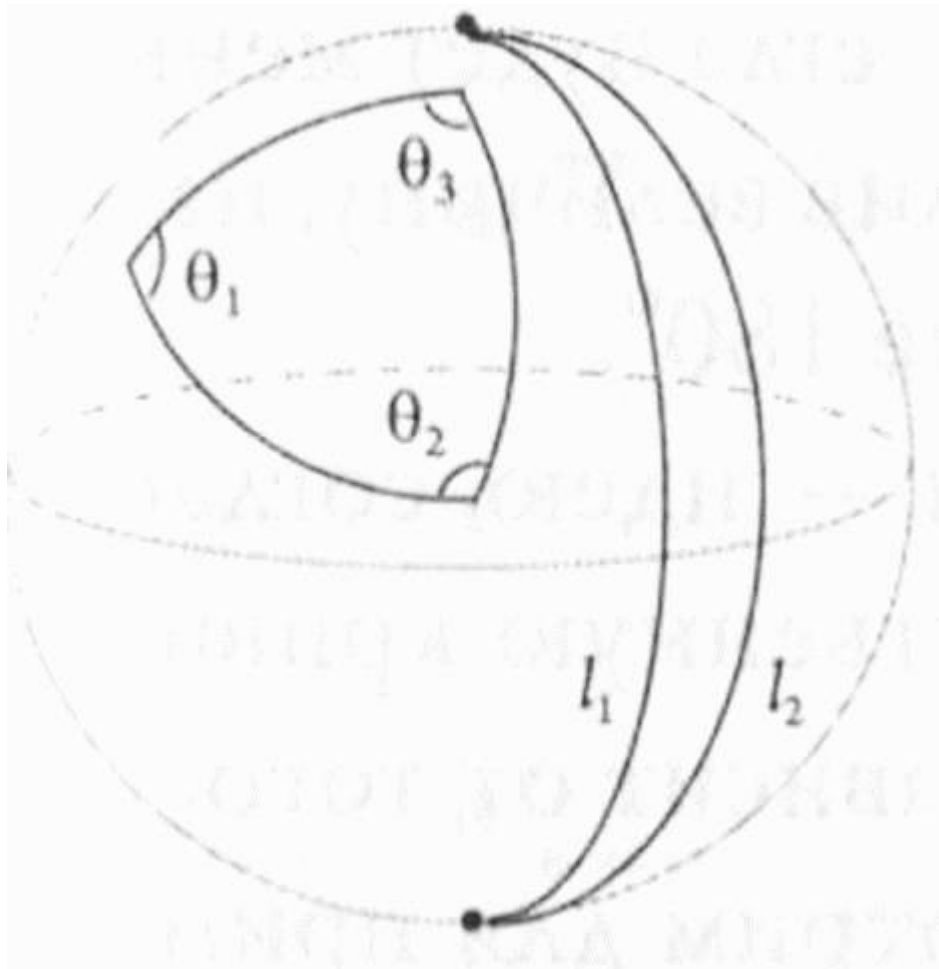


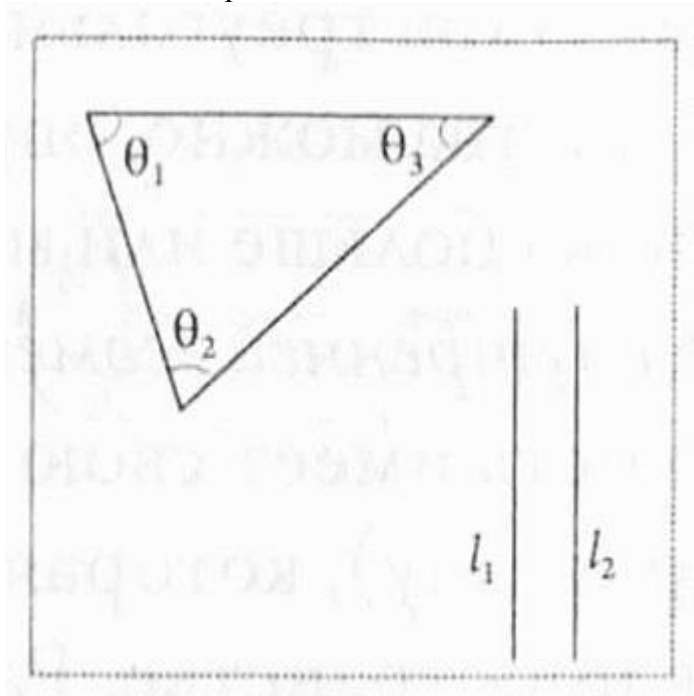
Рис. 2.2. Площадь фигуры, ограниченной кривой, можно вычислить при помощи интегрального исчисления, разделив область под кривой на бесконечно узкие прямоугольники и затем сложив их площади. По мере того как прямоугольники становятся все уже и уже, это приближение становится все точнее и точнее. Если перейти к пределу, при котором ширина прямоугольников стремится к нулю, результат станет точным

Конечно, нет причин ограничиваться только одной точкой на поверхности. Путем вычисления производных, показывающих изменение геометрии (или формы) для различных точек поверхности, можно точно рассчитать кривизну объекта в целом. Хотя наклон в каждой данной точке дает только локальную информацию, относящуюся к «окрестностям» указанной точки, значения, полученные для различных точек, можно объединить и вывести функцию, описывающую наклон объекта в любой точке. Затем при помощи *интегрирования* – грубо говоря, путем сложения и усреднения – можно получить функцию, описывающую объект как единое целое. Таким образом, мы получим представление о структуре всего объекта, что и является центральной идеей всей дифференциальной геометрии – возможность создать общую картину для всей поверхности или многообразия на основе локальной информации, полученной из производных, отражающих геометрию (или метрику) в каждой точке.

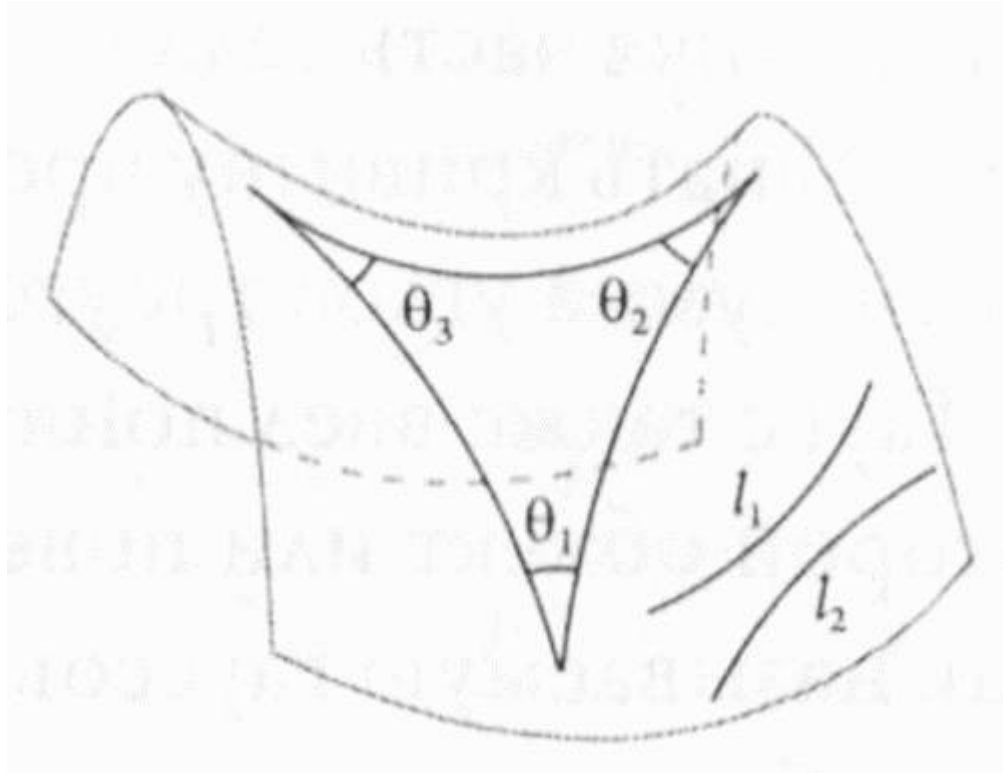
Помимо достижений в области дифференциальной геометрии, Гаусс внес существенный вклад и в другие области математики и физики. Пожалуй, наибольшее значение для нас имеет его поразительное предположение, что не только объекты, находящиеся в пространстве, но и пространство само по себе также может быть искривлено. Открытие Гаусса бросило вызов евклидовой концепции плоского пространства – представлению, относившемуся не только к интуитивно понятной двумерной плоскости, но и к трехмерному пространству, называя которое плоским подразумевают, что параллельные линии в таком пространстве не пересекаются, а сумма углов треугольника всегда составляет ровно 180° .



$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 > 180^\circ$ Положительная кривизна



$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 180^\circ$ Нулевая кривизна



$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 < 180^\circ$ Отрицательная кривизна

Рис. 2.3. На поверхности с положительной кривизной (такой, как сфера) сумма углов треугольника больше 180° , и линии, кажущиеся параллельными (такие, как меридианы) могут пересечься, например, на Северном и Южном полюсах. На плоской поверхности (поверхности с нулевой кривизной), которая является основой евклидовой геометрии, сумма углов треугольника равна 180° , и параллельные линии не пересекаются. На поверхности с отрицательной кривизной, например имеющей форму седла, сумма углов треугольника меньше 180° , а линии, кажущиеся параллельными, на самом деле расходятся

Эти принципы, являющиеся ключевыми для евклидовой геометрии, не выполняются в искривленных пространствах. Рассмотрим сферическое пространство, подобное поверхности глобуса. Если смотреть на глобус со стороны экватора, линии меридианов кажутся параллельными, поскольку все они перпендикулярны экватору. Но если вы проследуете по ним в одном из двух направлений, то увидите, что они в конце концов сходятся на Северном и Южном полюсах. Этого не произойдет в плоском евклидовом пространстве, таком как карта в проекции Меркатора, на которой две линии, перпендикулярные третьей, являются действительно параллельными и никогда не пересекаются.

В неевклидовом пространстве сумма углов треугольника может быть или больше, или меньше, чем 180° , в зависимости от того, как искривлено пространство. Если пространство, подобно сфере, имеет положительную кривизну, сумма углов треугольника всегда будет больше 180° . И напротив, если пространство имеет отрицательную кривизну, как внутренняя часть седла, сумма углов треугольника всегда будет меньше 180° . Узнать кривизну пространства можно, определив величину, на которую сумма углов треугольника больше или меньше 180° .

Гаусс также ввел понятие *внутренней геометрии* – идею, согласно которой объект или поверхность имеет свою собственную кривизну (так называемую гауссову кривизну), которая не зависит от того, как этот объект располагается в пространстве. Рассмотрим для примера лист бумаги. Можно ожидать, что его кривизна равна нулю, и так оно и есть. Теперь свернем этот лист бумаги в цилиндр. Двухмерная поверхность цилиндра, согласно Гауссу, имеет две главные кривизны, проходящие в направлениях, перпендикулярных друг другу: первая кривизна относится к окружности и имеет величину $1/r$, где r – это радиус основания

цилиндра. Если $r = 1$, то эта кривизна также равна единице. Вторая кривизна проходит вдоль образующей цилиндра, которая представляет собой прямую линию. Кривизна прямой линии, очевидно, равна нулю, поскольку прямая – она и есть прямая. Гауссова кривизна цилиндра, как любого другого двухмерного объекта, равна произведению одной кривизны на вторую, которое в нашем случае равно $1 \times 0 = 0$. Таким образом, в понятиях собственной кривизны цилиндр представляет собой то же самое, что и лист бумаги, из которого он свернут, – он совершенно плоский. Нулевая собственная кривизна цилиндра обусловлена тем, что цилиндр можно сделать из листа бумаги, не растягивая и не деформируя его. Иными словами, измерения расстояний между любыми двумя точками на поверхности листа – вне зависимости от того, разложен ли лист на столе или свернут в трубочку, – дадут одинаковые результаты. Это значит, что геометрия и, следовательно, собственная кривизна листа бумаги остаются неизменными вне зависимости от того, плоский этот лист или свернутый.

Аналогично, если бы удалось сделать из цилиндра тор, соединив его концы вместе – также без растяжений и деформаций, – то внутренняя кривизна полученного тора все равно осталась бы равной внутренней кривизне цилиндра, то есть нулю. На практике, однако, сделать так называемый *плоский тор* – по крайней мере в двух измерениях – невозможно по причинам, которые будут обсуждаться далее (в четвертой главе). Но теоретически подобный объект (называемый абстрактной поверхностью) изготовить можно, и он столь же важен для математики, как и те объекты, которые мы называем реальными.

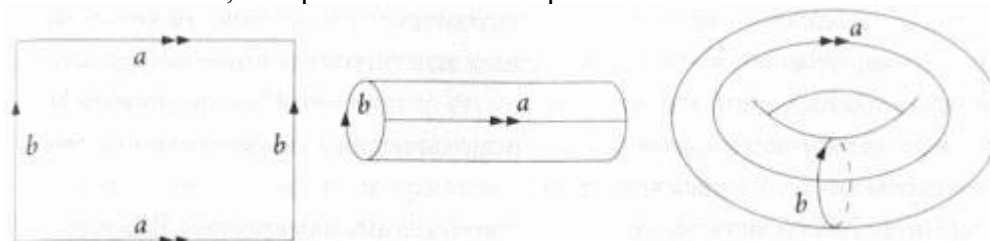


Рис. 2.4. Тороидальная (имеющая форму бублика) поверхность может быть совершенно «плоской» (имеющей нулевую гауссову кривизну), поскольку ее можно изготовить, сворачивая лист бумаги в трубку или цилиндр и затем соединя концы полученного цилиндра

С другой стороны, сфера довольно существенно отличается от цилиндра или плоского тора. Рассмотрим, к примеру, кривизну сферы радиуса r . В этом случае кривизна одинакова по всей поверхности сферы, и ее можно определить как $1/r^2$. Мы видим, что на поверхности сферы все направления эквивалентны, что явно неверно в случае цилиндра или бублика. Именно по этой причине не важно, как ориентирована сфера в трехмерном пространстве; маленький жучок, живущий на ее поверхности, скорее всего, не замечает пространственной ориентации сферы и все, что его беспокоит и дается ему в ощущениях, – это геометрия его локального двухмерного мира.

Наряду с Николаем Лобачевским и Яношем Бойяи Гаусс внес большой вклад в наше понимание абстрактного пространства, в частности для двухмерного случая, хотя он сам признавал наличие определенной путаницы в этой области. И все же, в конечном итоге, ни Гаусс, ни его коллеги не сумели полностью освободить наши представления о пространстве от евклидовых рамок. Гаусс выразил свое замешательство в письме, написанном им в 1817 году астроному Генриху Вильгельму Маттеусу Ольберсу: «Я все больше убеждаюсь, что необходимость нашей геометрии не может быть доказана, по крайней мере, человеческим рассудком и для человеческого рассудка. Может быть, в следующей жизни мы придем к взглядам на природу пространства, которые нам сейчас недоступны».¹⁷

Некоторые ответы были получены не в «следующей жизни», как написал Гаусс, а в следующем поколении благодаря усилиям и прекрасным способностям его студента Георга Фридриха Бернхарда Римана. Рيمان отличался слабым здоровьем и умер молодым, но за

¹⁷ Andre Nikolaevich Kolmogorov, *Mathematics of the 19th Century* (Birkhauser, 1998).

сорок лет своей жизни он смог перевернуть существовавшие представления о геометрии, а вместе с ними и представления о Вселенной. Риман ввел особую разновидность поля – набор чисел, соответствующий каждой точке пространства, пользуясь которым можно найти расстояние между двумя точками вдоль любой линии, которая их соединяет. Полученная информация, в свою очередь, может быть использована для определения степени искривленности пространства.

Проще всего мерить пространство в одном измерении. Все, что необходимо для измерения, например, прямой линии, – это линейка. Для двухмерного пространства, такого как пол большого танцевального зала, мы обычно берем две перпендикулярные линейки – одна из которых сопоставляется оси x , а вторая – оси y – и находим расстояние между двумя точками путем построения прямоугольного треугольника и применения теоремы Пифагора. В свою очередь, в трех измерениях нам необходимы три перпендикулярные линейки, соответствующие осям x , y и z .

В искривленных, неевклидовых пространствах все становится сложнее и интереснее, поскольку точно откалиброванные перпендикулярные линейки для измерения искривленного пространства уже не пригодны. Однако в этом случае для расчета расстояний мы можем использовать риманову геометрию. Подход, который мы применяем для расчета длины кривой, лежащей на искривленном многообразии, вам уже знаком: кривую представляют в виде ломаной, состоящей из касательных бесконечно малой длины, и затем берут интеграл вдоль всей линии, чтобы получить полную длину.

Сложность этого подхода обусловлена тем, что в искривленном пространстве длина каждого отрезка ломаной может изменяться при перемещении от одной точки многообразия к другой. Для того чтобы преодолеть эту трудность, Риман создал инструмент, известный как *метрический тензор*, дающий алгоритм для расчета длины отрезка касательной в каждой точке. В двух измерениях метрический тензор представляет собой матрицу 2×2 , в n измерениях – матрицу $n \times n$. Следует отметить, что этот новый подход к измерению, несмотря на всю важность нововведений Римана, по-прежнему основан на теореме Пифагора, только переформулированной для неевклидового пространства.

Пространство, наделенное римановой метрикой, носит название *риманова многообразия*. Вооружившись метрикой, мы можем измерить длину любой кривой, принадлежащей многообразию произвольной размерности. Впрочем, мы не ограничены возможностью измерения длин кривых – таким же способом мы можем измерять и площади поверхностей в подобных пространствах, причем понятие «поверхность» в этом случае не ограничено привычными нам двумя измерениями.

Изобретя понятие метрики, Риман показал, что пространству, имевшему до этого весьма неясное определение, можно строго приписать определенную геометрию, кривизну же лучше представлять не в виде расплывчатого понятия, а в виде точных чисел, соответствующих различным точкам пространства. И этот подход, как показал Риман, применим к пространствам любой размерности.

До Римана искривленный объект мог быть изучен только «снаружи», подобно тому, как издали проводят геодезическую съемку горного хребта или смотрят на Землю с борта космического корабля. Вблизи же все кажется плоским. Риман указал способ установить, что мы живем в искривленном пространстве, даже не имея под рукой ничего, с чем его можно сравнить.¹⁸ Это открытие поставило перед физиками и астрономами важнейший вопрос: если Риман прав и пространство, в котором мы живем, действительно искривлено, не означает ли это необходимости нового пересмотра наших представлений практически обо всем? Но значит ли это, что в больших масштабах Вселенная не ограничена рамками евклидовой геометрии, а пространство способно сдвигаться, искривляться и вообще – делать что угодно? Именно по этой причине астрономы и космологи проводят в настоящее время тщательные измерения в надежде установить, искривлено наше пространство или нет. Благодаря Риману теперь известно, что для проведения этих измерений совсем не нужно покидать нашу

18 Deane Yang (Polytechnic Institute of New York University), e-mail letter to author, April 20, 2009.

Вселенную (что было бы весьма затруднительно сделать). Напротив, узнать, искривлена ли наша Вселенная, можно, буквально не сходя с того места, на котором сидим, – что весьма комфортно как для космологов, так и для обывателей.

Таковыми были некоторые из новых витающих в воздухе идей в области геометрии в то время, когда Эйнштейн приступил к упорядочению своих размышлений относительно гравитации. В начале XX столетия Эйнштейн на протяжении почти десяти лет пытался объединить специальную теорию относительности с законами гравитации Ньютона. Он подозревал, что ответ может лежать где-то в области геометрии, и обратился за помощью к своему другу, геометру Марселю Гроссману. Гроссман, ранее помогавший Эйнштейну закончить университетскую курсовую работу, которую сам Эйнштейн находил скучной, познакомил своего друга с римановой геометрией, которая была неизвестна физике того времени, – хотя и сделал это с предостережением, назвав риманову геометрию «ужасной смесью, с которой физикам лучше не связываться».¹⁹

Риманова геометрия стала ключом к решению головоломки, над которой Эйнштейн бился много лет. Как уже говорилось в предыдущей главе, Эйнштейн отстаивал идею искривленного четырехмерного пространства-времени (иначе известного как наша Вселенная), не являющегося частью большего пространства. К счастью для него, Риман уже создал каркас теории, определив пространство нужным образом. По словам Брайана Грина: «Гениальность Эйнштейна состояла в способности распознать, что этот математический аппарат идеально подходит для реализации его идей относительно гравитации. Он четко показал, что математические понятия римановой геометрии прекрасно подходят для физического описания гравитации».²⁰

Эйнштейн не только догадался, что пространственно-временной континуум можно описать при помощи римановой геометрии, но показал, что геометрия пространства-времени неразрывно связана с его физическими характеристиками. Тогда как специальная теория относительности уже объединила пространство и время путем введения понятия единого пространства-времени, последовавшая за ней общая теория относительности объединила пространство и время с материей и гравитацией. Это стало настоящим прорывом в научных представлениях. Ньютоновская физика рассматривала пространство как пассивную сцену, а не как активного участника происходящих на ней событий. Прорыв был тем более впечатляющим, что в то время еще не существовало никаких экспериментальных предпосылок для этой теории. Эта теория в буквальном смысле слова возникла в голове одного человека (что, конечно, не означает, что она могла возникнуть в любой голове).

Физик Ч. Янг назвал формулировку Эйнштейном общей теории относительности актом «чистого творения», который был «уникальным в человеческой истории... Эйнштейн не пытался воспользоваться благоприятным случаем, который ему подвернулся. Он сам создал этот случай. И он сумел реализовать свою идею, благодаря глубокой проницательности и грандиозности замысла».²¹

Общая теория относительности стала поразительным достижением, которое удивило, возможно, даже самого Эйнштейна, не подозревавшего, что основы физики и математики могут быть столь тесно переплетены друг с другом. Много лет спустя он сделает вывод, что «в основе принципов творения лежит математика. Поэтому я считаю в определенном смысле истинным, что чистая мысль может ухватить реальность, как мечтали древние».²² Теория гравитации Эйнштейна была создана при помощи именно такого процесса чистого мышления – исключительно из математических предпосылок, без каких-либо подсказок из внешнего мира.

Используя метрический тензор Римана, Эйнштейн получил форму и другие

¹⁹ Mlodinow, *Euclid's Window*, p. 205.

²⁰ Brian Greene, *The Elegant Universe* (New York: Vintage Books, 2000), p. 231.

²¹ C. N. Yang. "Albert Einstein: Opportunity and Perception," speech, 22nd International Conference on the History of Science, Beijing, China, 2005.

²² Chen Ning Yang, "Einstein's Impact on Theoretical Physics in the 21st Century," *AAPPS Bulletin* 15 (February 2005).

характеристики (иными словами, геометрию) по-новому осознанного им пространственно-временного континуума. Синтез геометрии и физики, завершившийся созданием знаменитых эйнштейновских уравнений поля, продемонстрировал, что гравитацию – силу, формирующую наш мир в космических масштабах, – можно рассматривать как иллюзию, вызываемую искривлением пространства-времени. В новой теории Эйнштейна метрический тензор римановой геометрии описывает не только кривизну пространственно-временного континуума, но и гравитационное поле. Массивное тело, подобное Солнцу, деформирует ткань пространства-времени точно так же, как под толстяком прогибается сетка батута. И подобно тому, как маленький шарик, брошенный на батут, будет двигаться по спирали вокруг тяжелого человека и, в конце концов, скатится ему под ноги, геометрия деформированного пространства-времени заставляет Землю двигаться по орбите вокруг Солнца. Иными словами, гравитация – это геометрия. Физик Джон Уилер однажды пояснил нарисованную Эйнштейном картину гравитации следующим образом: «Материя говорит пространству, как ему искривляться; пространство говорит материи, как ей двигаться».²³

Вот еще один пример, помогающий понять эту точку зрения: представим себе, что два человека начинают движение с одной и той же скоростью из разных точек на экваторе и движутся в направлении Северного полюса вдоль меридианов. С течением времени они становятся все ближе друг к другу. Возможно, они полагают, что находятся под действием некой невидимой силы, постепенно сближающей их. Но с другой стороны, предполагаемая сила – на самом деле всего лишь иллюзия, вызванная геометрией Земли, и в действительности никакой силы не существует; вот в двух словах суть идеи о тождественности гравитации и геометрии.

Наглядность приведенного примера произвела на меня огромное впечатление, когда я учился на первом курсе магистратуры и впервые услышал об общей теории относительности. Ни для кого не секрет, что гравитация определяет форму нашей Вселенной и является, по сути, ее главным архитектором в космических масштабах. В области же малых масштабов, изучению которой посвящена большая часть современной физики, гравитация пренебрежительно слаба по сравнению с другими взаимодействиями: электромагнитным, сильным и слабым. Но в общей схеме мироздания гравитация охватывает почти все сущее: именно она ответственна за создание структуры Вселенной, начиная от отдельных звезд и галактик вплоть до огромнейших сверхскоплений протяженностью в миллиарды световых лет. И если Эйнштейн был прав и гравитация сводится к геометрии, то геометрия также представляет собой силу, с которой необходимо считаться.

Я сидел в аудитории, пытаюсь сделать выводы из услышанного, и тут меня захлестнул поток мыслей. Я интересовался кривизной начиная с колледжа и чувствовал, как в свете открытий Эйнштейна кривизна может играть ключевую роль для понимания Вселенной и что именно в эту область исследований я могу однажды внести свой собственный вклад. Дифференциальная геометрия предоставляет средства для описания движения массы в искривленном пространстве-времени, не вскрывая при этом причины этого искривления. Эйнштейн, в свою очередь, при помощи тех же средств попытался объяснить, откуда берется искривление. Форма пространства как результат действия гравитации и форма пространства как следствие его кривизны, рассматривавшиеся ранее как две разные задачи, слились в единую проблему.

Затем я задался следующим вопросом: поскольку известно, что причиной возникновения гравитации является масса, задающая кривизну пространства, что можно сказать о форме пространства, называемого *вакуумом*, в котором какое-либо вещество полностью отсутствует? Что определяет кривизну пространства в этом случае? Говоря иными словами, имеют ли эйнштейновские уравнения гравитационного поля какое-либо еще решение в вакууме, кроме плоского, которое нас менее всего интересует: с пространственно-временным континуумом, в котором нет ни материи, ни гравитации, ни

23 Greene, *The Elegant Universe*, p. 72.

взаимодействий и совершенно ничего не происходит? Существует ли такое «нетривиальное» пространство, в котором отсутствует материя, но существует кривизна и силы гравитации?

Тогда я был еще не в состоянии ответить на эти вопросы. Не знал я и того, что ученый по имени Эудженио Калаби рассмотрел частный случай этой же проблемы более чем за пятнадцать лет до того, впрочем, исходя из чисто математических предпосылок и не касаясь ни гравитации, ни идей Эйнштейна. Единственное, что я тогда мог сделать, – это удивиться и задать вопрос: «А что, если бы?»



Рис. 2.5. Геометр Ч. Ш. Черн (фотография Джорджа М. Бергмана)

Это был весьма неожиданный для меня вопрос по многим причинам – особенно если учесть, с чего я начинал свой жизненный путь: следуя по пути, который должен был привести меня к торговле домашней птицей, в конце концов я пришел к геометрии, общей теории относительности и теории струн.

Я родился в 1949 году в континентальном Китае, через год после моего рождения семья переехала в Гонконг. Отец был университетским профессором, имеющим весьма скромное жалование и жену с восемью детьми, которых нужно было как-то прокормить. Несмотря на то что ему приходилось преподавать сразу в трех университетах, его заработок был столь скуден, что нам едва хватало на еду. Мы росли в бедности, без электричества и водопроводной воды; ванной нам служила ближайшая река. Однако наше богатство состояло в другом. Будучи философом, отец побуждал меня воспринимать мир с более отвлеченной точки зрения. Помню, как маленьким ребенком, подслушивая беседы, которые он вел со студентами и коллегами, я чувствовал волнение, хотя не понимал точного значения многих слов.

Отец всегда поощрял мои занятия математикой, хотя их и нельзя было назвать многообещающими. В возрасте пяти лет я сдавал вступительный экзамен в престижную городскую школу, но провалился именно на математике, поскольку вместо числа 75 я написал 57, а вместо числа 96 – 69 – ошибка, которую, как я сейчас полагаю, проще допустить в китайском, чем в английском. В результате мне пришлось учиться в посредственной сельской школе вместе с кучей хулиганистых ребяташек, которых едва ли заботило их образование. Чтобы выжить, мне тоже приходилось быть хулиганистым, настолько хулиганистым, что подростком я на время оставил школу и возглавил шайку юнцов, которые, так же как и я,

привыкли слоняться по улицам в поисках неприятностей, и чаще всего их находили. Трагическое событие все изменило в моей жизни. Когда мне было четырнадцать, неожиданно умер отец, оставив нашу семью не только убитой горем, но и без средств к существованию, с кучей долгов и отсутствием какого-либо дохода. Поскольку теперь мне приходилось зарабатывать деньги для поддержания семьи, дядя посоветовал мне бросить школу и заняться разведением уток. Но у меня была другая идея: я решил преподавать математику другим ученикам. Учитывая наши финансовые обстоятельства, я понимал, что у меня есть только один шанс на успех, и сделал ставку на математику – все или ничего. Если бы я не справился с этим, моя судьба была бы предрешена, и второго шанса (кроме разведения домашней птицы) у меня не было. В подобных ситуациях, как мне кажется, люди стараются трудиться с удвоенным упорством. И хотя у меня, возможно, есть свои недостатки, никто и никогда не мог обвинить меня в лени.

Я не был лучшим учеником в средней школе, но старался наверстать упущенное в колледже. В первый же год я зарекомендовал себя как весьма неплохой студент, хотя и не добился каких-либо исключительных успехов. Все стало гораздо лучше во второй год, когда в наш Китайский университет Гонконга пришел преподавать юный геометр из Беркли, Стивен Салафф. Благодаря Салаффу я впервые почувствовал вкус настоящей математики. Мы вместе читали курс по обыкновенным дифференциальным уравнениям и позже совместно написали книгу по этому предмету. Салафф представил меня Дональду Сарасону, выдающемуся математику из Беркли, который проложил для меня дорогу поступления в аспирантуру после окончания всего трех курсов бакалавриата. Никакие проблемы, с которыми мне приходилось сталкиваться в математике, не могут сравниться с теми бюрократическими преградами, которые нам пришлось преодолеть при помощи Ч. Ш. Черна, великого китайского геометра, также работающего в Беркли, – чтобы добиться разрешения на мое досрочное поступление.

Попав в Калифорнию в двадцать лет и видя все многообразие математических дисциплин, открывающееся передо мной, я плохо представлял, в каком направлении мне двигаться. Сначала я склонился к операторной алгебре, одной из наиболее абстрактных областей математики, поскольку у меня было смутное чувство, что качество теории определяется степенью ее абстрактности.

Хотя в Беркли процветало множество математических дисциплин, в то время он был прежде всего одним из мировых центров – если не единственным мировым центром – развития геометрии, и присутствие в нем многих блестящих ученых, таких как Черн, начало оказывать на меня неумолимое влияние. Все это вместе с растущим пониманием того, что геометрия представляет собой огромную и богатую область, изобилующую многими возможностями, постепенно привело меня в их сообщество.

При этом я продолжал изучать столько разных предметов, сколько мог, посещая сразу шесть учебных курсов, изучая попутно материалы из области геометрии, топологии, дифференциальных уравнений, групп Ли, комбинаторики, теории чисел и теории вероятностей. Эти занятия удерживали меня в аудитории с 8:00 до 17:00 ежедневно, едва оставляя время на обед. Оставшееся время я проводил в математической библиотеке, ставшей для меня вторым домом. Я читал почти каждую книгу, которая попадала мне в руки. Поскольку в более молодом возрасте я не мог позволить себе покупать книги, то теперь, прохаживаясь между стеллажами, я ощущал себя ребенком, попавшим в магазин сладостей. По окончании обязательных занятий я часто оставался в библиотеке вплоть до момента закрытия, заработав себе репутацию человека, постоянно уходящего из читального зала последним. Конфуций как-то сказал: «Однажды я провел в размышлениях целый день без еды и целую ночь без сна, но я ничего не добился. Было бы лучше посвятить то время учению». И хотя тогда мне эта цитата еще не была знакома, я, тем не менее, полностью следовал именно этому образу мыслей.

Так почему же из всех областей математики именно геометрия заняла центральное место в моих мыслях и мечтах? Прежде всего потому, что она произвела на меня впечатление

математической дисциплины, находящейся ближе всего к природе и, следовательно, ближе всего к ответам на те вопросы, которые заботили меня более всего.

Кроме того, я нахожу полезным, сталкиваясь со сложными понятиями, представлять себе их наглядные изображения, что весьма редко удается сделать во многих трудных для понимания областях алгебры и теории чисел. Плюс ко всему, геометрией в Беркли занималась совершенно потрясающая группа людей, в числе которых были профессора Черн и Чарльз Морри и некоторые из более молодых представителей факультета, такие как Блейн Лоусон, а также аспиранты, такие как будущий обладатель медали Филдса Уильям Тёрстон, зародившие во мне желание приобщиться к их азарту и надежду стать одним из них.

Наконец, существовало и гораздо большее сообщество людей, не только из других университетских кампусов, но и со всего мира, и – как мы уже успели убедиться в этой главе, живших на протяжении всей человеческой истории, – которые прокладывали путь в ту плодородную область, в которую мне посчастливилось войти. Это что-то сродни ньютоновской сентенции о том, что ему посчастливилось «стоять на плечах гигантов», хотя Ньютон и сам по себе был одним из таких гигантов, на плечах которого мы сейчас стоим.

Примерно в то же время, когда я впервые начал размышлять об общей теории относительности Эйнштейна и кривизне абсолютно пустого пространства, мой руководитель Черн вернулся из поездки на восточное побережье весьма взбудораженным, поскольку он только что услышал от известного принстонского математика Андре Вейля о том, что так называемая гипотеза Римана, проблема, сформулированная еще столетие назад, возможно, скоро будет решена. Эта гипотеза относится к вопросу о распределении простых чисел, которое, как казалось до этого, не подчиняется никакому закону. Однако Риман предположил, что на самом деле частота появления простых чисел описывается сложной функцией, так называемой дзета-функцией Римана. В частности, он высказал предположение, что частота появлений простых чисел соответствует расположению нулей соответствующей дзета-функции. Утверждение Римана подтверждено для более чем миллиарда нулей дзета-функции, но строгого доказательства до сих пор так и не было получено.

Впрочем, несмотря на то, что эта проблема является одной из важнейших в математике – и если бы мне посчастливилось ее решить, это не только принесло бы мне бесчисленные предложения работы, но и прославило бы мое имя на всю оставшуюся жизнь, – я совсем не испытывал особого энтузиазма от предложения Черна. Гипотеза Римана не волновала меня, а для того чтобы решить столь грандиозную задачу, поставившую в тупик так много талантливых ученых и требующую многих лет на ее завершение, необходимо по крайней мере быть ею взволнованным. Отсутствие у меня страсти к решению проблемы, естественно, заметно уменьшало мои шансы на ее решение, поэтому если бы я работал над доказательством гипотезы Римана, то вполне возможно, что и спустя много лет мне нечего было бы сказать по этому вопросу. Помимо этого, мне слишком нравятся наглядные изображения. Мне нравятся математические структуры, на которые можно каким-либо образом взглянуть, именно за это я и люблю геометрию. Да и вдобавок мне уже были известны некоторые области геометрии, в которых я мог достигнуть определенных результатов – хотя, возможно, и не столь впечатляющих.

Это чем-то похоже на рыбалку. Если тебе достаточно и маленькой рыбки, ты получишь удовольствие, если поймаешь хоть что-то. А вот если ты собираешься поймать самую большую из рыб, которую когда-либо ловили, – эдакое мифическое создание, существующее только в легендах, – то, скорее всего, придешь домой с пустыми руками. Уже прошло тридцать пять лет, а гипотеза Римана по-прежнему остается недоказанной. Как говорят математики: то, что доказано на 90 процентов, – на самом деле не доказано.

Так я рассуждал, отвергая предложение Черна. Но на самом деле все было гораздо серьезнее. В то время, как я уже говорил, я был полностью поглощен общей теорией относительности, пытаюсь понять, какие из особенностей нашей Вселенной возникают вследствие взаимодействия гравитации, искривления пространства и геометрии. Я не знал, когда мои мысли повернулись в этом направлении, однако я предчувствовал, что нахожусь в

начале великого похода, собирая воедино все силы геометрии, чтобы двинуться в сторону истины.

Будучи ребенком, появившимся на свет в более чем стесненных обстоятельствах, я никогда не имел возможности увидеть большую часть мира. Моя страсть к геометрии родилась у меня еще в раннем возрасте из желания нанести на карту страну, столь большую, как Китай, и путешествовать по морю, не имеющему конца. Мне посчастливилось совершить куда более дальнее путешествие – эту возможность мне предоставила геометрия. Только теперь вместо одной страны передо мной была вся Земля, а вместо моря – Вселенная. Ну а маленькую соломенную сумку, которую я собирался всюду возить за собой, заменил небольшой портфель с линейкой, циркулем и транспортиром.

Третья глава

Новая разновидность молотка

Геометрия, несмотря на весьма насыщенную историю и впечатляющие достижения, которыми она может похвастаться на сегодняшний день, не является завершенным произведением, она по-прежнему развивается, постоянно открывая заново саму себя. Одним из последних нововведений в геометрии, внесшим определенный вклад в теорию струн, стало создание *геометрического анализа* – подхода, который ярко проявил себя только в последние десятилетия. Основной идеей этого подхода является использование мощных методов математического анализа (частью которого является дифференциальное исчисление) для интерпретации геометрических понятий и, напротив, использование геометрической интуиции для интерпретации понятий анализа. Едва ли это новшество станет последним в геометрии – как не стали последними в истории геометрии те нововведения, о которых мы уже говорили. Тем не менее геометрический анализ уже достиг весьма значительных успехов.

К работе в этой области я приступил в 1969 году, учась на первом курсе аспирантуры в Беркли. Для меня лично все началось с необходимости найти книгу для чтения во время рождественских каникул. Не проявив интереса к четырем наиболее продаваемым книгам того года – «Случай портного», «Крестный отец», «Машина любви» и «Штамм “Андромеда”», я остановился на книге, название которой было куда менее популярным – «Теория Морса» американского математика Джона Милнора. Меня особенно заинтересовала глава этой книги, посвященная топологии и кривизне, в которой разбиралось утверждение, что локальная кривизна заметно влияет на геометрию и топологию. С тех пор я постоянно возвращаюсь к этому утверждению, поскольку локальная кривизна поверхности определяется путем взятия производных по этой поверхности. Иными словами, определение кривизны требует использования методов анализа. Исследование влияния кривизны на геометрию, таким образом, составляет самую сущность геометрического анализа.

Не имея рабочего кабинета, в те дни я практически жил в математической библиотеке Беркли. Ходят слухи, будто первой моей целью по прибытию в Соединенные Штаты стало посещение этой библиотеки, а не, скажем, осмотр достопримечательностей Сан-Франциско, на чем, возможно, остановили бы свой выбор другие. И хотя я и не могу вспомнить точно, чем я занимался сорок лет назад, у меня нет оснований сомневаться в достоверности этих слухов. Я имел привычку постоянно прохаживаться по библиотеке, читая каждый журнал, который попадал мне в руки. Однажды, во время упомянутых рождественских каникул, просматривая каталог, я наткнулся на статью Милнора 1968 года, книгу которого я как раз читал в то время. В этой статье, в свою очередь, упоминалась теорема Александре Прайсмана, которая привлекла мое внимание. И поскольку у меня не было каких-либо других занятий (в то время большинство моих коллег разъехались на каникулы), я решил посмотреть, не смогу ли я доказать что-либо, относящееся к теореме Прайсмана.

В своей теореме Прайсман рассмотрел две нетривиальные петли, A и B , на заданной поверхности. Петлей в топологии называется кривая, начинающаяся в определенной точке поверхности и неким образом охватывающая эту поверхность, возвращаясь в конце концов в ту же точку. *Нетривиальная* означает в данном контексте, что эту петлю нельзя стянуть в точку, не отрывая ее от поверхности. Иными словами, существует некая преграда, не дающая петле стянуться в точку: так, например, петлю, продетую через дырку бублика, можно стянуть в точку, только разрезав этот бублик (после этого петля уже не будет находиться на поверхности, а бублик, с точки зрения топологии, перестанет быть бубликом). Если проследовать вдоль петли A , а затем вдоль петли B , то результирующий путь будет представлять собой новую петлю $B \times A$. Напротив, если сначала обойти вокруг петли B , а потом вокруг петли A , возникнет петля $A \times B$. Прайсман доказал, что в пространстве, кривизна которого всюду отрицательна – подобно внутренней поверхности седла, – петли $B \times A$ и $A \times B$ можно непрерывно преобразовать одну в другую путем изгиба, растяжения и сжатия только в одном особом случае: а именно, если петлю, кратную петле A (такую петлю можно получить, обойдя вокруг петли A один или целое число раз), можно плавно преобразовать в петлю, кратную петле B . В этом частном случае петли A и B носят название *коммутирующих*, точно так же, коммутирующими являются операции сложения и умножения ($2 + 3 = 3 + 2$ и $2 \times 3 = 3 \times 2$), тогда как вычитание и деление некоммумутативны ($2 - 3 \neq 3 - 2$ и $2/3 \neq 3/2$).

Моя теорема имела несколько более общую форму, чем теорема Прайсмана. Данная теорема была применима к любому пространству неположительной кривизны (то есть либо отрицательной, либо – в отдельных местах – равной нулю). Для доказательства более общего случая мне пришлось прибегнуть к разделу математики, который никогда до этого не использовался в топологии или дифференциальной геометрии, – к теории групп. *Группой* в математике называется набор элементов, для которых выполняется определенный набор правил, таких как обязательное присутствие в группе нейтрального (например, единицы) и обратного (например, $1/x$ для каждого x) элементов. Группа является *замкнутой*, то есть, проведя определенную операцию над двумя элементами группы (такую, как сложение или умножение), мы получим еще один ее элемент. Помимо этого, в группе должен выполняться ассоциативный закон – а именно $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.

Элементами той группы, которую рассматривал я (так называемой фундаментальной группы), были петли, которые можно изобразить на поверхности, такие как упоминавшиеся уже петли A и B . В том случае, если в пространстве есть нетривиальные петли, говорят, что пространство имеет нетривиальную фундаментальную группу. И напротив, если каждую петлю в пространстве можно стянуть в точку, то соответствующая фундаментальная группа будет тривиальной. Я доказал, что в том случае, если две петли коммутируют (то есть $A \times B = B \times A$), должна существовать «подповерхность» более низкой размерности – а именно имеющая форму тора, – находящаяся где-то внутри данной поверхности.

В двумерном случае тор можно представить как «произведение» двух окружностей. Рассмотрим сначала одну окружность – она будет проходить вокруг дырки бублика, и представим, что все ее точки являются центрами одинаковых окружностей. Соединив вместе эти окружности, мы и получим тор. Мы как бы нанизываем колечки на нитку и связываем концы нитки вместе. Именно это и подразумевалось под утверждением, что тор – это произведение двух окружностей. В моей теореме (основанной, в свою очередь, на статье Прайсмана) в роли таких окружностей выступали петли A и B .

Конечно, наши с Прайсманом рассуждения носили скорее формальный характер и могут показаться вам малопонятными. Принципиально важным здесь является то, что наши доказательства показали, как глобальная топология поверхности влияет не только на ее локальную геометрию, но и на ее геометрию в целом. Петли в этом случае определяют фундаментальную группу, что является скорее глобальной, чем локальной особенностью пространства. Чтобы показать, что одну петлю можно непрерывно преобразовать в другую, необходимо рассмотреть поверхность в целом, обращаясь к глобальным свойствам данного

пространства. По сути дела, вопрос о том, какие глобальные геометрические структуры соответствуют заданной топологии, является одним из основных вопросов современной геометрии. Так, если геометрическая поверхность топологически эквивалентна сфере, то ее кривизна всегда неотрицательна. Математики имеют на руках весьма длинный список подобных утверждений.

Поскольку мое доказательство показалось мне убедительным, по окончании зимних каникул я показал его одному из своих наставников, молодому преподавателю университета Блейну Лоусону. Лоусон согласился с ним и, используя некоторые идеи из той же статьи, мы совместными усилиями попытались доказать еще одну теорему, затрагивающую вопрос связи кривизны и топологии. Несомненно, я был доволен тем, что мне удалось внести определенный вклад в корпус математических знаний, хотя и не полагал, что сделал нечто особо примечательное. Я все еще искал тот путь, на котором мог бы оставить свой след.

Мне неожиданно пришло в голову, что ответ на вопрос, который меня интересовал, я смогу найти в курсе лекций по нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных, который я слушал в то время. Преподаватель, читавший нам эти лекции, профессор Чарльз Морри, производил на меня огромное впечатление. Его курс по предмету, который не пользовался большой популярностью, требовал огромных усилий для понимания, будучи основан на чрезвычайно тяжелой для чтения книге самого Морри. Вскоре после начала занятий на его лекциях не осталось других студентов, кроме меня, что во многом было обусловлено начавшимися в то время студенческими демонстрациями против бомбардировок Камбоджи. Впрочем, Морри не прекращал своих лекций, уделяя, по-видимому, достаточно большое внимание их подготовке несмотря на то, что посещал их теперь всего один студент.



Рис. 3.1. Геометр Чарльз Морри (фотография Джорджа М. Бергмана)

Морри был специалистом в области дифференциальных уравнений в частных производных, и методы их решения, разработанные им, отличались большой глубиной. Отдавая ему должное, могу сказать, что именно лекции Морри стали основой всей моей дальнейшей научной карьеры.

Дифференциальные уравнения используются везде, где встречаются бесконечно малые

изменения переменных, в том числе и в физических законах. Одним из наиболее важных и сложных классов этих уравнений являются так называемые дифференциальные уравнения в частных производных, описывающие изменение некоей функции при изменении сразу нескольких переменных. При помощи дифференциальных уравнений в частных производных можно предсказать поведение данной, функции не только, например, во времени, но и при изменении других переменных, например при перемещении в пространстве вдоль осей x , y или z . Подобные уравнения дают возможность заглянуть в будущее и увидеть возможную эволюцию системы; без них физика была бы лишена своей предсказательной силы.

Геометрия тоже не может обойтись без дифференциальных уравнений. Мы используем их, чтобы определить кривизну объекта и вычислить ее изменение при переходе от точки к точке. Именно это делает геометрию необходимой для физических приложений. Приведем простой пример: ответ на вопрос, будет ли катящийся мяч двигаться с ускорением, то есть будет ли его скорость изменяться во времени, напрямую зависит от кривизны траектории мяча. Это только один пример тесной связи кривизны с физическими понятиями. По этой причине и геометрия – «наука о пространстве», включающая в себя все, что связано с кривизной, – играет важную роль во многих областях физики.

Фундаментальные законы физики являются *локальными* в том смысле, что они всегда описывают поведение той или иной физической величины не во всем пространстве, а в отдельных, *локальных*, областях. Это справедливо даже для общей теории относительности, стремящейся описать кривизну всего пространственно-временного континуума в целом. В конце концов, и производные, фигурирующие в дифференциальных уравнениях, тоже берутся именно в отдельных точках. Все это создает проблему для физиков. Как сказал математик UCLA Роберт Грин: «Итак, исходя из локальной информации, такой как кривизна, необходимо узнать строение объекта как целого. Вопрос состоит в том, как это сделать»²⁴.

Рассмотрим для начала кривизну поверхности Земли. Поскольку провести измерения всего земного шара сразу крайне сложно, Грин предложил рассмотреть вместо этого следующую картину. Представим себе собаку, сидящую на прикрепленной к столбу цепи во дворе. Если у собаки есть возможность перемещаться хотя бы в небольших пределах, она сможет узнать, какую кривизну имеет тот участок земли, который ограничен длиной цепи. В данном случае предполагается, что эта кривизна положительна. Представим теперь, что в каждом дворе мира живет подобная собака, привязанная к столбу, и каждый из участков земли вокруг этих столбов имеет положительную кривизну. Сведя воедино все эти данные о локальной кривизне, можно сделать вывод, что топологически данная планета должна иметь сферическую форму.

24 Robert Greene (UCLA), interview with author, March 13, 2008.

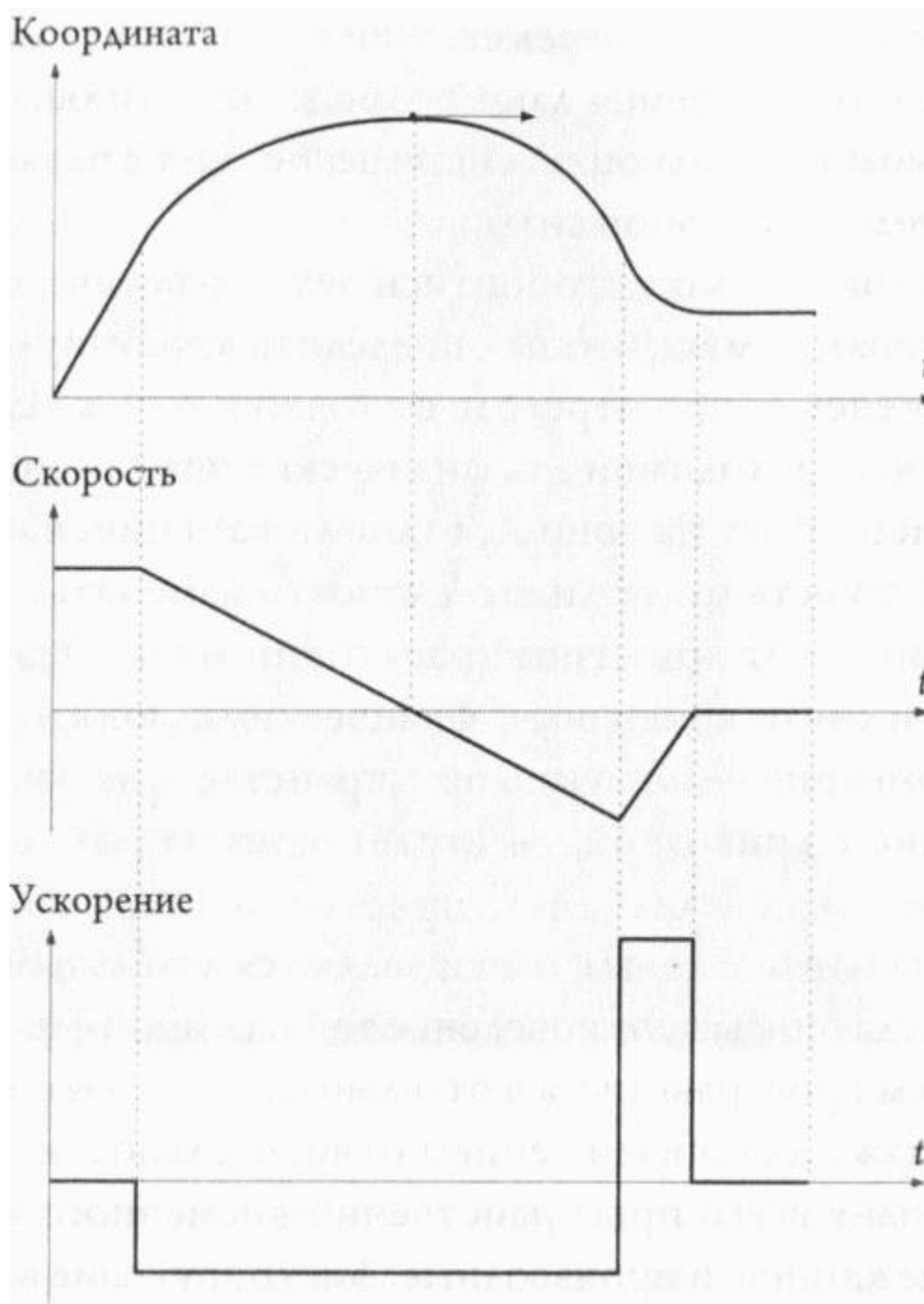


Рис. 3.2. Графики, иллюстрирующие движение объекта вдоль определенной траектории. Скорость – величина, показывающая, насколько быстро положение объекта изменяется с течением времени, может быть получена путем взятия производной по кривой перемещения. Производная определяется наклоном кривой в данной точке и численно равна скорости в соответствующий момент времени. Ускорение, величина которого показывает, как изменяется скорость с течением времени, можно, в свою очередь, получить, взяв производную по кривой зависимости скорости от времени. Значение ускорения в определенный момент времени определяется наклоном кривой в соответствующей точке

Конечно, существуют и более строгие методы определения кривизны участка поверхности, не основанные на субъективных ощущениях привязанной на нем собаки. К примеру, если цепь имеет длину r и собака движется вокруг столба так, что ее цепь все время натянута, то в случае плоского пространства (плоской Земли) длина описываемой собакой окружности будет равна точно $2\pi r$. На поверхности сферы, обладающей

положительной кривизной, длина окружности будет несколько меньше, чем $2\pi r$, из-за того что сферическая поверхность как бы «наклоняется вниз» при движении в любом из возможных направлений; в том же случае, когда столб находится на горном перевале или в седловой точке, обладающей отрицательной кривизной, имеющей наклон вниз в одних направлениях и наклон вверх в других, длина окружности будет несколько больше, чем $2\pi r$. Таким образом, наша задача сводится к тому, чтобы определить кривизну каждого конкретного участка, измерив расстояния, проходимые по кругу каждой из собак, – и затем свести эти результаты воедино.

Именно этим и занимается дифференциальная геометрия. Кривизна в дифференциальной геометрии определяется локально, то есть в отдельных точках, однако полученная таким образом информация применяется для того, чтобы сделать выводы о пространстве в целом. «Кривизна управляет топологией» – наш основной девиз. А нашим основным инструментом являются дифференциальные уравнения.

Геометрический анализ – сравнительно новая область математики, к обсуждению которой мы сейчас приступим, – развивает эту идею дальше. Следует отметить, что общий подход, предусматривающий использование дифференциальных уравнений в геометрии, развивался в течение нескольких столетий, зародившись практически одновременно с дифференциальным исчислением. Одним из первых исследователей в этой области стал великий швейцарский математик XVIII столетия Леонард Эйлер. Помимо всего прочего, он первым применил дифференциальные уравнения в частных производных для систематического исследования трехмерных поверхностей. Через два с лишним столетия после Эйлера мы продолжаем идти по его стопам. По сути, Эйлер был одним из первых, кто обратил внимание на нелинейные уравнения, лежащие сегодня в основе геометрического анализа.

Нелинейные уравнения, как правило, весьма сложны для решения, отчасти потому, что описываемые ими модели носят более запутанный характер. Так, нелинейные системы по своей природе менее предсказуемы, чем линейные, – хорошим примером здесь может служить погода – даже небольшие изменения в начальных условиях могут привести к совершенно другим результатам. Возможно, наиболее известной формулировкой того же утверждения является так называемый эффект бабочки в теории хаоса, парадоксальным образом предсказывающий возможность того, что взмах крыла бабочки в одной части мира может стать причиной возникновения торнадо в другой.

Линейные системы, напротив, содержат в себе гораздо меньше подводных камней и, следовательно, гораздо более просты для понимания.

Линейные зависимости – это зависимости типа $y = 2x$, названные так, поскольку их графиками являются прямые линии. Каждому значению аргумента здесь соответствует единственное значение функции. Двоение x автоматически приведет к удвоению y и наоборот. Изменение одной переменной всегда пропорционально изменению другой; невозможно получить огромный скачок в значении одной из переменных, лишь слегка изменив другую. Если бы законы природы описывались исключительно линейными зависимостями, наш мир был бы намного проще для понимания – хотя и значительно менее интересным. Но это не так – и именно поэтому приходится иметь дело с нелинейными уравнениями.

Впрочем, существуют некоторые методы, упрощающие работу с нелинейными уравнениями. К примеру, сталкиваясь с нелинейной задачей, можно прибегнуть к соответствующему линейному приближению и использовать его до тех пор, пока оно не перестанет быть применимым. Так, проанализировать волнистую (нелинейную) кривую можно путем нахождения производных соответствующей функции, что дает возможность представить кривую в виде совокупности касательных или, другими словами, *линейных элементов* (прямых линий) в любых необходимых нам точках кривой.

Аппроксимация нелинейного мира линейными зависимостями является для ученых обычной практикой, что, конечно, никоим образом не изменяет сам факт принципиальной

нелинейности Вселенной. Для того чтобы получить возможность работать с нелинейными системами непосредственно, необходимо использовать математические приемы, лежащие на границе между геометрией и нелинейными дифференциальными уравнениями. Именно это было осуществлено в рамках геометрического анализа, математического подхода, оказавшегося весьма полезным как для теории струн, так и для всей современной математики в целом.

Я не хотел бы, чтобы у вас возникло впечатление, будто бы начало геометрического анализа было заложено только в первой половине 1970-х годов, когда я остановил свой выбор на этой области математики. Как я уже говорил, в математике никто не может заявить о том, что он начал что-либо с чистого листа. Так и идея геометрического анализа восходит еще к XIX столетию – а именно к работам французского математика Анри Пуанкаре, который, в свою очередь, основывался на трудах Римана и других его предшественников.

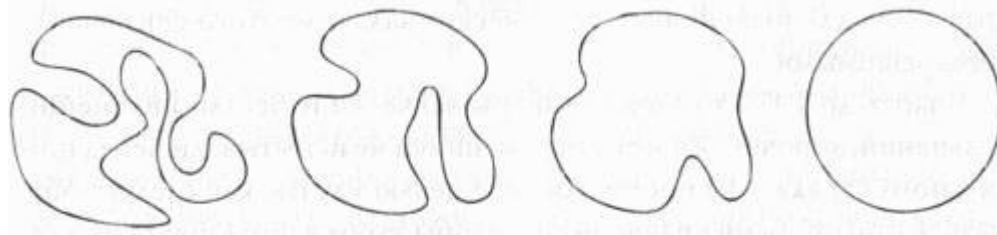


Рис. 3.3. Метод геометрического анализа, известный как поток сокращения кривых, дает математическое описание механизма превращения любой несамопересекающейся замкнутой кривой в окружность без возникновения при этом каких-либо особенностей, таких как выступы, петли или узлы

Вклад, внесенный многими из моих непосредственных предшественников в математику, был весьма значителен, таким образом, к моменту моего выхода на сцену в области нелинейного анализа уже имелось множество детально разработанных теорий. К подобным теориям относится разработанная Морри, Алексеем Погореловым и другими теория нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных для случая двухмерного пространства, которые называют эллиптическими уравнениями и которые будут обсуждаться в пятой главе. В 1950-х годах Эннио де Джорджи и Джон Нэш разработали методы исследования подобных уравнений для случая большего числа измерений и более того – для любого числа измерений. Вскоре после этого теории, созданные для большого числа измерений, были развиты такими учеными, как Морри и Луис Ниренберг, что говорит о том, что я выбрал отличное время для начала работы в данной области и применения разработанных ими методов к геометрическим задачам.

Несмотря на то что подход, который я и мои коллеги взяли на вооружение в начале 1970-х, не был чем-то совершенно новым, мы попытались взглянуть на него с совершенно иной точки зрения. Так, для Морри дифференциальные уравнения в частных производных имели фундаментальное значение сами по себе и представляли скорее подлежащее изучению прекрасное творение разума, нежели средство для достижения какой-либо цели. Интересуясь также и геометрией, он рассматривал ее в основном как источник интересных дифференциальных уравнений, точно так же он смотрел и на многие области физики. И хотя мы оба восхищались этими уравнениями, наши цели были практически противоположны – вместо того, чтобы пытаться искать новые нелинейные уравнения в геометрических задачах, я собирался использовать эти уравнения для решения геометрических задач, до этого считавшихся неразрешимыми.

Вплоть до 1970-х годов геометры всячески избегали нелинейных уравнений, впрочем, я и мои современники не испытывали перед ними сильного страха. Мы поставили себе целью узнать, как следует обращаться с подобными уравнениями, чтобы затем использовать их в своей повседневной работе. Рискуя показаться нескромным, я все же скажу, что эта стратегия не только оправдала себя, но и вышла далеко за рамки первоначальных задач. На протяжении многих лет, используя методы геометрического анализа, мы занимались решением

важнейших задач, не разрешенных до этого каким-либо другим способом. «Смесь геометрии с теорией [дифференциальных уравнений в частных производных], – отметил математик Имперского колледжа Лондона Саймон Дональдсон, – задает тон во всей обширной области, касающейся данного предмета, на протяжении последней четверти столетия».²⁵

Итак, чем же занимается геометрический анализ? Рассмотрим сначала простейший пример. Предположим, что вы нарисовали окружность и сравнили ее с произвольной петлей или замкнутой кривой, которая имеет несколько меньшую длину, – в роли подобной петли может выступать обычная резинка, небрежно брошенная на письменный стол. Эти две кривые выглядят совершенно различными и, естественно, имеют разную форму. Однако можно представить, как резинка деформируется (или растягивается) и превращается в окружность – такую же, как та, что нарисована на бумаге.

Существует много способов сделать это. Вопрос в том, какой из них лучше? Иными словами, существует ли такой способ, который будет безотказно работать во всех возможных случаях и никогда не приведет к возникновению узлов или перекручиваний? Можно ли найти этот универсальный способ, не прибегая к методу проб и ошибок? Узнать все это можно в рамках геометрического анализа, который позволяет, исходя из геометрии произвольной кривой (в нашем случае резинки), сделать выводы о способах ее преобразования в окружность. Этот процесс не должен быть произвольным. Строго определенный или – еще лучше – канонический путь превращения нашей кривой в окружность однозначно определяется ее геометрией. Для математиков слово *канонический* является синонимом слова «единственно верный», что, впрочем, иногда звучит излишне строго. Представим себе, что мы хотели бы попасть с Северного полюса на Южный. Существует бесконечно много меридианов, соединяющих эти точки. Каждый из меридианов будет кратчайшим путем, но ни один из них не будет единственно верным; вместо этого мы называем такие пути каноническими.

Те же вопросы остаются актуальными и в случае более высоких размерностей. Вместо окружности и резинки теперь можно сравнить сферу или полностью надутый баскетбольный мяч со сдутым баскетбольным мячом с разнообразными углублениями и выступами. Задача состоит в том, чтобы превратить сдутый баскетбольный мяч в идеальную сферу. Конечно, для этого лучше всего использовать насос, но можно и математику. Математическим аналогом насоса в геометрическом анализе является дифференциальное уравнение, служащее движущим механизмом процесса преобразования формы путем крошечных непрерывных изменений. Стоит только определиться с начальной ситуацией (геометрией сдутого мяча) и найти подходящее дифференциальное уравнение – и задача будет решена.

Самым тяжелым во всем этом является нахождение подходящего для данного случая дифференциального уравнения, равно как и выяснение, существует ли в принципе уравнение, подходящее для данной задачи. К счастью, Морри и другие математики создали немало инструментов для анализа дифференциальных уравнений, при помощи которых можно узнать, имеет ли решение задача, с которой мы столкнулись, и, если да, то является ли это решение единственным.

Описанный выше тип задач принадлежит к категории задач, известных как *геометрический поток*. Подобные задачи в последнее время привлекли достаточно большое внимание по причине их использования в доказательстве сформулированной сто лет назад гипотезы Пуанкаре, о которой еще пойдет речь в этой главе. При этом, однако, необходимо отметить, что задачи данного типа составляют лишь часть круга исследований геометрического анализа, который охватывает гораздо большую область возможных применений.

Говорят, что, для того кто держит в руке молоток, любая проблема кажется гвоздем. Загвоздка лишь в том, как правильно определить направление «удара», необходимое для того, чтобы разрешить ту или иную задачу. Так, одним из важных классов задач, для решения

25 Lizhen Ji and Kefeng Liu, “Shing-Tung Yau: A Manifold Man of Mathematics,” Proceedings of Geometric Analysis: Present and Future Conference, Harvard University, August 27-September 1, 2008.

которых используется геометрический анализ, является исследование минимальных поверхностей. Для таких гвоздей геометрический анализ порой является идеальным молотком.

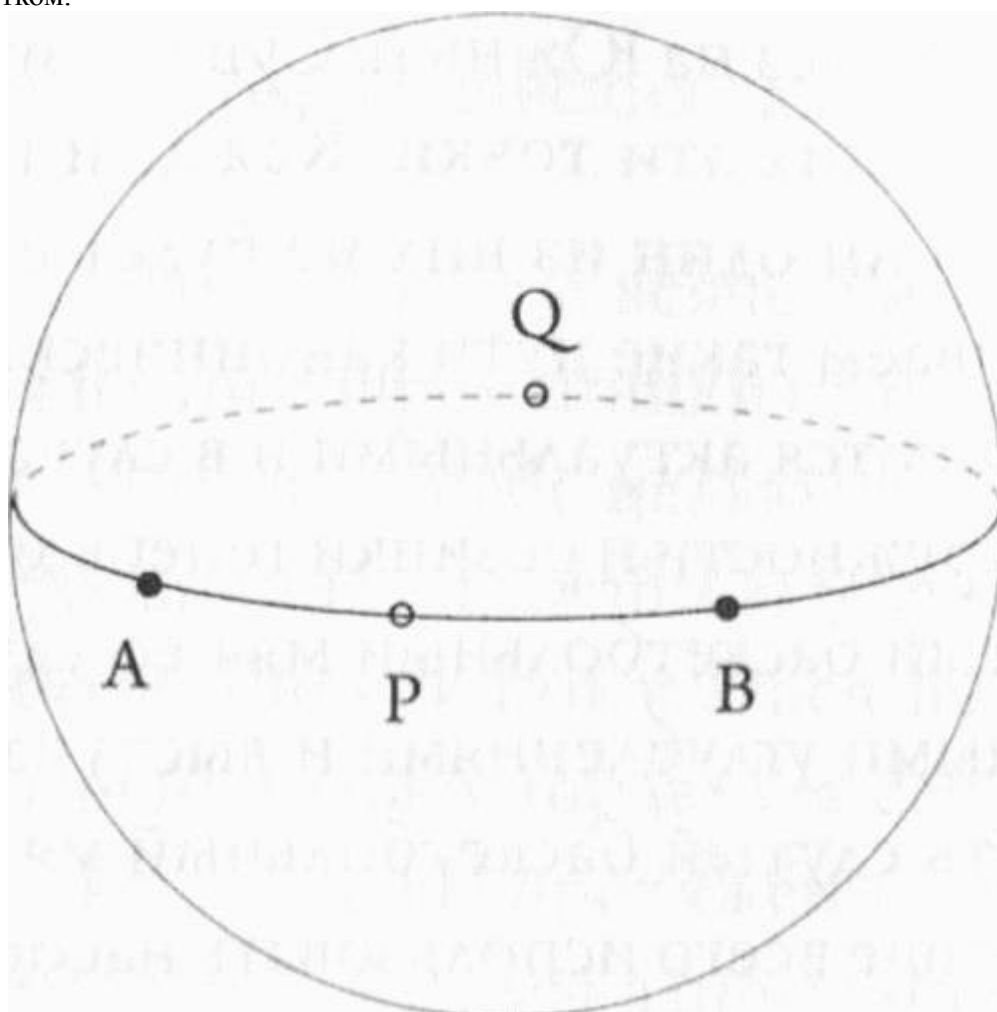


Рис. 3.4. Кратчайшее расстояние между точками А и В проходит по дуге большого круга, который в данном случае совпадает с экватором, через точку Р. Этот путь носит название геодезической линии. Путь из А в В через точку Q также называется геодезической линией, хотя он и не соответствует кратчайшему расстоянию между точками. Однако он является кратчайшим по сравнению с другими путями, лежащими в непосредственной близости от него

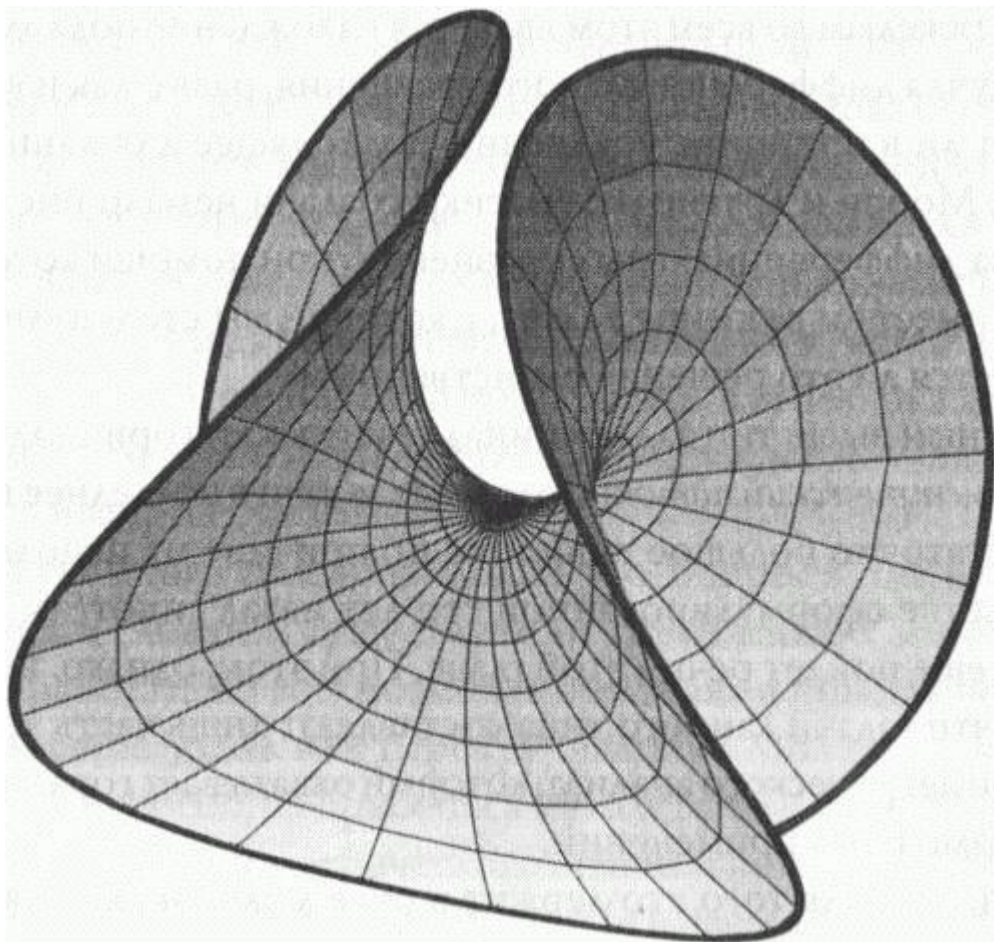


Рис. 3.5. Жозеф Плато выдвинул гипотезу, согласно которой для любой простой замкнутой кривой можно найти минимальную поверхность – иными словами, поверхность минимально возможной площади, ограниченную данной кривой. Минимальной поверхностью, натянутой на замкнутую кривую, показанную жирной линией, в данном случае является так называемая поверхность Эннепера, названная в честь немецкого математика Альфреда Эннепера. (Изображение предоставлено Джоном Ф. Опреа)

Любой человек неоднократно сталкивался с минимальными поверхностями. При погружении пластмассового кольца из набора для пуска пузырей в сосуд с мыльной водой действие поверхностного натяжения приводит к тому, что образующаяся мыльная пленка принимает совершенно плоскую форму, стремясь иметь минимальную возможную площадь. Выражаясь математическим языком, минимальная поверхность является наименьшей по площади из всех поверхностей, которые можно натянуть на заданный замкнутый контур.

Задачи на нахождения минимума уже на протяжении сотен лет играют одну из ведущих ролей в геометрии и физике. Так, в XVII столетии французский математик Пьер Ферма показал, что свет, проходя через различные среды, всегда следует по тому пути, который требует наименьшего времени, что впоследствии привело к открытию так называемого «принципа наименьшего действия», ставшему одним из первых фундаментальных физических принципов, основанных на понятии нахождения минимума.

По словам стэнфордского математика Леона Симона, «мы постоянно сталкиваемся с подобным явлением в природе, поскольку из всех возможных конфигураций всегда реализуются только те, которые имеют наименьшую энергию»²⁶. Поверхность, обладающая наименьшей возможной площадью, соответствует состоянию с минимальной энергией, которое, при прочих равных условиях, всегда будет предпочтительным. Поверхность с наименьшей площадью будет иметь нулевую нормальную составляющую поверхностного

²⁶ Leon Simon (Stanford University), interview with author, February 6, 2008.

натяжения, иными словами, средняя кривизна этой поверхности также будет равна нулю. По этой причине поверхность жидкости имеет плоскую форму (с нулевой кривизной) и точно такую же форму имеют мыльные пленки.

В области исследований минимальных поверхностей присутствует некоторая путаница, берущая свое начало в терминологии, не изменявшейся на протяжении столетий, несмотря на постепенное усложнение математических понятий. Дело в том, что существует еще один класс поверхностей, которые также иногда называют минимальными, хотя они и не обязательно имеют минимальную площадь. Этот класс включает поверхности, площадь которых меньше, чем площадь других поверхностей, ограниченных тем же контуром, – это могут быть как истинно минимальные поверхности или «основные состояния» так и поверхности, носящие название стационарных, которые имеют минимальную возможную площадь на отдельных участках (локально), но не в целом (глобально). Поверхности этого типа, имеющие нулевую нормальную составляющую поверхностного натяжения и нулевую среднюю кривизну, весьма интересны как математикам, так и инженерам. Мы привыкли думать о минимальных поверхностях как о членах одного семейства, весьма похожих между собой. И поскольку каждая из этих поверхностей по-своему интересна, все их можно считать уникальными.

Нахождение кратчайшего пути является одномерным вариантом более сложной задачи нахождения минимальной поверхности для большего числа измерений. Кратчайший путь между двумя точками – будь то прямая линия, плоскость или дуга окружности, соединяющая две точки на земном шаре, – иногда называют *геодезической линией*, хотя это понятие, также вызывая путаницу, включает в себя и те пути, которые не обязательно являются кратчайшими, что, впрочем, не мешает им иметь большое значение для геометров и физиков. Если на дуге большого круга взять две точки, не лежащие на противоположных полюсах, то возникнет сразу два возможных пути из одной точки в другую – короткий и длинный. Оба пути представляют собой геодезические линии, но лишь один из них соответствует кратчайшему расстоянию между точками. Более длинный путь также имеет минимально возможную длину, однако только локально, среди всех возможных путей, проходящих вблизи данной геодезической линии. При рассмотрении всех возможных вариантов этот путь уже не будет кратчайшим – более кратким будет противоположный ему путь. Ситуация становится еще более запутанной в случае эллипсоида – поверхности, имеющей форму сплюснутой сферы, которую можно получить, вращая эллипс вокруг одной из его осей, – на эллипсоиде существует много геодезических линий, не являющихся кратчайшими путями из всех возможных.

Для нахождения упомянутых выше минимальных путей необходимо использовать дифференциальные уравнения. Чтобы найти минимальные значения, необходимо обратить внимание на точки, в которых производная равна нулю. Поверхность с наименьшей площадью должна удовлетворять определенному дифференциальному уравнению, а именно такому уравнению, которое выражает факт равенства нулю средней кривизны во всех возможных точках поверхности. Как только вы нашли требуемое дифференциальное уравнение в частных производных – вы сразу же получаете огромное количество информации о вашей задаче, поскольку за годы работы мы узнали многое об этих уравнениях.

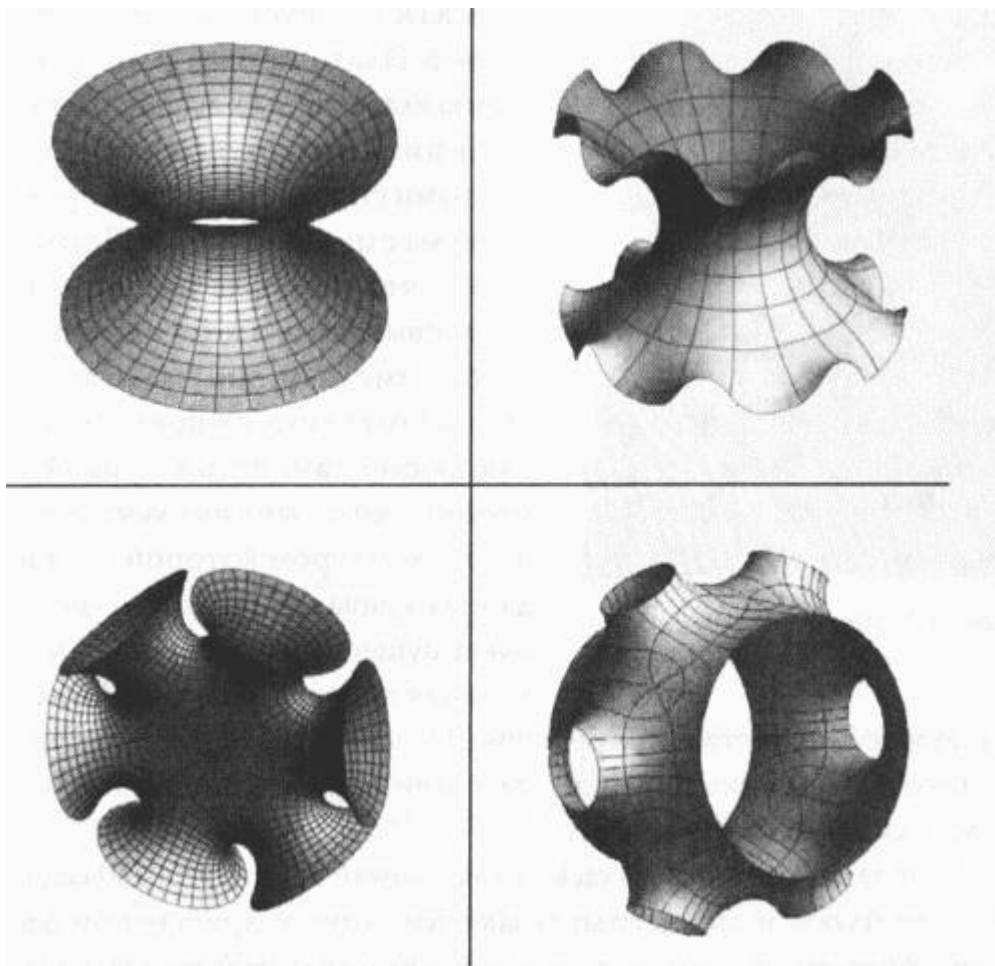


Рис. 3.6. Хотя оригинальная формулировка проблемы Плато относится к поверхностям, натянутым на простые замкнутые кривые, можно сформулировать более сложные варианты того же вопроса – и иногда даже найти на них ответы. Например, можно ли найти минимальную поверхность в том случае, если граница состоит не из одной, а из нескольких замкнутых кривых (например, окружностей)? На рисунке приведены некоторые примеры минимальных поверхностей, являющихся решениями проблемы Плато, представленной в данной форме. (Исходное изображение – 3D-ExplorMath Consortium)

«Впрочем, это совсем не означает, что мы занимаемся разграблением хорошо разработанной области и просто подбираем все, что плохо лежит. Наше сотрудничество – это скорее улица с двухсторонним движением, поскольку большой объем информации о поведении дифференциальных уравнений в частных производных был получен именно благодаря геометрии», – говорит Роберт Грин.²⁷ Чтобы увидеть то, что может получиться из соединения геометрического анализа с теорией минимальных поверхностей, давайте продолжим наш разговор о мыльных пленках.

В XIX столетии бельгийский физик Жозеф Плато провел в этой области серию классических экспериментов, состоявших в погружении изогнутых различными способами кусков проволоки в сосуды с мыльной водой. Плато сделал вывод, что мыльные пленки, которые образовывались в ходе эксперимента, всегда имели минимальную поверхность. Более того, он предположил, что для любой замкнутой кривой всегда можно найти минимальную поверхность, контуром которой служила бы данная кривая. В большинстве случаев будет существовать только одна минимальная поверхность – и тогда задача будет иметь единственное решение. Но в некоторых случаях существует больше чем одна поверхность с минимальной площадью, и мы не знаем, сколько их будет всего.

Гипотеза Плато оставалась недоказанной вплоть до 1930 года, когда Джесси Дуглас и

²⁷ Greene, interview with author, March 13, 2008.

Тибор Радо независимо друг от друга нашли решение этой проблемы. За свою работу в этой области Дуглас получил в 1936 году медаль Филдса, став первым обладателем этой награды.

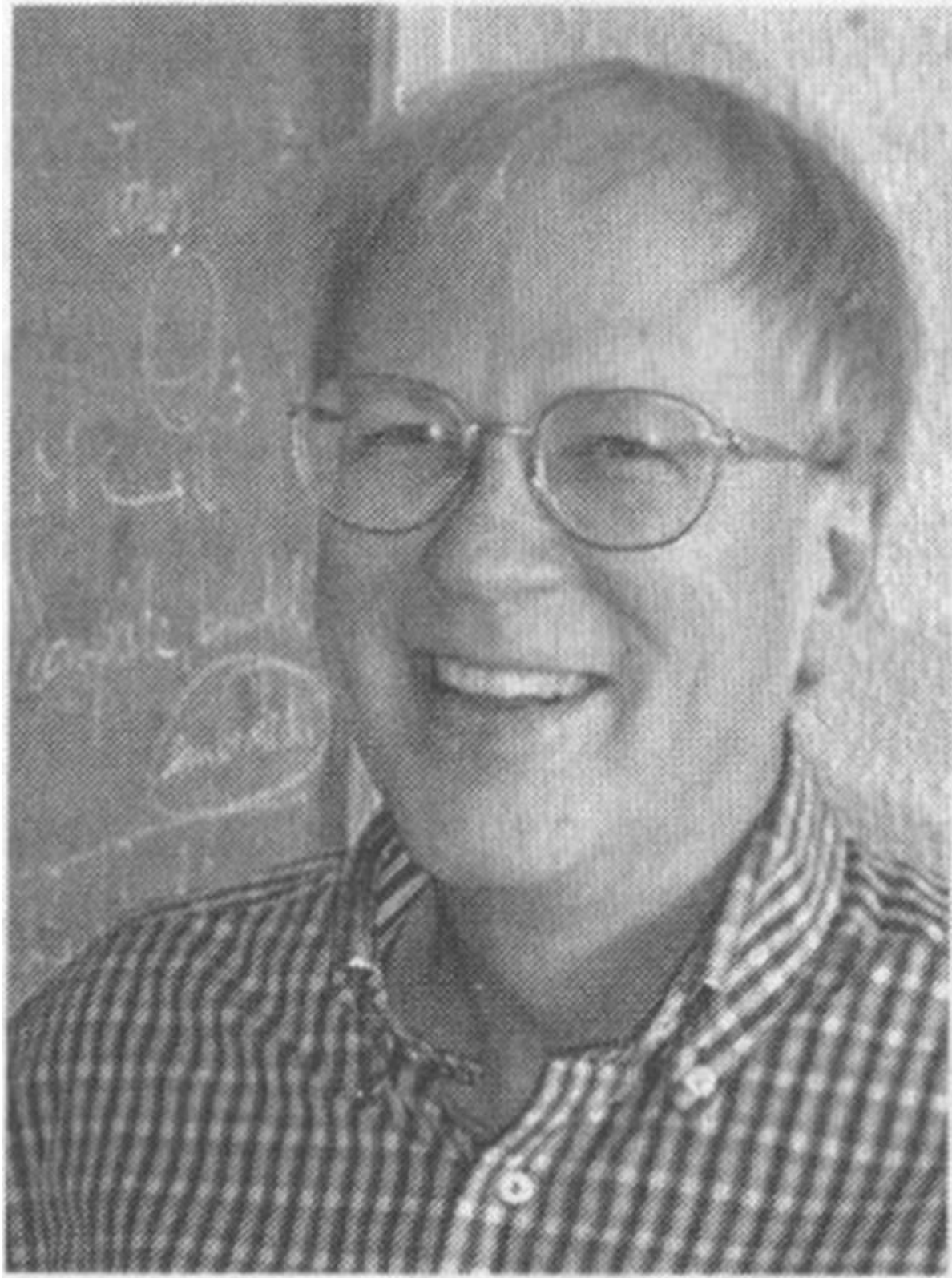


Рис. 3.7. Математик Уильям Микс (фотография Хоакина Переза)

Не всякая минимальная поверхность столь же проста, как мыльная пленка. Некоторые минимальные поверхности, над которыми ломают головы математики, намного сложнее и характеризуются многочисленными изгибами и складками, называемыми *особенностями*, или *сингулярностями*, – впрочем, многие из них встречаются в природе. Через несколько десятилетий после того, как Дуглас и Радо опубликовали свои работы, их разработки были

продолжены стэнфордским математиком Робертом Оссерманом, автором блестящей книги по геометрии под названием «Поэзия Вселенной», который показал, что минимальные поверхности, фигурирующие в экспериментах, подобных экспериментам Плато, могут иметь только один тип особенностей, выглядящих как диски или плоскости, пересекающиеся по прямым линиям. Следующий шаг был совершен мной и Уильямом Миксом, профессором Массачусетского университета, с которым мы вместе учились в Беркли.

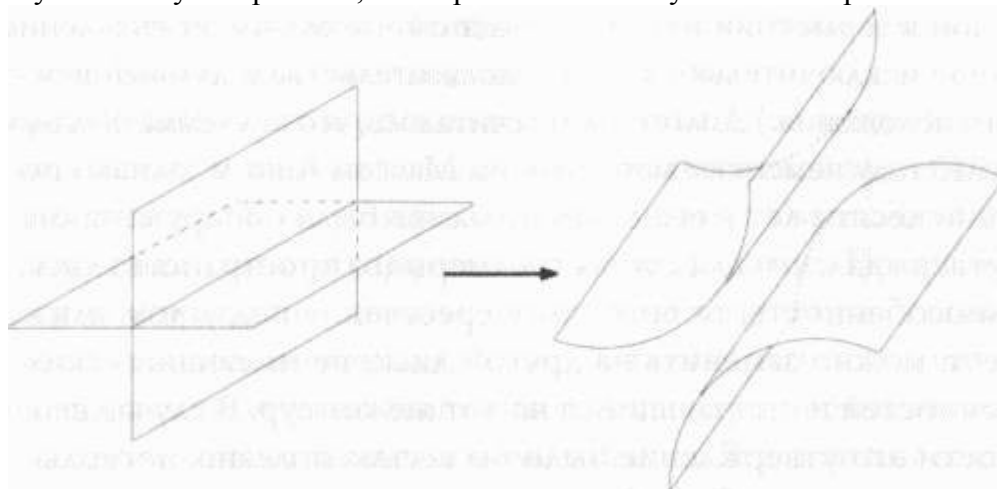


Рис. 3.8. Лемма Дена, геометрическая версия которой была доказана Уильямом Миксом и автором данной книги (Яу), обеспечивает математический метод для преобразования пересекающихся поверхностей в поверхности без пересечений, складок и других особенностей. Лемму обычно формулируют в терминах топологии, но геометрический подход Микса и Яу дает более точное решение

Мы рассмотрели ситуацию, в которой в роли минимальных поверхностей выступали так называемые вложенные диски, представляющие собой поверхности, которые на всем своем протяжении ни разу не изгибаются настолько, чтобы пересечь сами себя. Локально подобное пересечение выглядело бы как пересечение двух или нескольких плоскостей. В частности, нас заинтересовали *выпуклые* тела, то есть такие объекты, для которых отрезок прямой (или геодезическая линия), соединяющий любые две точки, всегда будет лежать на поверхности или внутри данного объекта. Таким образом, куб и сфера являются выпуклыми объектами, а седло – нет. Любые полые тела, обладающие выступами или имеющие форму полумесяца, не считаются выпуклыми, поскольку отрезки, соединяющие некоторые точки, обязательно будут выходить за пределы тела. Нами было доказано, что для любой замкнутой кривой, которую можно нарисовать на поверхности выпуклого тела, минимальная поверхность, опирающаяся на данную кривую, всегда будет вложенной, то есть не будет иметь тех складок или пересечений, которые упоминал Оссерман. Иными словами, в выпуклых пространствах все идет гладко и красиво.

Таким образом мы разрешили важнейший вопрос геометрии, являвшийся предметом дискуссий на протяжении десятилетий. Впрочем, на этом история не закончилась. Для доказательства данной версии теоремы Плато мы с Миксом использовали некую лемму, называемую леммой Дена.

(Леммой в геометрии называется вспомогательное утверждение, доказанное исключительно с целью доказательства в дальнейшем более общего положения.) Долгое время считалось, что эта лемма была доказана в 1910 году немецким математиком Максом Деном, однако по прошествии десяти лет в его доказательстве была обнаружена ошибка. Ден утверждал, что для случая трехмерного пространства диск, имеющий особенность, то есть самопересечение под углом или крест-накрест, можно заменить на другой диск, не имеющий каких-либо особенностей и опирающийся на тот же контур. В случае своей истинности это утверждение было бы весьма полезно, поскольку оно изрядно упростило бы работу геометров и топологов, предоставив им возможность заменять самопересекающиеся

поверхности поверхностями, не имеющими подобных пересечений.

Окончательное доказательство леммы Дена было найдено в 1956 году греческим математиком Христосом Папакирьякопулосом. Это событие было запечатлено в шуточном стишке Джона Мильнора:

Вероломнейшая лемма Дена
Пред топологом ставила стену.
Но явился Христос
Папакирьякопулос,
Доказав эту лемму мгновенно.

Мы с Миксом применили основанный на топологии подход Папакирьякопулоса к геометрической проблеме, затронутой в работах Платона. Затем мы пошли в обратном направлении и при помощи геометрии доказали более строгие варианты (по сравнению с теми, которые можно было получить исходя исключительно из топологии) как леммы Дена, так и относящейся к ней *теоремы о петле*. Прежде всего, мы показали возможность существования диска с наименьшей площадью во вложенном (и, следовательно, несамопересекающемся) пространстве. Однако в этом частном случае (называемом *эквивариантным*) необходимо было рассматривать не один диск, а множество симметричных пар – нечто подобное многочисленным отражениям в кривом зеркале. Случай, рассмотренный нами, предполагал конечное, хотя и произвольно большое число зеркальных отражений – или симметричных пар. Мы доказали, что диск минимальной площади ни при каких условиях не пересекается ни с самим собой, ни с дисками из его группы симметрии. Можно сказать, что диски, принадлежащие одной группе, «параллельны» друг другу за одним только исключением: в тех случаях, когда диски все же пересекаются, они должны полностью совпадать.

Данная задача важна и сама по себе, однако еще большую важность она приобретает в связи со знаменитой топологической задачей, сформулированной в 1930 году и известной как гипотеза Смита. Эта гипотеза основана на размышлениях американского тополога Пола Смита о возможности вращения обычного трехмерного пространства вокруг бесконечно длинной вертикальной оси. Смиты было известно, что в том случае, когда ось является прямой линией, осуществить вращение вокруг нее трехмерного пространства довольно просто. Его гипотеза состояла в том, что подобное вращение становится невозможным при наличии на оси хотя бы одного узла.

Вас, конечно, может удивить, что кого-то заинтересовал подобный вопрос, но это именно тот тип задач, которыми и занимаются топологи и геометры. Как заметил Кэмерон Гордон из Техасского университета по этому поводу: «Наша интуиция подсказывает нам, что это утверждение самоочевидно, поскольку возможно ли представить вращение пространства вокруг завязанной в узел линии?» Наше с Миксом доказательство леммы Дена и теоремы о петле стали двумя последними фрагментами, необходимыми для того, чтобы подтвердить гипотезу Смита. Окончательное подтверждение его гипотезы было получено путем объединения наших результатов с результатами Уильяма Тёрстона и Хаймана Басса. Упомянутый ранее Кэмерон Гордон свел воедино разрозненные фрагменты и получил безупречное доказательство, подтвердившее предположение Смита о невозможности вращения трехмерного пространства вокруг завязанной в узел оси. При этом, правда, оказалось, что – как бы смешно это ни прозвучало – это утверждение неверно для пространств более высокой размерности, и для них подобные вращения все-таки возможны.²⁸

Это доказательство представляет собой прекрасный пример совместной работы геометров и топологов над проблемой, которая потребовала бы от них много больше времени в том случае, если бы они пытались решить ее поодиночке. Кроме того, работая над упомянутой задачей, я впервые осознал, что рассуждения о минимальных поверхностях

28 Cameron Gordon (University of Texas), interview with author, March 14, 2008.

применимы к вопросам топологии. Наконец, доказательство гипотезы Смита подтвердило идею о возможности использования геометрии для решения проблем в области топологии и физики. Впрочем, пока мы говорили только о топологии и практически не затрагивали физику, оставив открытым вопрос о возможном использовании в ней геометрического анализа.

На международной конференции по геометрии, проходившей в Стэнфорде в 1973 году, мое внимание впервые привлекла одна задача из области общей теории относительности, которой всего через несколько лет после этого суждено было стать подтверждением действительности методов геометрического анализа в физике. Я узнал об этой задаче от физика Чикагского университета Роберта Героха, затронувшего в своем докладе неподтвержденную на то время гипотезу о положительности массы или энергии. Согласно этой гипотезе, в изолированной физической системе общая масса и общая энергия должны быть положительны. В данном случае понятия массы и энергии эквивалентны, как было показано Эйнштейном в его знаменитом уравнении $E = mc$. Поскольку Вселенную можно рассматривать как изолированную систему, гипотеза должна быть применима также и к Вселенной в целом. Вопрос о правомерности этого утверждения был столь важен, что на протяжении многих лет на всех основных конференциях по общей теории относительности ему отводили отдельную сессию. Причиной этого являлось непосредственное отношение гипотезы о положительности массы к вопросу о стабильности пространственно-временного континуума и, следовательно, непротиворечивости теории Эйнштейна самой по себе. Говоря простыми словами, пространственно-временной континуум может быть стабилен только в том случае, если его общая масса положительна.

На Стэнфордской конференции Герох бросил вызов геометрам, призвав их заняться задачей, которую физики на тот момент собственными усилиями решить не могли. Его надежда на помощь основывалась не только на фундаментальной связи между геометрией и гравитацией, но также и на том факте, что утверждения о положительности плотности материи и о положительности средней кривизны в каждой точке пространства по сути эквивалентны.

Герох был крайне заинтересован в окончательном разрешении этого вопроса. «Трудно было поверить, что эта гипотеза может быть ошибочной, но не менее трудно было доказать ее истинность», – заметил он впоследствии. Нельзя полагаться на интуицию, когда речь идет о подобных вещах, поскольку, добавил он, «она далеко не всегда ведет нас в правильном направлении».²

Призыв Героха прочно засел у меня в голове, и через несколько лет после этого, занимаясь совершенно иным вопросом, мы с моим бывшим аспирантом Ричардом Шоном (теперь стэнфордским профессором) обратили внимание на то, что некоторые из разработанных нами в последнее время методов геометрического анализа могут быть использованы для доказательства гипотезы о положительности массы. Тогда, применив стратегию, обычную для решения крупных задач, мы попытались разбить задачу на небольшие фрагменты, с которыми можно было бы работать поодиночке. Перед тем как приступить к доказательству гипотезы в целом (которую для геометра тяжело даже осознать, не то что пытаться доказывать), мы сосредоточили наше внимание на нескольких частных случаях. Кроме того, мы не были до конца уверены, что эта гипотеза верна с чисто геометрической точки зрения, поскольку ее утверждения казались нам чересчур строгими.

В своих попытках мы были не одиноки. Так, Михаил Громов, известный геометр, работающий в Нью-Йоркском университете и в Институте высших научных исследований (Франция), поделился с нами своим мнением о том, что, согласно его геометрической интуиции, общий случай этой гипотезы ошибочен, с чем были согласны и многие из его коллег. С другой стороны, большинство физиков были твердо уверены в истинности гипотезы, что они постоянно демонстрировали, год за годом поднимая вопрос о ней на всевозможных научных конференциях. Все это побудило нас более пристально взглянуть на

² Robert Geroch (University of Chicago), interview with author, February 28, 2008.

эту идею, чтобы понять, что мы сможем сделать в этой области.

Подход, который мы задействовали, был тесно связан с понятием о минимальных поверхностях. К доказательству гипотезы о положительности массы этот метод был применен впервые, поскольку никакой очевидной связи между этой задачей и минимальными поверхностями не существовало. Впрочем, Шон и я чувствовали, что мы выбрали правильный путь. В геометрии, как и в инженерии, для того чтобы решить задачу, необходимо прежде всего правильно подобрать инструменты для ее решения, хотя, после того как доказательство уже завершено, мы порой обнаруживаем и другие пути для его нахождения. Если бы локальная плотность материи оказалась положительной, как постулировалось в общей теории относительности, то геометрии пришлось бы считаться с этим фактом. Шон и я предположили, что именно минимальные поверхности являются наиболее подходящим инструментом для определения влияния локальной плотности материи на глобальную кривизну и топологию.

Доказательство, найденное нами, сложно объяснить «на пальцах». Поскольку уравнения поля Эйнштейна, на которых основывается переход от физики к геометрическим построениям, имеют сложную нелинейную форму, которая трудна для интуитивного восприятия. По сути, свое доказательство мы начали от противного, предположив существование такого пространства, для которого масса *не* является положительной. Затем мы показали, что в пространстве, средняя кривизна которого неотрицательна, можно представить себе поверхность с минимальной площадью. Иными словами, можно представить себе такую поверхность, средняя кривизна которой равна *нулю*. Это было бы невозможно, если бы в роли пространства, в котором находится данная поверхность, выступала наша Вселенная, в которой плотность наблюдаемой материи положительна. Если считать общую теорию относительности истинной, то из положительности плотности материи будет следовать положительность кривизны.

Хотя может показаться, что это рассуждение представляет собой подобие замкнутого круга, на самом деле это не так. В определенном пространстве, таком как наша Вселенная, плотность вещества может быть положительной даже при условии неположительности общей массы. Это обусловлено тем, что свой вклад в общую массу дает как вещество, так и гравитация. Даже если вклад вещества в общую массу будет положителен, как мы предположили в нашем доказательстве, общая масса может иметь отрицательное значение благодаря отрицательному вкладу со стороны гравитации.

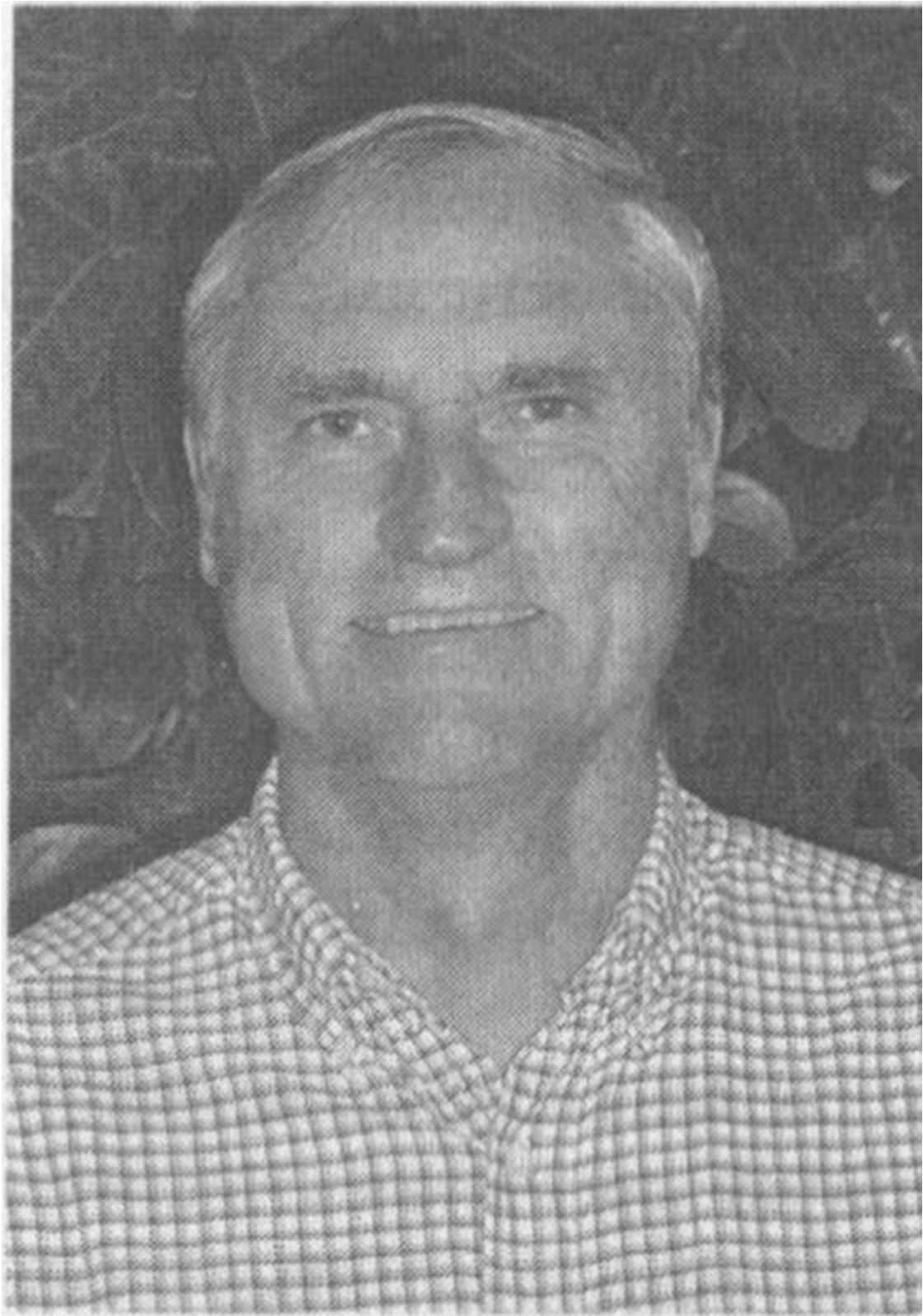


Рис. 3.9. Стэнфордский математик Ричард Шон

Иными словами, представив себе пространство с неположительной общей массой, мы доказали необходимость существования в нем «мыльной пленки» с минимально возможной площадью, в то время как в пространстве, подобном нашей Вселенной, такая пленка невозможна, поскольку ее средняя кривизна всюду будет отлична от нуля. Итак, предположение о неположительности общей массы привело нас к противоречию, показав тем самым, что верно обратное – то есть и масса, и энергия положительны. Мы доказали это утверждение в 1979 году, поставив финальную точку в вопросе, на разрешение которого так

уповал Герох.

Это открытие стало только первой частью нашей работы, которую Шон и я разделили, на две части, поскольку проблема, предложенная Герохом, на самом деле представляла собой частный случай, который специалисты называют *симметричным по отношению к обращению времени*. Мы с Шоном рассмотрели этот случай в первую очередь, и утверждение, приведшее нас к противоречию, было основано на том же предположении. Для доказательства более общего случая нам необходимо было решить уравнение, предложенное студентом Героха П. С. Янгом. Янг не пытался решить это уравнение самостоятельно, поскольку полагал, что оно не имеет общего решения. Строго говоря, это действительно было так, но мы с Шоном обнаружили, что уравнение все же разрешимо при введении определенного допущения, обращающего его решение на границе черной дыры в бесконечность. При помощи этого упрощения мы получили возможность свести общий случай к уже доказанному нами частному.

Важную роль в нашей работе сыграло руководство и мотивация со стороны физического сообщества. Несмотря на то что наше доказательство было основано на чистой математике – и прежде всего на нелинейных понятиях, с которыми едва ли близко знакомы большинство физиков, – именно их интуиция давала нам надежду на правильность нашего доказательства или, по крайней мере, на то, что затраченное нами время не прошло напрасно. Наша же с Шоном геометрическая интуиция позволила нам преуспеть в том, что не удалось сделать физикам.

Однако доминирование геометров в этой области продолжалось недолго. Спустя два года физик Эдвард Виттен, из Института перспективных исследований в Принстоне, доказал гипотезу о положительности массы совершенно иным способом, основанным на линейных (в отличие от нелинейных, использованных нами) уравнениях, благодаря чему доказательство этой гипотезы стало намного понятнее для физиков.

Оба доказательства подтвердили стабильность пространственно-временного континуума, что, фигурально выражаясь, позволило ученым вздохнуть с облегчением. «Если бы гипотеза о положительности массы оказалась ошибочной, это привело бы к драматическим последствиям для всей теоретической физики, поскольку означало бы то, что в общей теории относительности пространственно-временной континуум является нестабильным образованием», – объяснил нам Виттен.²⁹

Несмотря на то что вряд ли кто-то из обычных граждан лишился бы сна из-за этой проблемы, следствия, вытекающие из нее, относятся отнюдь не только к области теоретической физики, они затрагивают основы существования Вселенной как единого целого. Причиной этому является факт, что любая система стремится перейти на самый низкий из доступных энергетических уровней. Если энергия может принимать только положительные значения, то роль «пола», ниже которого не может упасть энергия системы, будет играть уровень с нулевой энергией. Однако если бы общая полная энергия могла быть отрицательной, то никакого энергетического «дна» в принципе бы не существовало. Вакуум, являющийся основным состоянием в общей теории относительности, бесконечно падал бы на все более и более низкие энергетические уровни. При этом пространственно-временной континуум непрерывно деградировал бы и распадался до тех пор, пока Вселенная как целое не прекратила бы свое существование. К нашему с вами счастью, это не так. Вселенная по-прежнему радуется наш глаз, чем доказывает стабильность пространственно-временного континуума – по крайней мере, в настоящее время. О его возможном распаде я расскажу чуть позже.

Несмотря на столь серьезные следствия, все же может возникнуть впечатление, что в этих двух доказательствах гипотезы о положительности массы не было особой необходимости. В конце концов, многие физики использовали предположение о том, что общая масса положительна, и ранее, когда гипотеза еще не была окончательно доказана. Можно ли считать, что появление доказательств что-то изменило? Что касается моего мнения

²⁹ Edward Witten (Institute for Advanced Study), interview with author, March 31, 2008.

по этому поводу, то я считаю, что между понятиями «знать что-то» и «предполагать что-то» существует огромная разница. В какой-то степени это разница между знанием и верой. В данном случае невозможно было с уверенностью говорить об истинности гипотезы до тех пор, пока не было получено строгое доказательство. Как сказал Виттен в своей статье 1981 года, представляя это доказательство, «то, что общая энергия всегда положительна, совсем не является очевидным фактом».³⁰

Помимо общефилософских выводов, следующих из доказательства гипотезы о положительности массы, эта – теперь уже – теорема дает некоторые подсказки по поводу природы массы как таковой, представляющей собой весьма эфемерное и на удивление неуловимое понятие в общей теории относительности. Частично эти сложности проистекают из нелинейности самой теории. Эта нелинейность означает то, что гравитация также является нелинейной. Благодаря этому гравитация может взаимодействовать сама с собой и в процессе взаимодействия порождать массу – тот ее вид, с которым особенно сложно иметь дело.

В общей теории относительности масса может быть определена только как глобальное понятие. Иными словами, мы привыкли оперировать понятием массы системы как целого, представляя эту систему заключенной в гипотетический ящик, так, как если бы мы посмотрели на нее из очень сильно удаленной точки – по сути, из бесконечности. Что касается «локальной» массы – например, массы данного тела, – то, хотя это понятие и покажется проще для непрофессионала в нашей области, на сегодняшний день четкого определения оно не имеет. Понятие плотности в общей теории относительности также определено весьма нечетко. Вопрос о том, откуда берется масса и как дать ей определение, волновал меня на протяжении десятилетий и, когда позволяло время, я возвращался к нему совместно с коллегами, такими как Мелисса Лю и Мутао Ванг из Колумбии. Как мне сейчас кажется, нам удалось в конце концов конкретизировать понятие локальной массы, используя при этом идеи различных физиков и геометров, и, возможно даже, мы были недалеко от окончательного решения проблемы. Но мы не смогли бы даже начать думать над этой проблемой, если бы не имели в основе прочного фундамента в виде положительности общей массы.

К тому же гипотеза о положительности массы привела нас с Шоном к доказательству другого утверждения из области общей теории относительности, касающегося так называемых черных дыр. Большинство людей, размышляя о столь причудливых астрофизических объектах, как черные дыры, едва ли как-то связывают их с геометрическими понятиями. Тем не менее геометрия достаточно многое может сказать о черных дырах, и по сути именно ей мы обязаны самой возможностью предсказания существования таких объектов до их обнаружения астрономическими методами. Это предсказание стало триумфом применения геометрического подхода к общей теории относительности.

В 1960-х годах Стивен Хокинг и Роджер Пенроуз при помощи геометрических методов, точнее, той особой разновидности геометрии, которая рассматривается в нашей книге, и законов общей теории относительности доказали, что любая *ловушечная поверхность*, то есть чрезвычайно искривленная поверхность, которую не может покинуть даже свет, обязана в конце концов эволюционировать в сингулярность того типа, который, как полагают, находится в центре черной дыры – в том месте, где кривизна пространства-времени стремится к бесконечности. Оказавшись в черной дыре, можно обнаружить, что при движении к центру кривизна будет неуклонно возрастать. Предела этому возрастанию попросту не существует – кривизна будет возрастать вплоть до самого центра, где ее величина станет равной бесконечности. С кривизной вообще связано много удивительных вещей. Прогуливаясь по поверхности Земли, имеющей огромный (порядка шести тысяч километров), по сравнению с нашим ростом (как правило, не большим двух метров), радиус, мы не ощущаем ее кривизны. Однако если бы мы решили совершить прогулку по планете с

30 Edward Witten, “A New Proof of the Positive Energy Theorem,” *Communications in Mathematical Physics* 80 (1981): 381–402.

радиусом 5-10 метров, такой как планета Маленького Принца у Антуана де Сент-Экзюпери, то пренебречь ее кривизной мы бы уже не смогли.



Рис. 3.10а. Стивен Хокинг, физик из Кембриджского университета (фотография Филиппа Уотерсона, LBIPP, LRPS)

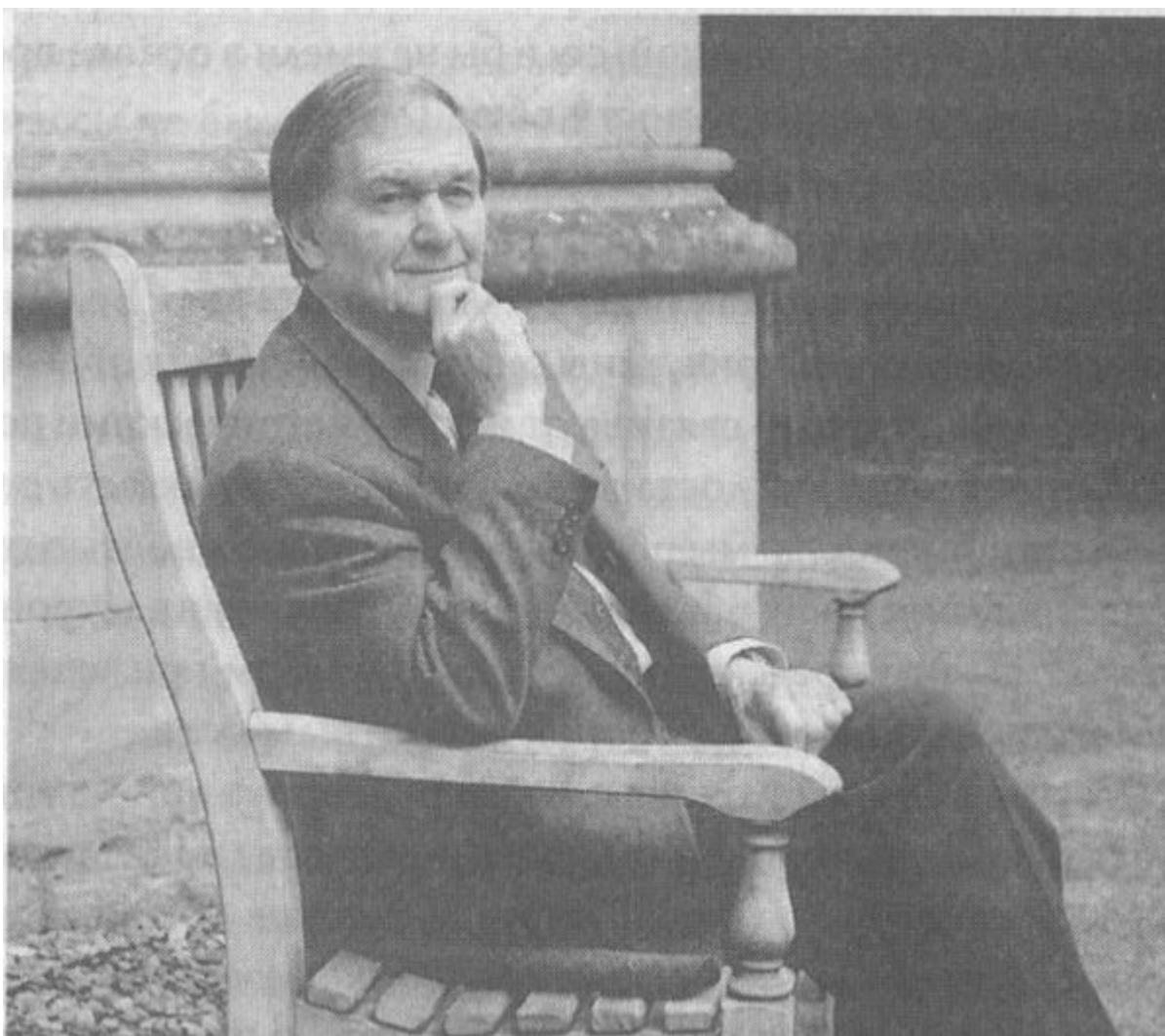


Рис. 3.10б. Роджер Пенроуз, математик из Оксфордского университета (© Роберт С. Харрис [Лондон])

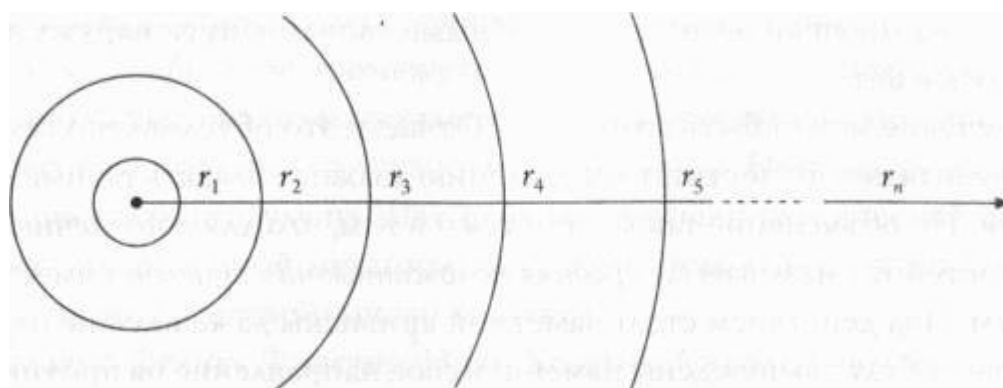


Рис. 3.11. Чем меньше сфера, тем сильнее она искривлена. Напротив, при стремлении радиуса к бесконечности кривизна уменьшается до нуля

Поскольку кривизна сферы обратно пропорциональна квадрату радиуса, возрастание радиуса до бесконечности приводит к уменьшению кривизны до нуля. И напротив, при стремлении радиуса к нулю кривизна неуклонно возрастает и стремится к бесконечности.

Представим себе вспышку света, произошедшую одновременно во всех точках поверхности обычной двумерной сферы в трехмерном пространстве. Свет будет двигаться вдоль радиуса в двух направлениях – внутрь и наружу. Для лучей света, направленных к центру сферы, совокупность точек, до которых доходит свет в определенный момент

времени, будет представлять собой поверхность, площадь которой быстро уменьшается и в пределе стремится к нулю, тогда как площадь подобной поверхности для лучей, распространяющихся вонне, со временем будет неуклонно возрастать. Ловушечная поверхность отличается от обычной сферы тем, что описанная выше площадь уменьшается вне зависимости от направления движения.³¹ Какое направление ни выберешь – из ловушки не выбраться. Иными словами, пути наружу в данном случае нет.

Как такое может быть возможно? Отчасти это обусловлено тем, что ловушечная поверхность по определению должна обладать такими свойствами. Но объяснение также кроется и в том, что для ловушечных поверхностей так называемая *средняя положительная кривизна* имеет экстремум. Под действием столь заметной кривизны даже идущие наружу лучи света будут вынуждены изменить свое направление на противоположное, как если бы крыша и стены начали надвигаться на них, и в результате сойтись в центре. «Если площадь поверхности изначально уменьшается, то она будет продолжать уменьшаться, поскольку здесь работает эффект фокусировки, – объяснил это явление мой коллега Шон. – Можно представить себе расходящиеся круги на глобусе с центром на Северном полюсе, которые, благодаря положительности кривизны сферы, сходятся в точку на Южном полюсе. Подобный эффект фокусировки дает положительная кривизна».³²

Пенроуз и Хокинг доказали, что, однажды возникнув, ловушечные поверхности обязательно вырождаются в объекты, которые свет не может покинуть, – так называемые черные дыры. Но как возникают ловушечные поверхности? До того как мы с Шоном начали свою работу над этим вопросом, было принято считать, что единственным условием для формирования черной дыры является достаточно высокая плотность материи в некоторой области пространства, – впрочем, аргументы были весьма расплывчаты и показывали скорее нежелание вникать в суть проблемы. Никому до нас не удавалось сформулировать утверждение о природе ловушечных поверхностей в ясном и строгом виде. Именно эту проблему мы с Шоном избрали своей целью, и снова в дело пошел метод минимальных поверхностей, столь детально разработанный нами во время доказательства теоремы о положительности массы.

Нам были интересны точные условия, при которых может возникнуть ловушечная поверхность, и в 1979 году мы доказали, что для достижения кривизны пространства, достаточной для ее формирования, плотность материи в данной области должна в два раза превышать плотность нейтронных звезд, которая, в свою очередь, в 100 триллионов раз превышает плотность воды. Наше доказательство совместно с исследованиями Хокинга и Пенроуза позволили понять те обстоятельства, при которых должны возникать черные дыры. Более конкретно, мы показали, что небесный объект, имеющий плотность материи больше, чем нейтронная звезда, должен коллапсировать непосредственно в черную дыру, а не в какое-либо иное промежуточное состояние. Это открытие было основано на чистой математике и относилось к объектам, существование которых еще предстояло установить в будущем. Несколько лет назад Деметриос Христодулу из Швейцарской высшей технической школы Цюриха открыл иной механизм формирования ловушечных поверхностей путем гравитационного коллапса.³³

Недавно Феликс Финстер, Ники Камран, Джоэль Смоллер и я рассмотрели вопрос о стабильности вращающихся черных дыр по отношению к внешним возмущениям. Иными словами, можно ли ожидать, что от какого-либо «удара» по вращающейся черной дыре она развалится на две, начнет беспорядочно вращаться или поломастся еще каким-нибудь образом? Несмотря на все наши труды, на сегодняшний день эту работу нельзя считать законченной, и мы пока ничего не можем сказать по поводу всех возможных разновидностей «ударов», способных дестабилизировать систему.

31 Roger Penrose, “Gravitational Collapse: The Role of General Relativity,” 1969, reprinted in *Mathematical Intelligencer* 30 (2008): 27–36.

32 Richard Schoen (Stanford University), interview with author, January 31, 2008.

33 Demetrios Christodoulou, *The Formation of Black Holes in General Relativity* (Zurich: European Mathematical Society, 2009).

Два года спустя Финстер, Камран, Смоллер и я представили на всеобщее обозрение то, что, по нашему мнению, представляло собой первое строгое математическое доказательство давней проблемы, сформулированной Роджером Пенроузом. В 1969 году Пенроуз предложил механизм высвобождения энергии из вращающейся черной дыры при уменьшении ее момента импульса. Этот сценарий предусматривал распад падающего в черную дыру тела на два фрагмента, один из которых пересекает горизонт событий и затягивается в черную дыру, а второй отбрасывается прочь от дыры с энергией, большей, чем энергия первоначального тела. Вместо того чтобы рассматривать материальную частицу, мы с коллегами сосредоточили внимание на ее аналоге – а именно на волне, распространяющейся по направлению к черной дыре, доказав, что со стороны математики против так называемого *процесса Пенроуза* возражений нет. При обсуждении нашего доказательства на Гарвардской конференции по геометрическому анализу, проходившей в 2008 году, Смоллер пошутил, что однажды при помощи этого механизма можно будет навсегда разрешить проблему мирового энергетического кризиса.

Впрочем, несмотря на вклад геометров в разрешение загадок черных дыр, изучение этих объектов в настоящее время находится в большей степени в руках астрофизиков, наблюдающих явления, происходящие вблизи самого края горизонта событий – границы, за пределами которой никакие наблюдения невозможны, поскольку ничто, включая свет, не способно вернуться «с той стороны». Тем не менее если бы не работы теоретиков, таких как Хокинг, Пенроуз, Джон Уиллер, Кип Торн и другие, вряд ли астрономы сосредоточили бы свое внимание на поисках именно этих объектов.

Описанные мной достижения имеют огромное значение, но я не хочу, чтобы у вас возникло впечатление, что возможности геометрического анализа на этом исчерпываются. Я сознательно ограничился только теми результатами, которые мне известны лучше всего, в получении которых я принимал непосредственное участие. В то же время данная область математики является намного более обширной, представляя собой плод усилий более чем сотни первоклассных ученых всего мира, и описанные мной задачи представляют лишь небольшой фрагмент общей картины. Кроме этого на протяжении большей части этой главы, темой которой является геометрический анализ, мы ни разу не упомянули некоторые из крупнейших достижений нашей дисциплины. Объять необъятное я не в состоянии; один лишь перечень успехов геометрического анализа, который я составил в 2006 году, занимает семьдесят пять страниц плотного текста, поэтому мы рассмотрим только те три из них, которые я считаю наиболее важными.

Первое из этих ключевых достижений лежит в области четырехмерной топологии. Основная задача тополога не сильно отличается от основной задачи таксономиста: классифицировать все возможные типы пространств или многообразий, допустимых для данной размерности. *Многообразием* называется пространство или поверхность любой размерности, поэтому мы можем использовать эти термины как синонимы.

В следующей главе мы рассмотрим многообразия более подробно. Топологи пытаются свалить в одну кучу различные объекты, имеющие одинаковую базовую структуру, даже если те совершенно не похожи внешне и даже различаются в отдельных деталях. Так, двухмерные поверхности – при условии их компактности, то есть замкнутости и ограниченности, и ориентируемости (наличии внешней и внутренней стороны) – можно классифицировать по количеству имеющихся дырок: тороидальные поверхности имеют по крайней мере одну дырку, тогда как топологическими сферами называются поверхности, которые дырок не имеют вовсе. Если число дырок для двух подобных поверхностей одинаково, то для тополога они эквивалентны, несмотря на всю разницу в их внешнем виде. Так, и чашка кофе и сушка, которую в нее обмакнули, являются торами первого рода. Тем же, кто предпочитает сушки с молоком, интересно будет узнать, что стакан, из которого они пьют, топологически эквивалентен сфере – его можно получить, протолкнув северный полюс в направлении южного и чуть подкорректировав форму полученного объекта.

Если двухмерный случай был досконально изучен более столетия назад, то ситуация

для более высоких размерностей выглядела намного сложнее. «Удивительно, что классификация поверхностей становится проще для пяти измерений и выше, – заметил математик Уорикского университета Джон Д. С. Джонс. – Сложнее всего работать с тремя и четырьмя измерениями».³⁴ К несчастью, именно случай трех и четырех измерений является важнейшим в физике. Уильям Тёрстон в 1982 году разработал схему классификации трехмерных поверхностей, разделив их на восемь основных типов геометрии. Его гипотеза, известная как гипотеза геометризации Тёрстона, была доказана два десятилетия спустя, о чем вкратце будет рассказано далее.

Атака на четвертое измерение началась примерно в то же время, когда Тёрстон высказал свое смелое предположение. Четырехмерные пространства тяжело не только представлять, но и описывать математически. Чтобы наглядно представить себе четырехмерный объект, вообразите трехмерный объект, форма которого изменяется со временем, например пульсирующий баскетбольный мяч, который периодически сжимается и вновь восстанавливает прежнюю форму. Детальная геометрия таких объектов весьма запутанна, если не сказать больше, однако она является ключом к пониманию того четырехмерного пространства-времени, в котором мы живем.

Некоторые из ключей к разгадке геометрии четырехмерных объектов были найдены в 1982 году, когда Саймон Дональдсон, в то время аспирант Оксфордского университета второго года обучения, опубликовал первую из нескольких статей, посвященных структуре четырехмерного пространства. Чтобы открыть окно в четвертое измерение, Дональдсон воспользовался нелинейными уравнениями в частных производных, разработанными в 1950 году физиками Чжэньнином Янгом и Робертом Миллсом. Уравнения Янга-Миллса, объединяющие сильное взаимодействие, ответственное за поведение кварков и глюонов в атомном ядре, со слабым, связанным с радиоактивным распадом, и электромагнитным – взаимодействием между заряженными частицами – работают именно в четырехмерном пространстве. Вместо того чтобы решать эти уравнения «в лоб», для чего необходимо было бы вначале установить геометрические и топологические особенности соответствующего пространства, Дональдсон подошел к проблеме с другой стороны: он рассудил, что решения уравнений должны содержать в себе информацию о том четырехмерном пространстве, в котором они работают. Точнее, данные решения должны привести к установлению некоторых ключевых величин, характеризующих соответствующие им пространства, – математики называют эти величины *инвариантами*, – которые впоследствии используются для определения тождественности или различности этих пространств.

Работа Дональдсона не только пролила свет на разыскиваемые им инварианты, но также позволила обнаружить весьма неожиданный и загадочный факт, а именно существование неизвестного прежде класса «экзотических» пространств, возможных только в четырех измерениях. Чтобы объяснить, что в данном контексте значит слово *экзотический*, необходимо вначале затронуть вопрос о том, какие две поверхности или многообразия можно считать идентичными. У математиков существуют различные методы сравнения многообразий. Первый из них связан с представлением о топологической эквивалентности. Проиллюстрировать этот метод можно при помощи примера со сдутым и накачанным мячом. Два объекта называют топологически идентичными, или *гомеоморфными*, если один из них можно преобразовать в другой исключительно путем изгиба, сжатия или растяжения, не прибегая к разрезам. Подобный переход от одного многообразия к другому носит название *непрерывного отображения*. Это отображение является взаимно-однозначным, то есть каждая точка одной поверхности соответствует строго определенной точке другой поверхности. Более того, точки, находившиеся в непосредственной близости друг от друга на первой поверхности, после подобного отображения по-прежнему останутся рядом.

Второй метод сравнения многообразий характеризуется несколько большей утонченностью и строгостью. В этом случае вопрос состоит в том, возможно ли перейти от одного многообразия к другому, *не нарушая его гладкости*, то есть не вводя так называемые

34 John D. S. Jones, “Mysteries of Four Dimensions,” *Nature* 332 (April 7, 1998): 488–489.

сингулярности, например острые углы или пики на поверхности. Многообразия, эквивалентные в этом смысле, носят название *диффеоморфных*. Чтобы два многообразия можно было считать диффеоморфными, функция, преобразующая одно многообразие в другое – или, иными словами, переводящая набор координат одного пространства в набор координат второго, – должна быть гладкой – дифференцируемой, то есть иметь производную во всех точках пространства в любой момент времени. График такой функции также должен быть гладким – не иметь никаких «зазубрин» во всех смыслах этого слова – наличие на нем обрывов, участков скачкообразного роста или падения привело бы к тому, что в определенных точках само понятие производной потеряло бы смысл.

В качестве примера рассмотрим сферу, помещенную внутри эллипсоида – поверхности, имеющей форму дыни, – так, что их центры совпадают. Лучи, проведенные из их общего центра во всех возможных направлениях, соединят точки на сфере с точками на эллипсоиде. Подобная операция может быть проделана для любой точки эллипсоида или сферы. Отображение в данном случае не только является непрерывным и однозначным, но оно также не нарушает гладкости отображаемой поверхности. Функция, связывающая две эти поверхности, также не имеет никаких особенностей – это просто прямая линия без зигзагов, резких поворотов и вообще чего-либо необычного. Таким образом, два рассматриваемых объекта – сферу и эллипсоид – можно назвать как гомеоморфными, так и диффеоморфными.



Рис. 3.12. Геометр Саймон Дональдсон

Противоположным примером является так называемая *экзотическая сфера*. Экзотической сферой называется гладкое во всех точках семимерное многообразие, которое, тем не менее, невозможно без нарушения гладкости преобразовать в обычную круглую семимерную сферу даже при соблюдении условия непрерывности преобразования. Таким образом, подобные поверхности являются гомеоморфными, но не диффеоморфными. Джон Мильнор, уже упоминавшийся в данной главе, получил медаль Филдса во многом благодаря установлению им факта существования экзотических пространств. До открытия Мильнора

многие сомневались в существовании таких пространств, поэтому их и назвали экзотическими.

Плоское евклидово пространство для случая двух измерений является простейшим из всех пространств, которые можно себе представить, – это плоская поверхность, подобная крышке стола, которая простирается бесконечно во всех возможных направлениях. На вопрос, будет ли двумерный диск, множество точек которого является подмножеством точек плоскости, гомеоморфным и диффеоморфным данной плоскости, можно ответить – да, будет. Можно представить себе толпу людей, стоящих на плоскости, каждый из которых берет в руку краешек диска и идет с ним в направлении от центра диска. Как только они достигнут бесконечности, диск точно, непрерывно и однозначно совпадет с плоскостью. Таким образом, эти объекты идентичны с точки зрения тополога. Очевидно и то, что подобный процесс растягивания диска в радиальном направлении можно проделать без нарушения его гладкости.

Все вышесказанное сохраняет свою силу для трех и любого другого числа измерений за исключением случая четырех. В четырехмерном пространстве многообразия могут быть гомеоморфны плоскости или плоскому евклидовому пространству, не будучи при этом диффеоморфны ему. По сути, существует бесконечное множество четырехмерных многообразий, гомеоморфных, но не диффеоморфных четырехмерному евклидовому

пространству, носящих общее название \mathbb{R}^4 (\mathbb{R} – от «real» – означает, что элементами

пространства являются *действительные* числа, в противоположность *комплексному* четырехмерному пространству).

Четырехмерное пространство преподносит нам множество особенностей и загадок. Так, к примеру, в пространственно-временном континууме, содержащем 3+1 измерение (три пространственных и одно временное), по словам Дональдсона, «электрическое и магнитное поля будут идентичны». «Но для другого числа измерений с геометрической точки зрения это будут два совершенно разных объекта. Одно из них представляет собой тензор и описывается при помощи матрицы, тогда как другое – вектор, и сравнивать их невозможно. Только в четырех измерениях и то и другое поле будет описываться векторами. Симметрия, имеющая место в данном случае, для иного числа измерений будет отсутствовать».⁴

Дональдсона, по его словам, восхищает тот факт, что с фундаментальной точки зрения невозможно точно указать, что именно выделяет случай четырех измерений среди всех остальных. До того как вышла его работа, о «гладкой эквивалентности» (диффеоморфизме) не было известно практически ничего, хотя благодаря математику Майклу Фриману (ранее работавшему в Калифорнийском университете, Сан-Диего) уже существовали определенные наработки в области топологической эквивалентности (гомеоморфизма). В свою очередь Фриман классифицировал четырехмерные многообразия с топологической точки зрения, основываясь на более ранней работе Эндрю Кассона, в настоящее время работающего в Йельском университете.

Дональдсон привнес в топологию целый ряд свежих идей, использование которых на практике позволило решить сложнейшую задачу классификации гладких (диффеоморфных) четырехмерных многообразий, открыв, фигурально выражаясь, закрытую прежде дверь. До него подобные многообразия были темным лесом. И хотя четырехмерные многообразия еще содержат в себе много загадок, по крайней мере, вопрос, с чего начинать их исследование, уже не стоит. При этом, однако, метод Дональдсона оказался чрезвычайно труден для практического применения. «Мы работали как лошади, пытаясь этим путем извлечь хоть какую-то информацию!» – рассказал гарвардский геометр Клиффорд Таубс.³⁵

4 Simon Donaldson (Imperial College), interview with author, April 3, 2008.

35 Faye Flam, “Getting Comfortable in Four Dimensions,” Science 266 (December 9, 1994): 1640.

В 1994 году Эдвард Виттен и его коллега – физик Натан Зайберг обнаружили намного более простой метод исследования геометрии четырехмерных пространств, несмотря на то что их подход основывался не собственно на геометрии, как метод Дональдсона, а на одной из теорий из области физики элементарных частиц – так называемой теории *суперсимметрии*. «В новом уравнении содержится вся информация, которая содержалась и в старом, – прокомментировал это открытие Таубс. – Разница лишь в том, что извлечь эту информацию из нового уравнения в тысячу раз проще».³⁶ Таубс, как и многие другие, использовал подход Зайберга-Виттена для расширения наших знаний о геометрических структурах в четырехмерном пространстве, понимание которых на сегодняшний день остается весьма условным, но тем не менее очень важным для ответа на вопрос о природе пространства-времени в общей теории относительности.

Виттен показал, что для большей части четырехмерных многообразий число решений уравнения Зайберга-Виттена определяется исключительно топологией соответствующего многообразия. После этого Таубс доказал теорему, согласно которой количество решений этих уравнений, предопределенное топологией многообразия, совпадает с числом подпространств или кривых определенного типа (*семейства*), которые можно поместить в данном многообразии. Определив количество кривых конкретного типа, соответствующих данному многообразию, можно как определить его геометрию, так и получить о нем много другой важной информации. Таким образом, справедливым будет заметить, что теорема Таубса позволила значительно продвинуться в области исследования подобных пространств.

Взглянув на историю исследований четырехмерных пространств, начиная с работ физиков Янга и Миллса в 1950-х, можно обнаружить, что в своем развитии эта теория проходила этапы, на которых физика оказывала влияние на математику, плавно переходящие в этапы, на которых математика влияла на физику. Несмотря на свое физическое происхождение, теория Янга-Миллса возникла не без участия геометрии, которая помогла лучше понять природу сил, объединяющих элементарные частицы в единое целое. Подойдя к данной проблеме с другой стороны, геометр Дональдсон использовал теорию Янга-Миллса для того, чтобы понять топологию и геометрию четырехмерных пространств. Тот же взаимовыгодный обмен между математикой и физикой был продолжен в работе физиков Зайберга и Виттена и в последовавших за ними работах. Таубс так подвел итог этой бурной истории: «Однажды на Землю прилетел марсианин, дал нам уравнения Янга-Миллса и улетел. Мы изучали их, и в конце концов возникла теория Дональдсона. Много лет спустя марсианин прилетел вновь и дал нам уравнения Зайберга-Виттена»³⁷. Хотя я и не могу поручиться за достоверность истории Таубса, пожалуй, из всех объяснений, которые я когда-либо слышал, это – наиболее правдоподобное...

Второе важнейшее достижение геометрического анализа – и многие поставили бы именно его на первое место по важности – относится к доказательству знаменитой гипотезы, сформулированной в 1904 году Анри Пуанкаре и на протяжении более столетия остававшейся важнейшей проблемой трехмерной топологии. Основной причиной, по которой я считаю эту гипотезу выдающейся, является возможность сформулировать ее в виде одного простого утверждения, которое, тем не менее, держало в напряжении все математическое сообщество на протяжении сотни лет. В двух словах, эта гипотеза утверждает, что компактное трехмерное пространство топологически эквивалентно сфере, если любая петля, которую можно построить в данном пространстве, может быть стянута в точку без нарушения при этом целостности петли или пространства. Как уже было сказано ранее в данной главе, пространство, удовлетворяющее этому условию, содержит тривиальную фундаментальную группу.

Гипотеза Пуанкаре звучит весьма просто, но на самом деле она далеко не очевидна. Рассмотрим двухмерный аналог этой задачи, не обращая внимания на то, что в

³⁶ Ibid.

³⁷ Mathematical Institute at the University of Oxford, “Chart the Realm of the 4th Dimension,” <http://www2.maths.ox.ac.uk/~dusautoy/2soft/4D.htm>.

действительности проблема сформулирована для трех измерений (и решить ее в этом случае намного сложнее). Представим себе сферу, например глобус, по экватору которого проходит резинка. Теперь легонько подтолкнем эту ленту в направлении северного полюса так, чтобы при этом она не переставала касаться поверхности. Если резиновая лента достаточно эластична, то, достигнув полюса, она фактически стянется в одну точку. В случае тора ситуация будет иная. Представим себе, что резиновая лента проходит через дырку тора и выходит с противоположной стороны. В данном случае стянуть резиновую ленту в одну точку, не разрезая при этом тор, невозможно. Резиновую ленту, идущую вокруг внешней поверхности тора, можно переместить в его верхнюю часть и оттуда уже спустить на внутреннюю поверхность. Однако пока лента находится на поверхности тора, стянуть ее в точку не удастся. По этой причине для тополога сфера имеет фундаментальное отличие от тора или любого другого многообразия, имеющего одну или несколько дырок. Гипотеза Пуанкаре, по сути, представляет собой вопрос, чем в действительности является топологическая сфера.

Прежде чем перейти к доказательству, я хотел бы вернуться на несколько десятилетий назад, в 1979 год, когда я еще работал в Институте перспективных исследований. В тот год я пригласил в Принстон более дюжины исследователей со всего мира, работающих в области геометрического анализа, чтобы вместе с ними попытаться заложить основы этой новой дисциплины. Мною было отобрано 120 важнейших геометрических вопросов, почти половина из которых в настоящее время полностью решена. Гипотеза Пуанкаре в этот список не входила. Причиной тому, с одной стороны, было отсутствие необходимости привлекать внимание к задаче, которая и без того являлась одной из известнейших в математике. С другой стороны, я искал задачи, имеющие более узкую формулировку, – такие, на которые можно найти однозначный ответ, – причем, по возможности, в обозримое время. И хотя нам порой приходилось бороться за то, чтобы узнать что-то новое, мы достигли заметного прогресса именно на пути решения подобных задач; это как раз то, что стимулирует математиков к работе сильнее, чем что-либо другое. В то время, однако, никто не знал, что делать с гипотезой Пуанкаре.

Одним из тех, кто не принимал участия в наших дискуссиях, был математик Ричард Гамильтон, работавший тогда в Корнеллском университете и впоследствии осевший на математическом факультете Колумбийского университета. В то время он как раз приступал к выполнению амбициозного проекта, посвященного поиску методов преобразования сложной и не обладающей гладкостью метрики в более гладкую. Несмотря на все упования Гамильтона, эти разработки не принесли столь быстрого успеха, на который он рассчитывал. Его интересовала чрезвычайно сложная система уравнений, относящаяся к вопросу о потоке Риччи – одном из видов геометрического потока, которые уже упоминались ранее. По сути дела, геометрический поток представляет собой метод, позволяющий разгладить выпуклости и прочие неровности на неоднородной поверхности, придавая таким образом поверхностям более однородную кривизну и выявляя фундаментальные формы, лежащие в их основе. Идеи Гамильтона не вошли в мой список из 120 основных задач хотя бы потому, что в то время он еще ничего не опубликовал по этой теме. Он скорее забавлялся ими, чем пытался найти решение.

Возможность познакомиться с его достижениями на 1979 год я получил, выступая с докладом в Корнеллском университете. Гамильтон тогда не считал свои уравнения применимыми к доказательству гипотезы Пуанкаре – он рассматривал их просто как задачу, небезынтересную для исследователя. Впервые столкнувшись с подобными уравнениями, я также занял весьма скептическую позицию по поводу их применимости... Уравнения выглядели слишком сложными, чтобы их можно было использовать на практике. Однако работа, проделанная Гамильтоном после этого, позволила ему опубликовать в 1983 году статью, посвященную решению уравнений, которые сейчас носят название гамильтоновых. В этой статье Гамильтон доказал особый случай гипотезы Пуанкаре, а именно тот случай, при котором кривизна Риччи положительна. О кривизне Риччи, тесно связанной с физикой, более

подробно будет рассказано в следующей главе.

Мой изначальный скептицизм побудил меня досконально исследовать статью Гамильтона, вчитываясь буквально в каждую строку, прежде чем я окончательно согласился с ней. При этом доказательство Гамильтона столь захватило меня, что по прочтении я немедленно поручил трем моим аспирантам из Принстона начать работу над его уравнениями. Тогда же я посоветовал Гамильтону попытаться воспользоваться своим подходом для доказательства гипотезы геометризации Тёрстона, относящейся к классификации трехмерных многообразий по восьми типам геометрий, расширенная форма которой включает в себя и общее доказательство гипотезы Пуанкаре. К сожалению, в то время я был мало осведомлен о каких-либо других методах, которые быгодились для дальнейшей работы над этим вопросом. Как ни удивительно, Гамильтон взялся за эту задачу с огромной энергией, постепенно продвигаясь в области исследований потока Риччи на протяжении следующих двадцати лет, работая в основном самостоятельно, хотя и находясь в тесном контакте со мной и моими студентами. Контакты между нами заметно оживились в 1984 году, когда мы с Гамильтоном вместе поступили на работу в Калифорнийский университет в Сан-Диего, где заняли смежные офисы. Посещение его семинаров по потокам Риччи было обязательным для всех моих студентов. Сотрудничество с Гамильтоном позволило нам узнать много нового, впрочем, я надеюсь, что он также перенял кое-что и от меня. Переехав в Гарвард в 1987 году, я больше всего жалел об утраченной возможности работать в тесном контакте с Гамильтоном.

Необращая внимания на окружающих, Гамильтон с неколебимой решительностью занимался решением своей задачи. Помимо прочего им было опубликовано полдюжины важнейших статей – порядка девяноста страниц каждая, – и в конце концов, ни один из его аргументов не оказался бесполезным. Все они пригодились при восхождении на гору Пуанкаре.

Так, например, Гамильтон показал, что все без исключения геометрические объекты, имеющие округлую форму, могут быть преобразованы в сферы при помощи потока Риччи – в полном соответствии с идеями Пуанкаре. Однако, как им было установлено, при деформации более сложных объектов будут неминуемо возникать выступы, складки и прочие сингулярности. Возможности обойти эти сингулярности не было, поэтому столь важным являлся вопрос, с какими именно сингулярностями можно столкнуться в данном процессе. Полный список всевозможных особенностей, которые могут возникнуть при деформации, был сформулирован Гамильтоном на основании моей совместной работы с Питером Ли, к которой я привлек его внимание за несколько лет до этого, – впрочем, Гамильтон весьма впечатляюще обобщил наши результаты.

Мой личный вклад в описываемые исследования восходит к 1973 году, когда я приступил к использованию нового метода, разработанного мной для гармонического анализа – области математики, насчитывающей несколько сотен лет и используемой для описания равновесных ситуаций. Созданный мной метод был основан на так называемом *принципе максимума*, который предполагает рассмотрение худшего из всех возможных сценариев. Представим, к примеру, что нам требуется доказать неравенство $A < 0$. Для этого нужно сформулировать вопрос так: «Какое максимальное значение может принимать A ?» Если рассмотреть наихудший случай, то есть взять наибольшее из возможных значений A и его величина все равно останется меньше нуля, то этим мы и подтвердим истинность исходного утверждения. На этом работу по доказательству можно считать законченной и насладиться заслуженным отдыхом. Я, иногда работая сам, иногда – совместно с Ш. Ю. Ченгом, моим бывшим однокурсником из Китайского университета Гонконга, применил этот принцип к огромному количеству нелинейных проблем. Работа включала в себя исследование уравнений, повсеместно возникающих в геометрии и физике и носящих в математике название *эллиптических*. Хотя подобные задачи, как правило, чрезвычайно сложны, в них отсутствует зависимость от времени, и поэтому их можно рассматривать как стационарные, что заметно упрощает решение.

В 1978 году мы с Питером Ли рассмотрели более сложную, зависящую от времени – динамическую ситуацию. В частности, мы исследовали уравнения, описывающие процессы распространения тепла через тело или многообразие. Мы рассмотрели случай, в котором одна из переменных, например энтропия – величина, характеризующая беспорядок системы, – изменяется во времени. Наиболее известным нашим вкладом в эту область стало неравенство Ли-Яу, описывающее с математической точки зрения процесс изменения теплового потока или другой аналогичной ему переменной во времени. Гамильтон и Перельман, в свою очередь, рассмотрели изменение во времени не теплового потока, как мы, а именно энтропии, отвечающей за беспорядок в системе. Соотношение Ли-Яу называется «неравенством», поскольку значение некой величины – в данном случае значение теплового потока или энтропии – в конкретной точке в определенный момент времени больше или меньше значения теплового потока или энтропии в той же точке в другой момент времени.

Наш подход дал в руки ученым количественный метод исследования процессов развития сингулярностей в нелинейных системах путем отслеживания расстояния между двумя точками с течением времени. Когда две точки сближаются настолько, что расстояние между ними становится равным нулю, вы получаете сингулярность. И сингулярность, и понимание этих сингулярностей является ключевым моментом для исследования процессов распространения тепла в целом. В частности, наш метод позволил подобраться к сингулярности настолько близко, насколько только это возможно, показывая, что происходило непосредственно перед столкновением – например, какова была скорость сближения точек. Это напоминает попытку реконструкции событий, предшествовавших автомобильной аварии.

Для того чтобы увидеть сингулярность крупным планом – или *разрешить ее*, как принято говорить в математике, – нами был изобретен особый вид «увеличительного стекла». Этот прибор мы используем для того, чтобы лучше рассмотреть ту область, в которой пространство сходится в особую точку. Затем мы увеличиваем выбранную область, сглаживая при этом все складки и неровности. Этот процесс повторяется не один или два, но бесконечное число раз. Чтобы увидеть полную картину, мы растягиваем не только пространство, но и время – то есть замедляем его. На следующем этапе происходит сравнение полученного описания точки сингулярности, соответствующее бесконечно большому числу увеличений, с описанием системы до столкновения точек. Неравенство Ли-Яу позволяет непосредственно сопоставить то, что было до столкновения, с тем, что стало после.

Гамильтон воспользовался нашим подходом, чтобы более пристально взглянуть на поток Риччи, исследуя структуру сингулярностей, которые могут возникать в процессе преобразования. Введение неравенства Ли-Яу в модель потока Риччи оказалось сложной задачей, на которую Гамильтону потребовалось почти пять лет, поскольку те уравнения, с которыми он имел дело, характеризовались куда большей нелинейностью – и, следовательно, куда большей сложностью, чем наши.

Один из подходов Гамильтона заключался в исследовании особого класса решений, являющихся стационарными в определенной системе координат. Выбор подходящей системы координат позволяет упростить многие задачи – например, при рассмотрении движения людей, находящихся на вращающейся карусели, оптимальным будет выбор системы координат, вращающейся с той же скоростью, что и карусель. Путем отбора стационарных решений, являющихся более простыми для понимания, Гамильтон разработал оптимальный метод введения методов оценки Ли-Яу в свои уравнения. Это, в свою очередь, позволило ему уяснить динамику потока Риччи – то есть процессов движения и развития объектов. В частности, Гамильтон был очень заинтересован исследованием процесса порождения сингулярностей в результате сложного движения в пространственно-временном континууме. В конечном итоге ему удалось описать структуру всех возможных сингулярностей, которые могли бы возникнуть в процессе преобразования, хотя он и не мог доказать, что все эти сингулярности обязательно возникнут. Из тех сингулярностей, которые удалось

идентифицировать Гамильтону, все, кроме одной, были устранимы – удалить их можно было при помощи методов топологической «хирургии», методики, разработанной и широко применяемой в четырехмерном пространстве. «Хирургические» процедуры весьма сложны, но при удачной реализации дают возможность убедиться в эквивалентности исследуемого пространства сфере, что и требовал Пуанкаре.

Однако существовал еще один тип сингулярностей, представляющих собой сигарообразные выступы, от которого Гамильтон подобным образом избавиться не сумел. Если бы он смог показать, что «сигары» в процессе трансформации многообразий не возникают, проблема сингулярностей стала бы намного яснее, что позволило бы сделать огромный шаг в направлении доказательства гипотез Пуанкаре и Тёрстона. Ключевым моментом, согласно идее Гамильтона, стало применение оценок Ли-Яу в случае любой, не обязательно положительной, кривизны многообразия. Он немедленно привлек меня к решению этой задачи, оказавшейся на удивление трудной. Однако нам все же удалось достичь некоторых результатов, и окончание всей работы казалось только вопросом времени.

Мы были весьма удивлены, когда в ноябре 2002 года в Интернете появилась первая из трех статей под авторством Санкт-Петербургского математика Григория Перельмана, посвященная геометрическим применениям методов потока Риччи. Менее чем через год на том же сайте были выложены вторая и третья статьи. В этих статьях Перельман задался целью «прояснить некоторые детали программы Гамильтона» и «дать краткий набросок доказательства гипотезы геометризации».³⁸ Он, так же как и Гамильтон, использовал неравенства Ли-Яу для контроля над поведением сингулярностей, хотя и ввел их несколько иным образом, добавив помимо этого много собственных нововведений.

В определенном смысле статьи Перельмана появились буквально из ниоткуда. Никто не знал, что Перельман когда-либо занимался проблемами, связанными с потоком Риччи, поскольку он был известен благодаря своим успехам в совершенно иной области математики – так называемой метрической геометрии, где он доказал знаменитую гипотезу, предложенную геометрами Джефом Чигером и Детлефом Громоллом. Но за несколько лет до появления в Интернете его статей Перельман надолго пропал из виду. Иногда другие математики получали от него электронные письма, в которых он интересовался литературой по вопросам потока Риччи. Однако никто не догадывался, что Перельман серьезно работает над использованием потока Риччи для доказательства гипотезы Пуанкаре, поскольку он практически никому не сообщал об этом. По сути дела его деятельность была столь незаметна, что многие из его бывших коллег сомневались в том, что он все еще вообще занимается математикой.

Сами по себе статьи были не менее поразительны – всего шестьдесят восемь страниц текста, – что привело к тому, что другим ученым пришлось потратить немало времени на то, чтобы понять их содержание и извлечь из них ключевые аргументы, кратко набросанные Перельманом. На сегодняшний день является общепризнанным, что программа исследований, начатая Гамильтоном и продолженная Перельманом, в конце концов привела к разрешению как давней гипотезы Пуанкаре, так и более свежей проблемы Тёрстона.

Если это единодушное признание действительно имеет под собой основу, то совместные успехи Гамильтона и Перельмана представляют собой важнейшее достижение геометрического анализа. Согласно моим расчетам, почти половина теорем, лемм и прочих вспомогательных утверждений, полученных в этой области на протяжении последних тридцати лет, были использованы в работах Гамильтона и Перельмана, что и привело в конце концов к доказательству гипотезы Пуанкаре.

Итак, вы увидели некоторые из тех гвоздей, которые по самые шляпки загнал в дерево молоток геометрического анализа. Однако вы, наверное, помните, что я обещал описать *три* важнейших достижения геометрического анализа. Успехи в области четырехмерной топологии и доказательство гипотезы Пуанкаре вместе с методами потока Риччи,

38 Grisha Perelman, “The Entropy Formula for the Ricci Flow and Its Geometric Applications,” November 11, 2002, <http://arxiv.org/abs/math/0211159v1>.

понадобившимися для ее доказательства, представляют собой только два из них. Остается еще и третье достижение – то, в котором я принял непосредственное участие и о котором пойдет речь далее.

Четвертая глава

Слишком хорошо, чтобы быть правдой

Третье важнейшее достижение, полученное при помощи нашего нового «молотка» – геометрического анализа, – относится к гипотезе, выдвинутой в 1953 году Эудженио Калаби, математиком, с 1964 года работающим в Пенсильванском университете. Эта гипотеза, как будет показано далее, стала ключевой в обсуждаемой области и оказала огромное влияние на всю мою дальнейшую научную карьеру. Я считаю своей особенной удачей то, что мне довелось наткнуться на идеи Калаби, точнее, налететь на них лбом – тогда еще не было принято носить шлемы. Конечно, каждый математик, достаточно талантливый и подготовленный, с большой вероятностью внесет определенный вклад в исследуемую им область, однако чтобы найти задачу, специально предназначенную для твоего таланта и образа мыслей, необходимо иметь еще и особое везение. В математике мне везло не один раз, но столкновение с гипотезой Калаби в этом отношении для меня является удачей из удач.

Задача имеет форму теоремы, связывающей топологию *комплексных пространств*, о которых мы поговорим далее, с их геометрией, или кривизной. Основная идея состоит в следующем. Возьмем некое необработанное топологическое пространство, представляющее собой что-то вроде пустого участка земли, специально расчищенного для предстоящего строительства. Соорудим на нем некую геометрическую структуру, которую впоследствии можно еще и декорировать различными способами. Вопрос, который задал Калаби, хотя и содержит некоторые оригинальные идеи, тем не менее принадлежит к тому типу вопросов, которые очень часто ставятся геометрами, а именно: какие из строго определенных геометрических структур допустимы для заданной топологии или, грубо говоря, для заданной формы объекта?

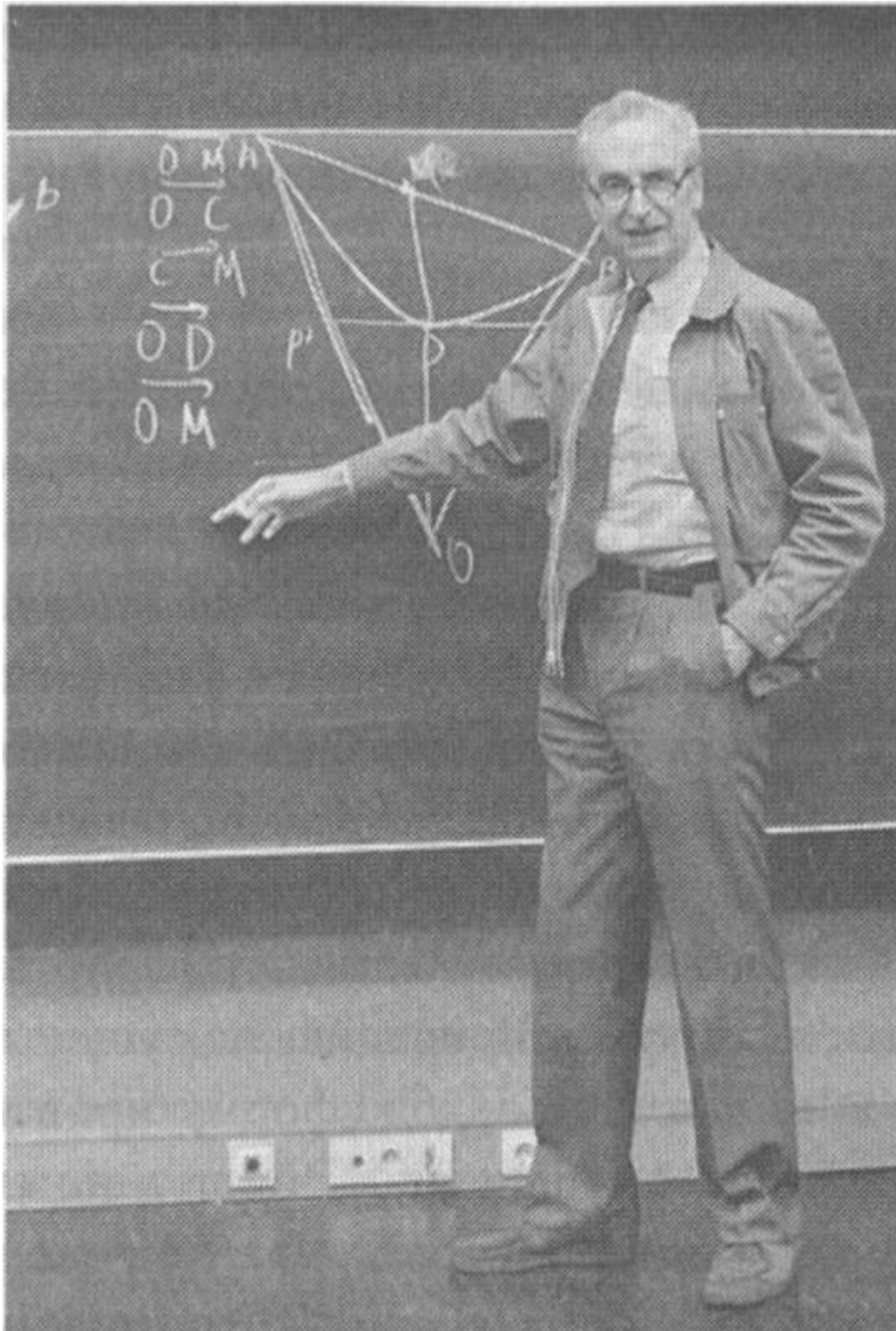


Рис. 4.1. Геометр Эудженио Калаби (фотография Дирка Феруса)

Ответ на этот вопрос едва ли покажется кому-либо имеющим важное значение для физики. Но посмотрим на него с другой стороны. Гипотеза Калаби касается пространств, имеющих особый тип кривизны, известный как кривизна Риччи, которая вкратце будет описана позже. Как оказалось, кривизна Риччи определенного пространства напрямую зависит от распределения материи в этом пространстве. Пространство, называемое *риччи-плоским* – кривизна Риччи которого равна нулю, – представляет собой пространство, материя в котором отсутствует. Рассматривая поставленный Калаби вопрос с этой точки

зрения, можно увидеть его непосредственную взаимосвязь с общей теорией относительности Эйнштейна: возможно ли существование гравитации во Вселенной, представляющей собой полностью лишенный материи вакуум? Если Калаби прав, то кривизна делает возможной гравитацию даже при отсутствии материи. Калаби сформулировал эту задачу в еще более общей форме, поскольку его гипотеза относилась к пространствам любой возможной размерности, а не только к четырехмерным, лежащим в основе общей теории относительности. Такая формулировка казалась мне наиболее правильной, так как она полностью согласовывалась с моим убеждением о том, что самые глубокие математические идеи в случае их истинности всегда находят применение в физике и должны проявлять себя в природе вообще.

Калаби утверждает, что, когда эта гипотеза впервые пришла ему в голову, «она совершенно не была связана с физическими представлениями. Это была чистая геометрия»³⁹. Я не сомневаюсь в истинности его слов. Это утверждение могло бы быть точно так же сформулировано, даже если бы Эйнштейну никогда не приходила в голову идея общей теории относительности. И доказательство этой гипотезы могло бы быть получено, даже если бы теории Эйнштейна не существовало. Впрочем, я уверен, что в то время, когда Калаби сформулировал свою задачу – почти через сорок лет после публикации Эйнштейном его революционных статей, – теория Эйнштейна была уже широко распространена. Едва ли найдется хотя бы один математик, который никогда не размышлял над физическими идеями Эйнштейна, пусть даже без какой-либо определенной цели. К тому времени уравнения Эйнштейна прочно связали искривление пространства и гравитацию, глубоко пустив корни в математику. Можно сказать, что общая теория относительности стала частью коллективного сознания или, наоборот, «коллективного бессознательного», – как сказал бы Юнг.

Безотносительно к тому, сознательно или бессознательно Калаби затрагивал физические проблемы, связь между его гипотезой и вопросами гравитации стала для меня важнейшим побудительным фактором, чтобы приняться за эту работу. Я понял, что доказательство гипотезы Калаби может стать важным шагом на пути к раскрытию какой-то глубокой тайны.

Вопросы, подобные тому, который поставил Калаби, часто формулируют в терминах метрики или геометрии пространства – набора функций, который позволяет определить длину любой траектории в соответствующем пространстве, – с этим понятием мы впервые столкнулись в первой главе. Всякое топологическое пространство способно принимать множество различных форм и, следовательно, обладать множеством всевозможных метрик. Одно и то же топологическое пространство может иметь форму куба, сферы, пирамиды или тетраэдра – геометрических тел, эквивалентных с топологической точки зрения. Вопрос, который затрагивает гипотеза Калаби, относящийся к разновидностям метрики, допустимым в данном пространстве, может быть переформулирован следующим эквивалентным образом: какие из геометрических форм возможны для пространств данной топологии?

Конечно, Калаби не использовал в точности такие термины, когда выдвигал свою гипотезу. Его цель состояла в том, чтобы узнать, будет ли определенный вид комплексного многообразия, а именно пространство, являющееся компактным, то есть имеющим ограниченную протяженность, и «кэлеровым» – удовлетворяющим определенным топологическим условиям (имеющим определенную характеристику, известную как «обращение в нуль первого класса Черна»), – иметь риччи-плоскую метрику. Нужно признать, что все ключевые составляющие данной гипотезы весьма сложны для непосредственного восприятия, поэтому определение всех понятий, необходимых для понимания утверждения Калаби, таких как комплексные многообразия, геометрия и метрика Кэлера, первый класс Черна и кривизна Риччи, – потребует определенных усилий.

На протяжении данной главы всем этим понятиям будет дано объяснение. При этом основной идеей гипотезы является возможность – с математической и геометрической точек зрения – существования пространств, удовлетворяющих всему этому сложному набору

39 Eugenio Calabi (University of Pennsylvania), interview with author, October 18, 2007.

требований.

Мне кажется, что такие пространства столь же редки, как алмазы, и гипотеза Калаби предоставляет карту, позволяющую их обнаружить. Зная, как решить уравнение для одного из многообразий и понимая общую структуру этого уравнения, при помощи той же идеи можно решить соответствующие уравнения для *всех* кэлеровых многообразий, удовлетворяющих заданным требованиям. Гипотеза Калаби предлагает существование общего правила, указывающего нам на то, что «алмазы» находятся именно в данном месте – или, иными словами, на то, что та метрика, которую мы ищем, существует. Даже если пока мы не способны увидеть ее во всей красе – мы не сомневаемся в том, что она действительно существует. Среди всех математических теорий эта казалась мне скрытым сокровищем – чем-то сродни неограненному алмазу.

Из этой идеи зародилась та работа, благодаря которой я получил сегодняшнюю известность. Можно сказать, что именно в этой работе я нашел свое истинное призвание. Вне зависимости оттого, в какой области мы работаем, мы все стремимся найти наше собственное призвание в жизни – то особое, для которого мы появились на этой земле. Для актера таким призванием может стать роль Стэнли Ковальски в пьесе Теннесси Уильямса «Трамвай “Желание”». Или заглавная роль в «Гамлете». Для пожарного это может быть победа над пожаром десятой категории сложности. Для криминалиста – поимка Врага Общества Номер Один. Ну а в математике найти свое призвание – значит найти ту задачу, работа над которой была предопределена тебе самой судьбой. Хотя, возможно, дело тут и не в судьбе. Может быть, достаточно просто наткнуться на задачу, которую ты можешь успешно решить.

Говоря откровенно, выбирая задачу для дальнейшей работы, я никогда особо не задумываюсь о том, какую роль в моей дальнейшей судьбе она может сыграть, напротив, в этих вопросах я стараюсь быть как можно более прагматичным. Моей целью является поиск новых направлений в математике, способных породить новые, неизвестные математические задачи, многие из которых и сами по себе будут интересны. Может оказаться и так, что меня заинтересует уже существующая проблема, если мне покажется, что ее решение может значительно раздвинуть горизонты той или иной области.

Гипотеза Калаби, известная к тому времени уже пару десятилетий, подходила именно под вторую категорию. Я обратил внимание на эту задачу на первом курсе аспирантуры, хотя порой мне казалось, что на самом деле это задача обратила на меня внимание. Ни одна из задач до того так не захватывала меня, как эта, поскольку я чувствовал, что ее решение может открыть дверь в совершенно новую область математики. Гипотеза Калаби отчасти затрагивала классическую проблему Пуанкаре, однако казалась мне более общей, так как из предположения Калаби следовало не только существование нового большого класса математических поверхностей и пространств, о которых до этого ничего не было известно, но и, возможно, она вела к новому пониманию пространства и времени. Для меня эта встреча с этой гипотезой была практически неизбежной: почти все дороги, по которым я двигался в своих первых исследованиях кривизны, неминуемо вели к ней.

Прежде чем приступить непосредственно к обсуждению доказательства данной гипотезы, необходимо для начала разобраться с упоминавшимися ранее понятиями, лежащими в ее основе. Гипотеза Калаби относится только к комплексным многообразиям. Понятие многообразия, как я уже говорил, аналогично понятию поверхности или пространства, но, в отличие от хорошо знакомых нам двухмерных поверхностей, многообразия могут иметь любую четную размерность, не обязательно равную двум. Ограничение по поводу четного значения размерности относится только к комплексным многообразиям, в общем случае многообразие может иметь как четную, так и нечетную размерность. По определению многообразия на малых или локальных участках имеют сходство с евклидовыми пространствами, но в больших, или так называемых *глобальных*, масштабах они демонстрируют заметное отличие. Так, к примеру, окружность представляет собой одномерное многообразие, и окрестность каждой из лежащей на ней точек можно

уподобить отрезку прямой. Но в целом окружность совершенно не похожа на прямую линию. Теперь добавим еще одно измерение. Мы живем на поверхности сферы, которая представляет собой двухмерное многообразие. Взглянув на достаточно малый участок земной поверхности, можно обнаружить, что он имеет практически идеально плоскую форму как диск или фрагмент плоскости, несмотря на то что в целом эта поверхность искривлена и, следовательно, неевклидова. Если теперь выбрать на поверхности участок значительно большего размера, то отклонение от евклидовости станет очевидным, что приведет к необходимости сделать поправки на кривизну.

Одной из важных особенностей многообразий является их *гладкость*. Это свойство прямо вытекает из их определения, поскольку из сходства каждого малого участка поверхности с евклидовым пространством напрямую следует гладкость поверхности во всех точках. Геометры говорят о гладкости многообразия даже в том случае, если оно имеет некоторое количество «странных» точек, в которых условие локальной евклидовости не выполняется – например, точка пересечения двух линий. Такие точки носят название *топологических сингулярностей*, поскольку их в принципе невозможно сгладить. Вне зависимости от того, насколько мала выбранная вокруг такой точки окрестность, пересечение все равно останется пересечением.

Подобные вещи постоянно встречаются в римановой геометрии. В начале преобразования объект может быть гладким и простым для исследований, но стоит нам приблизиться к определенному пределу – скажем, постепенно заостряя его форму или срезая углы, – и возникновение сингулярности станет неизбежным. Впрочем, геометры обычно столь либеральны в этом вопросе, что даже пространство, имеющее бесконечно большое число сингулярностей, в их глазах все равно остается многообразием – в этом случае они называют его *сингулярным пространством*, или *сингулярным многообразием*, и рассматривают как предельную форму гладкого многообразия. При этом вместо двух линий, пересекающихся в одной точке, чаще рассматривают плоскости, результатом пересечения которых будет линия.

Это и есть грубое определение понятия многообразия. Теперь что касается слова «комплексное». Комплексным называется такое многообразие, каждой точке которого можно сопоставить определенное комплексное число. Подобное число имеет вид $a + ib$, где a и b – действительные числа, а i – так называемая мнимая единица, определяемая как квадратный корень из -1 . Как и координаты точки на плоскости, которые можно изобразить на графике с двумя осями x и y , одномерные комплексные числа можно изобразить на графике с двумя осями, соответствующими вещественной и мнимой частям.

Комплексные числа полезны по нескольким причинам – прежде всего потому, что они дают возможность извлекать квадратные корни из отрицательных чисел. При помощи комплексных чисел можно решить квадратное уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ при помощи формулы, которую многие из вас учили в средней школе $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$ вне зависимости от того, какое значение имеют величины a , b и c . После того как комплексные числа введены, уже не нужно ломать руки в отчаянии, если дискриминант $b^2 - 4ac$ вдруг окажется отрицательным; несмотря на это, уравнение все равно будет иметь решение.

Комплексные числа важны, а иногда просто незаменимы для решения полиномиальных уравнений, содержащих одну или несколько переменных и постоянных. Задача, как правило, состоит в нахождении *корней* уравнения – точек, в которых значение полинома обращается в нуль. Если бы комплексных чисел не существовало, многие из подобных задач не имели бы решения. Наиболее простым примером является уравнение $x^2 + 1 = 0$, не имеющее вещественных корней. Данное равенство будет верным, то есть полином обратится в нуль, только в случае когда $x = i$ или $x = -i$.

Кроме того, комплексные числа важны для понимания волновых процессов, поскольку комплексная амплитуда содержит информацию не только об амплитуде, но и о фазе волны. Две волны, имеющие одинаковую амплитуду и частоту, могут либо совпадать по фазе, и тогда волны накладываются друг на друга и результирующая волна будет равна их сумме, либо не

совпадать – и тогда волны частично или полностью погасят друг друга. Если фаза и амплитуда волны выражены при помощи комплексного числа, то сложение двух волн сводится к сложению или умножению двух комплексных чисел. Выполнить этот расчет без привлечения комплексных чисел также возможно, но он будет намного сложнее, точно так же, как расчет движения планет в Солнечной системе можно произвести и в геоцентрической системе, но уравнения будут проще и изящнее, если поставить в центр физической картины Солнце, роль комплексных чисел в описании волновых процессов сделала их незаменимыми для физики. Так, в квантовой механике каждая элементарная частица может быть представлена в виде соответствующей волны. Квантовая механика в свою очередь является ключевым компонентом разнообразных теорий квантовой гравитации, претендующих на роль так называемых «теорий всего». С этой точки зрения возможность описывать волны при помощи комплексных чисел является заметным преимуществом.

Впервые комплексные числа были задействованы для вычислений в книге итальянского математика Джероламо Кардано, опубликованной в 1545 году. Однако роль комплексной геометрии как значимой дисциплины была признана только спустя три столетия. Человеком, который вывел комплексную геометрию на передний план математики, стал Георг Фридрих Бернхард Риман – архитектор первых подробно исследованных комплексных многообразий – так называемых *римановых поверхностей*. Эти поверхности приобретут особую важность в теории струн, созданной почти через сто лет после смерти Римана. Когда крошечная замкнутая *струна*, являющаяся основным элементом теории струн, движется в многомерном пространстве-времени, поверхность, которую она за собой, является римановой. Использование таких поверхностей для расчетов в рамках теории струн сделало их одними из наиболее исследованных поверхностей в современной теоретической физике. Теория римановых поверхностей существенно обогатилась от сотрудничества с теорией струн, поскольку полученные из физического описания уравнения весьма укрепили ее математическую часть.

Римановы поверхности, подобно обычным двумерным многообразиям, являются гладкими, но из их комплексной природы – они являются одномерными комплексными многообразиями – следует наличие у них дополнительной встроенной структуры. Одна особенность, автоматически следующая из комплексной природы поверхности, но не всегда присущая действительным поверхностям, состоит в том, что все окрестности поверхности связаны друг с другом определенным образом. Спроецировав небольшой фрагмент искривленной римановой поверхности на плоскость и затем проделав ту же операцию для всех окружающих его фрагментов, можно получить карту, похожую на ту, которая получается при изображении трехмерного глобуса в двухмерном географическом атласе мира. Если сделать подобную карту на основе римановой поверхности, то расстояния между различными объектами на этой карте будут искажены, однако углы между ними сохранятся. Та же идея – сохранение углов за счет искажения расстояний – использовалась и на появившихся в XVI столетии картах, основанных на проекции Меркатора, которые представляли земную поверхность не в виде сферы, а в виде цилиндра. Сохранение углов при так называемом конформном отображении земного шара на карте в те времена было необходимо для целей навигации и помогало капитанам кораблей держать выбранный курс. Использование конформного отображения существенно упрощает расчеты, относящиеся к римановым поверхностям, делая возможным для таких поверхностей доказательство многих утверждений, недоказуемых для поверхностей, не являющихся комплексными. Наконец, римановы поверхности, в отличие от обычных многообразий, должны быть ориентируемыми, а это означает, что способ определения направлений – ориентация системы координат – не зависит от местоположения точки на поверхности. Противоположная ситуация имеет место для ленты Мёбиуса – классического примера неориентируемой поверхности, в процессе перемещения по которой направления могут меняться местами – низ становится верхом, левое – правым, направление по часовой стрелке переходит в направление против часовой стрелки.

Переход от одного участка римановой поверхности к другому приводит к изменению системы координат, и только небольшая окрестность каждой из заданных точек имеет вид евклидова пространства. Эти небольшие участки нужно сшить вместе так, чтобы переход от одного из них к другому не приводил к изменению углов. Именно это и имеют в виду, когда называют подобные переходы, или «преобразования», *конформными*. Конечно, комплексные многообразия возникают и в измерениях с более высокой размерностью – римановы поверхности представляют собой только их одномерный вариант. Но вне зависимости от размерности, чтобы получить комплексное многообразие, необходимо должным образом соединить различные его участки или фрагменты. При этом для многообразий более высокой размерности в процессе перехода от одного участка к другому и от одной системы координат к другой углы не сохраняются. Строго говоря, такие преобразования уже не являются конформными, но представляют собой скорее обобщение одномерного случая.

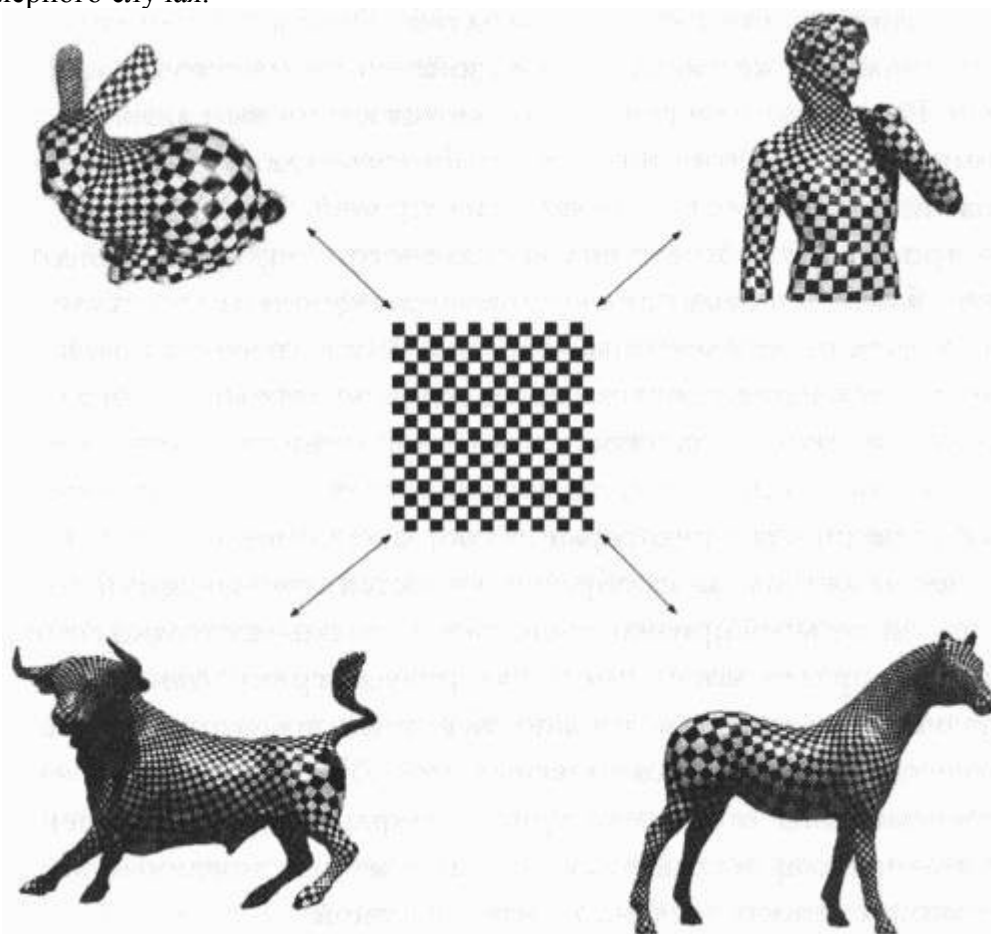


Рис. 4.2. Все эти двумерные поверхности – бык, кролик, Давид и лошадь – являются примерами римановых поверхностей, имеющих огромную важность в математике и теории струн. Можно нанести на эти поверхности узор в виде шахматной доски, выбирая точки на шахматной доске, подставляя их координаты в некую функцию и получая в результате точку на поверхности, например кролика. Однако полученная в результате шахматная доска не будет идеальной, если только ее не отобразили на поверхность двумерного тора, по причине присутствия на ней сингулярных точек, таких как северный и южный полюсы сферы, которые неизбежно возникают на поверхностях, эйлеровы характеристики которых (понятие эйлеровой характеристики будет подробно описано далее) не равны нулю. При этом, однако, процесс отображения является *конформным*, то есть углы – в том числе и прямые углы шахматной доски – при переходе от одной поверхности к другой всегда сохраняются. Несмотря на то что размеры объектов, таких как клетки шахматной доски, могут в результате оказаться искаженными, углы клеток все равно будут составлять ровно 90 градусов. Это свойство сохранения углов является одной из характерных особенностей римановых

поверхностей

Пространства, которые представил себе Калаби, были не только комплексными, но также имели особое свойство, называемое *кэлеровой метрикой*. Римановы поверхности являются кэлеровыми автоматически, поэтому данное понятие обретает смысл только для комплексных многообразий двух и более комплексных измерений. В кэлеровом многообразии пространство имеет вид евклидового в определенной точке и остается близким к нему при небольшом смещении, хотя и отклоняется от евклидовости определенным образом. Для того чтобы пояснить последнее утверждение, необходимо отметить, что это многообразие имеет вид не привычного плоского евклидового пространства, а так называемого «комплексного евклидового пространства», то есть оно имеет четную размерность и некоторые из координат, определяющие положение точек на данном многообразии, являются комплексными числами. Этот отличительный признак очень важен, поскольку только комплексные многообразия могут иметь кэлерову метрику. Данная метрика в свою очередь дает нам возможность помимо всего прочего измерять расстояния при помощи комплексных чисел. Условие Кэлера, названное в честь немецкого математика Эриха Кэлера, показывает степень близости заданного пространства к евклидовому на основании критериев, не связанных непосредственно с его кривизной.

Для того чтобы количественно оценить степень близости определенного многообразия к евклидовому пространству, необходимо знать его метрику. В плоском пространстве с взаимно перпендикулярными координатными осями для расчета расстояний можно использовать теорему Пифагора. В искривленных пространствах дело обстоит несколько сложнее, поскольку оси координат в этом случае могут уже не быть взаимно перпендикулярными, что приводит к необходимости использования модифицированной версии теоремы Пифагора. Для расчета расстояний в искривленных пространствах необходимо знать метрические коэффициенты – набор чисел, изменяющийся от точки к точке и зависящий от ориентации координатных осей. Выбор той или иной ориентации осей ведет к возникновению разных наборов метрических коэффициентов. При этом значение имеют не столько величины этих коэффициентов, которые во многом произвольны, сколько характер их изменения при переходе от одной точки многообразия к другой. Это дает возможность узнать положение различных точек по отношению друг к другу и таким образом свести воедино все, что касается геометрии данного многообразия. Как уже было сказано в предыдущих главах, для описания четырехмерного пространства необходимы десять метрических коэффициентов. На самом деле коэффициентов всего шестнадцать, поскольку метрический тензор в данном случае представляет собой матрицу 4×4 . Однако метрический тензор всегда симметричен относительно диагонали, проходящей из левого верхнего угла матрицы в правый нижний. Таким образом, четыре числа лежат непосредственно на диагонали матрицы и еще два одинаковых набора из шести чисел каждый лежат по разные стороны от нее. За счет наличия симметрии вместо шестнадцати чисел можно рассматривать только десять: четыре на диагонали и шесть – по одну сторону от нее.

Это, впрочем, еще не объясняет механизм работы метрики. Рассмотрим весьма простой пример, имеющий место для одного комплексного или двух вещественных измерений, – метрику Пуанкаре единичного круга, центр которого находится в точке плоскости с координатами $(0, 0)$. Этот круг представляет собой набор точек (x, y) , удовлетворяющих неравенству $x^2 + y^2 < 1$. Формально такой круг называют «открытым», поскольку он не включает в себя свою границу – окружность, определяемую выражением $x^2 + y^2 = 1$. Поскольку рассматриваемый случай относится к двум измерениям, тензор метрики Пуанкаре представляет собой матрицу 2×2 . В каждой из ячеек этой матрицы стоит коэффициент вида G_{ij} , где i – номер строки, j – номер столбца. Таким образом, матрица будет иметь вид:

$$\begin{matrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{matrix}$$

За счет симметрии, о которой шла речь выше, G_{12} будет равно G_{21} . Для метрики Пуанкаре эти два «недиагональных» элемента по определению равны нулю. Равенство двух других элементов – G_{11} и G_{22} не обязательно, но в случае метрики Пуанкаре оно имеет место: оба эти элемента по определению равны $4/(1-x^2-y^2)^2$. Любой паре координат x и y , выбранной внутри единичного круга, метрический тензор ставит в соответствие определенный набор коэффициентов. Так, например, для $x = 1/2$ и $y = 1/2$ элементы G_{11} и G_{22} будут оба равны 16, оставшиеся же два коэффициента равны нулю для любой точки единичного круга.

Что же делать дальше с полученными числами? И как эти коэффициенты соотносятся с расстоянием? Нарисуем внутри единичного круга небольшую кривую, однако рассмотрим ее не как неподвижный объект, а как траекторию частицы, движущейся из точки А в точку В. Чему же равна длина этой траектории для данной метрики Пуанкаре?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим кривую s и разделим ее на крошечные линейные участки – настолько крошечные, насколько это только можно представить, – и сложим их длины между собой. Длину каждого из линейных участков можно найти при помощи теоремы Пифагора. Для начала определим величины x , y и s параметрически, то есть представим их как функции времени: $x = X(t)$, $y = Y(t)$ и $s = S(t)$. Производные этих функций – $X'(t)$ и $Y'(t)$ – можно рассматривать как катеты прямоугольного треугольника; их подстановка в теорему Пифагора $\sqrt{[X'(t)]^2 + [Y'(t)]^2}$ дает значение производной $S'(t)$. Интегрирование от А до В позволяет определить длину всей кривой. В свою очередь каждый линейный сегмент представляет собой касательную к кривой, называемую в данном случае касательным вектором. Однако поскольку кривая находится на круге Пуанкаре, то перед интегрированием полученный результат нужно умножить на значение метрики $\sqrt{[X'(t)]^2 + [Y'(t)]^2} \times \sqrt{4/(1-x^2-y^2)^2}$, чтобы ввести поправку на кривизну.

Для дальнейшего упрощения полученной картины приравняем $Y(t)$ к нулю и таким образом ограничимся осью x . Затем начнем движение с постоянной скоростью вдоль оси x из точки 0 в точку 1. Если время также будет изменяться от 0 до 1, то уравнение движения будет иметь вид $X(t) = t$, и при $Y(t) = 0$, что предполагалось изначально, производная $X'(t) = 1$, поскольку производная от X в данном случае берется по отношению ко времени, а значение X всегда равно значению времени. Если представить производную в виде отношения, то последнее уравнение станет очевидным: в этом примере производная по X – это отношение изменения переменной X к изменению переменной X , а любое отношение такого вида – с одинаковым числителем и знаменателем – всегда равно 1.

Таким образом, пугающее своим видом выражение, полученное двумя абзацами выше, которое необходимо было каким-то образом проинтегрировать, чтобы получить из него длину, свелось к выражению $2/(1-x^2)$. Нетрудно заметить, что когда x стремится к единице, это отношение стремится к бесконечности, и точно так же стремится к бесконечности, или, как говорят математики, *расходится*, и его интеграл.

Важно отметить, что из стремления к бесконечности метрических коэффициентов – в данном случае G_{11} и G_{22} – еще не следует, что расстояние до границы также стремится к бесконечности. Но именно это имеет место в случае метрики Пуанкаре на единичном круге. Рассмотрим внимательнее, что происходит с этими значениями при движении в направлении от центра круга с течением времени. В начальной точке, где $x = 0$ и $y = 0$, оба коэффициента, G_{11} и G_{22} равны 4. Однако при приближении к границе круга, где сумма квадратов x и y близка к 1, метрические коэффициенты резко возрастают, как и длины тангенциальных векторов. К примеру, когда $x = 0,7$ и $y = 0,7$, G_{11} и G_{22} равны 10 000. При $x = 0,705$ и $y = 0,705$ значения коэффициентов будут больше 100 000; а для $x = 0,7071$ и $y = 0,7071$ – превысят 10 миллиардов. При приближении к границе круга эти коэффициенты будут не просто возрастать, но в конце концов устремятся к бесконечности – так же, как и расстояния до границы. Если бы вы были жуком, ползущим по поверхности в направлении границы круга, то, к величайшему огорчению, вы никогда бы ее не достигли. Впрочем, вы бы ничего

не потеряли, поскольку данная поверхность не имеет границы в принципе. Если поместить открытый единичный круг на плоскость, то он приобретет границу в виде единичной окружности, являющейся частью данной плоскости. Но сам единичный круг Пуанкаре границы не имеет, и любой жук, пытающийся до нее добраться, умрет, так и не осуществив своей мечты. Этот непривычный и, возможно, противоречащий интуиции факт является результатом отрицательной кривизны единичного круга, обусловленной метрикой Пуанкаре.

Мы потратили некоторое время на обсуждение понятия метрики, для того чтобы уяснить для себя сущность кэлеровой метрики и кэлерового многообразия – многообразия, оснащенного подобной метрикой. Определить, является ли та или иная метрика кэлеровой, можно, исследуя ее изменение при переходе от одной точки к другой. Кэлеровы многообразия являются подклассом комплексных многообразий, известных как *эрмитовы* многообразия. При помещении начала комплексной системы координат в любую точку эрмитового многообразия метрика будет совпадать со стандартной евклидовой метрикой для данной точки. Однако при смещении из этой точки метрика становится все более и более неевклидовой. Выражаясь более строго, при смещении из начала координат на расстояние ε (эпсилон) метрические коэффициенты сами по себе изменятся на величину порядка ε . Такие многообразия принято характеризовать как *евклидовы многообразия первого рода*. Таким образом, если ε составляет одну тысячную миллиметра, то при смещении на ε коэффициенты эрмитовой метрики останутся постоянными в пределах одной тысячной миллиметра или около того. Кэлеровы многообразия являются *евклидовыми многообразиями второго рода*, что означает еще большую стабильность их метрики; метрические коэффициенты на кэлеровом многообразии при смещении из начала координат на ε изменяются как ε^2 . Продолжая предыдущий пример, для кэлерова многообразия при смещении на $\varepsilon = 0,001$ мм метрика изменится на $0,000001$ мм.

Итак, что же побудило Калаби выделить кэлеровы многообразия как одни из наиболее интересных? Для того чтобы ответить на этот вопрос, следует рассмотреть все возможные варианты. Если требовать полной строгости, можно настаивать, к примеру, на том, чтобы многообразия были совершенно плоскими. Но совершенно плоскими являются только те компактные многообразия, которые имеют форму бубликов, торов и других близких к ним объектов, – что остается верным для любых размерностей, начиная от двух и выше. Тороидальные объекты просты для изучения, но их количество ограничено. Математикам интереснее исследовать более разнообразные объекты, дающие им более широкий спектр возможностей. С другой стороны, требования для причисления многообразий к категории эрмитовых слишком слабы – следовательно, число возможных объектов чрезвычайно велико. Кэлеровы многообразия, лежащие между эрмитовыми и плоскими, имеют как раз такой набор свойств, который нужен геометрам. Их структура достаточно развита, чтобы упростить работу с ними, но не настолько, чтобы ограничить математика в выборе многообразия, удовлетворяющего его спецификациям.

Другой причиной внимания к кэлеровым многообразиям стала возможность использования для их исследования методов, введенных Риманом, которые впоследствии использовал Эйнштейн. Эти методы работают на кэлеровых многообразиях, представляющих собой ограниченный класс эрмитовых многообразий, но в целом к эрмитовым многообразиям неприменимы. Мы крайне заинтересованы в возможности использования данных методов, поскольку их надежность была проверена еще в процессе разработки самим Риманом, кроме того, математики имели более столетия на их дальнейшее усовершенствование. Все это делает кэлеровы многообразия весьма привлекательным выбором, поскольку мы по сути уже имеем на руках технологию работы с ними.

Но и это еще не все. Данные многообразия заинтересовали Калаби из-за тех типов симметрии, которыми они обладают. Кэлеровы многообразия, как и все эрмитовы многообразия, обладают вращательной симметрией при умножении векторов на их поверхности на мнимую единицу i . Для случая одного комплексного измерения точки описываются парой чисел (a, b) , взятой из выражения $a + bi$. Допустим, что координаты $(a,$

b) определяют тангенциальный вектор, выходящий из начала координат. При умножении вектора на i его длина сохраняется, хотя сам вектор поворачивается на 90 градусов. Чтобы посмотреть на это вращение в действии, возьмем некую точку (a, b) или $a + bi$. Умножение на i даст в результате $ia - b$ или, что эквивалентно, $-b + ia$, что соответствует новой точке $(-b, a)$ на комплексной плоскости, определяющей вектор, ортогональный исходному и имеющий одинаковую с ним длину.

Можно легко убедиться в том, что эти вектора действительно перпендикулярны, нарисовав точки (a, b) и $(-b, a)$ на координатной плоскости и измерив углы между отрезками, выходящими из начала координат и заканчивающимися в данных точках. Операция, о которой идет речь, – преобразование координаты x в координату $(-y)$, а координаты y в координату x – носит название *J-преобразования*, которое на вещественной плоскости является аналогом умножения на i на комплексной. Дважды проведенное J-преобразование (или J^2) аналогично умножению вектора на -1 . Дальнейшее объяснение будет идти именно в терминах поворотов (J-преобразований), а не в терминах умножения на мнимую единицу, поскольку процесс преобразования проще представить – не важно, в голове или на бумаге – на вещественной, а не на комплексной координатной плоскости. При этом нужно не забывать, что J-преобразование является только удобной иллюстрацией комплексного умножения на i путем перехода к двумерным вещественным координатам.

Все эрмитовы многообразия имеют этот тип симметрии: J-преобразования поворачивают все вектора на 90 градусов, сохраняя их длины неизменными. Кэлеровы многообразия, представляющие собой подмножество эрмитовых многообразий, обладают такой же симметрией. Кроме того, кэлеровы многообразия обладают так называемой *внутренней симметрией* – специфическим типом симметрии, который должен сохраняться при перемещении между любыми двумя точками пространства с кэлеровой метрикой. Многие из видов симметрий, с которыми мы постоянно сталкиваемся в природе, относятся к группе вращений.

Сфера, к примеру, имеет *глобальную симметрию* – названную так, поскольку она работает относительно любой точки сферы. Одним из типов симметрии в данном случае является вращательная инвариантность, означающая, что при любом повороте сфера совпадает сама с собой. Симметрия кэлерова многообразия, с другой стороны, более локальна, поскольку она относится только к первым производным метрики. Однако благодаря методам дифференциальной геометрии, позволяющим осуществить интегрирование по всему многообразию, можно увидеть, что условие кэлеровости и связанная с ним симметрия подразумевают особое отношение между различными точками. Таким образом, симметрия, изначально охарактеризованная как локальная, при помощи интегрального исчисления приобретает более глобальную роль связующего звена между различными точками многообразия.

Основная проблема данного типа симметрии относится к особой разновидности преобразования, называемой *параллельным переносом*. Параллельный перенос, как и операция поворота, является линейным преобразованием: это преобразование подразумевает такое перемещение векторов вдоль определенной траектории на поверхности или многообразии, при котором сохраняются не только длины всех векторов, но и углы между любой парой векторов. В тех случаях, когда параллельный перенос сложно представить наглядно, точный путь перемещения векторов можно рассчитать при помощи метрики, решая дифференциальные уравнения.

На плоской, евклидовой поверхности все очень просто: нужно только сохранять направление и длину каждого вектора. На искривленных поверхностях и для произвольных многообразий условие постоянства длин и углов сохраняется, хотя и несколько усложняется по сравнению с евклидовым пространством.

Особенность кэлерова многообразия состоит в следующем: если при помощи операции параллельного переноса переместить вектор V из точки P в точку Q вдоль заданной траектории, то результатом этого перемещения станет новый вектор W_1 . Применив к вектору

операцию поворота на 90 градусов (J-операцию), мы получим новый вектор JW_1 . С тем же успехом можно сначала применить к вектору V операцию поворота (J-операцию), в результате которой возникнет новый вектор JV , по-прежнему начинающийся в точке P . Если после этого параллельно перенести вектор JV в точку Q и полученный вектор назвать W_2 , то в случае кэлерова многообразия векторы JW_1 и W_2 будут идентичны вне зависимости от пути перемещения между точками P и Q . Можно сказать, что на кэлеровом многообразии J-операция инвариантна относительно параллельного переноса. Для комплексных многообразий в общем случае это не так. Можно сформулировать это условие и в другом виде: на кэлеровом многообразии параллельный перенос вектора с последующим его поворотом аналогичен повороту вектора с последующим параллельным переносом. Эти две операции коммутируют – поэтому не имеет значения, в каком порядке их выполнять. В общем случае это не так, как наглядно объяснил Роберт Грин: «Открыть дверь и затем выйти из дому – это далеко не то же самое, что выйти из дому и лишь затем открыть дверь».

Основная идея параллельного переноса проиллюстрирована на рис. 4.3 для поверхности с двумя вещественными измерениями или одним комплексным (поверхность с большим числом измерений нарисовать проблематично). Впрочем, этот случай скорее тривиален, поскольку число возможных направлений поворота ограничено числом два: влево и вправо.

Однако уже для двух комплексных измерений (четырех вещественных) число векторов определенной длины, перпендикулярных любому заданному вектору, бесконечно велико. Эти векторы образуют касательное пространство, которое в двухмерном случае можно представить как огромный кусок фанеры, лежащий на верхушке баскетбольного мяча. В этом случае знание того, что необходимый нам вектор перпендикулярен некоему другому, известному нам, едва ли заметно упростит его нахождение – если только многообразие, которому он принадлежит, не является кэлеровым. Для кэлерова многообразия, зная вектор, полученный при повороте на 90 градусов (J-преобразовании) в одной из точек многообразия, можно точно предсказать величину и направление подобных векторов в любой другой точке, поскольку параллельный перенос дает возможность переместить этот вектор из первой точки во вторую.

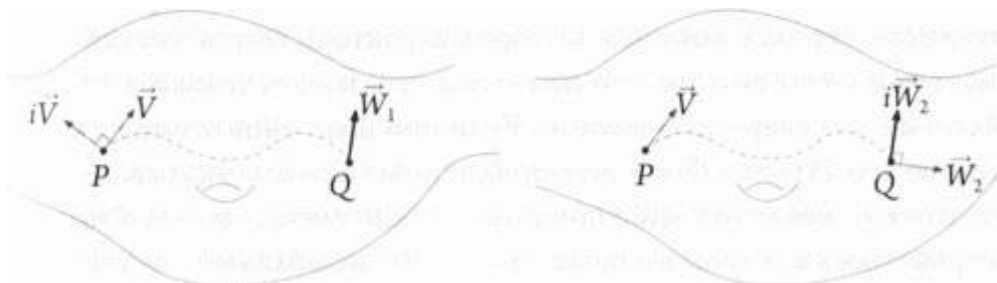


Рис. 4.3. На первом рисунке изображен параллельный перенос вектора V из точки P в точку Q , в которой этот вектор приобретает новое имя W_1 . Затем при помощи так называемой J-операции вектор W_1 поворачивается на 90 градусов. Повернутый вектор носит название JW_1 . На втором рисунке J-операция проводится над вектором V в точке P , результатом которой становится новый вектор (повернутый на 90 градусов) – JV . При помощи параллельного переноса этот вектор перемещают в точку Q , где он получает новое имя W_2 . В обоих случаях результирующие векторы будут одинаковы. Это один из признаков кэлерова многообразия, а именно независимость результата от последовательности, в которой выполняются операции поворота и параллельного переноса. Эти две операции коммутируют, то есть порядок их выполнения не имеет значения.

Существует еще один способ показать, что эта простая операция (поворот на 90 градусов, или J-преобразование) тесно связана с симметрией. Этот тип симметрии называется *четырёхкратной симметрией*, поскольку при каждом J-преобразовании вектор поворачивается на 90 градусов. В результате четырех последовательных преобразований вектор повернется на 360 градусов и, пройдя полный круг, вернется в начальную точку.

Иначе говоря, два J-преобразования аналогичны умножению на -1 . Четыре преобразования приведут к умножению вектора на единицу ($-1 \times -1 = 1$). В результате мы вернемся к тому, с чего начали.

Очевидно, что данная симметрия применима только к касательному пространству в определенной точке, но для того чтобы это свойство было действительно полезным, четырехкратная симметрия должна сохраняться и при перемещении по всему пространству. Эта согласованность является важной особенностью внутренней симметрии. Представьте себе стрелку компаса, которая характеризуется двухкратной симметрией в том смысле, что она может указывать только в двух направлениях – северном и южном. Если при вращении компаса в пространстве его стрелка будет беспорядочным образом указывать то на север, то на юг без какой-либо причины, можно сделать вывод о том, что пространство, в котором вы находитесь, либо не обладает соответствующей симметрией, либо не имеет заметного магнитного поля (либо вам пора покупать новый компас). Аналогично, если J-операция дает разные результаты в зависимости от положения точки на многообразии и направления поворота, то это означает, что в многообразии отсутствуют порядок и предсказуемость, обеспечиваемые симметрией. Более того, вы можете быть уверены, что это многообразие не кэлерово.

Внутренняя симметрия, во многом определяющая кэлеровы многообразия, ограничена касательным пространством к данным многообразиям. Это может иметь определенные преимущества, поскольку на касательном пространстве результат любой операции не зависит от выбора системы координат. Именно это свойство – независимость результатов операции от выбора системы координат – представляет чрезвычайный интерес как с геометрической, так и с физической точки зрения. Проще говоря, если результаты зависят от выбора ориентации осей или начала координат, то для нас они неинтересны.

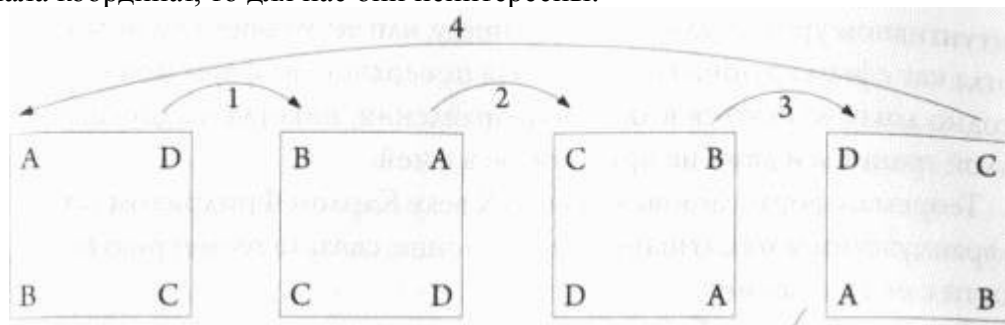


Рис. 4.4. На рисунке проиллюстрирован простой и весьма очевидный факт: квадрат имеет четырехкратную симметрию относительно его центра. Иными словами, повернув квадрат четыре раза на 90 градусов, мы получим исходную фигуру. Поскольку J-операция представляет собой поворот на 90 градусов, она также имеет четырехкратную симметрию, и четыре поворота приведут к исходному объекту. Формально говоря, J-операция действует только на касательные векторы, поэтому она – весьма грубый аналог вращения фигуры, подобной квадрату. J-преобразование, как обсуждается в тексте, является вещественным аналогом умножения на i . Умножение некоего числа на i четыре раза равноценно умножению его на единицу, и оно, подобно проведенной четыре раза J-операции, неизбежно приведет к тому числу, с которого мы начали

Требование внутренней симметрии наложило на представленный Калаби математический мир ряд дополнительных ограничений, значительно упростив его и сделав проблему доказательства его существования потенциально разрешимой. Впрочем, Калаби не обратил внимания на некоторые другие следствия из его теории; на самом деле внутренняя симметрия, наличие которой он предположил для своих многообразий, является особой разновидностью суперсимметрии, что особенно важно для теории струн.

Последние два фрагмента нашей мозаики – классы Черна и кривизна Риччи – возникли из попыток геометров обобщить одномерные римановы поверхности на случай многих

измерений и затем попытаться математически описать различия между ними. Это привело к возникновению важной теоремы, относящейся к компактным римановым поверхностям, – как, впрочем, и ко всем компактным поверхностям, не имеющим границ. Определение *границы* в топологии дается скорее на интуитивном уровне: диск имеет границу, или четко определенный край, тогда как сфера границы не имеет. На поверхности сферы можно сколь угодно долго двигаться в любом направлении, никогда не достигая никакой границы и даже не приближаясь к ней.

Теорема, сформулированная в XIX веке Карлом Фридрихом Гауссом и французским математиком Пьером Бонне, связала геометрию поверхности с ее топологией.

Согласно формуле Гаусса-Бонне, общая гауссова кривизна подобных поверхностей равна произведению эйлеровой характеристики поверхности на 2π . Эйлерова характеристика, обозначаемая греческой буквой χ («хи»), в свою очередь равна $2-2g$, где g – это род (число «дырок» или «ручек» на данной поверхности). К примеру, эйлерова характеристика двумерной сферы, не имеющей дырок, будет равна 2. Эйлер вывел отдельную формулу для нахождения эйлеровых характеристик любого многогранника: $\chi = V - E + F$, где V – число вершин, E – число ребер, а F – число граней. Для тетраэдра $\chi = 4 - 6 + 4 = 2$, точно так же, как и для сферы. Для куба, имеющего 8 вершин, 12 ребер и 6 граней, $\chi = 8 - 12 + 6 = 2$ – снова то же, что и для сферы. Причина того, что эти топологически идентичные (хотя и геометрически различные) объекты имеют одинаковую величину заключается в том, что эйлеровы характеристики всецело определяются топологией объекта и не зависят от его геометрии. Эйлерова характеристика χ стала первым из основных *топологических инвариантов пространства* – величин, остающихся неизменными – *инвариантными* – для пространств, имеющих совершенно различный внешний вид, подобно являющимся топологически эквивалентными сфере, тетраэдру и кубу.

Вернемся к формуле Гаусса-Бонне. Общая гауссова кривизна двумерной сферы будет равна $2\pi \times 2$, или 4π . Кривизна двумерного тора равна нулю, поскольку в нем имеется одна дырка и, следовательно, $\chi = 2 - 2g = 2 - 2 = 0$. Обобщение принципа Гаусса-Бонне на случай большего числа измерений приводит к возникновению так называемых *классов Черна*. Классы Черна были созданы моим руководителем и наставником Ч. Ш. Черном как весьма грубый математический метод охарактеризовать различия между многообразиями. Говоря простыми словами, многообразия, для которых имеются разные классы Черна, не могут быть одинаковы, хотя обратное верно далеко не всегда: многообразия могут иметь один и тот же класс Черна и при этом оставаться различными.

Для имеющих одно комплексное измерение римановых поверхностей существует только один класс Черна, а именно первый, в данном случае совпадающий с эйлеровой характеристикой. Количество классов Черна для конкретного многообразия зависит от количества измерений. К примеру, многообразие с двумя комплексными измерениями имеет первый и второй классы Черна. Многообразия, представляющие большой интерес для теории струн – обладающие тремя комплексными (или шестью вещественными) измерениями, – имеют три класса Черна. В этом случае первый класс Черна приписывает двумерным подпространствам шестимерного многообразия (их можно представить как набитую двумерными листами бумаги трехмерную комнату) определенные целые коэффициенты. Второй класс Черна присваивает коэффициенты четырехмерным подмногообразиям шестимерного пространства. Третий класс присваивает определенное число, а именно эйлерову характеристику χ , всему многообразию, имеющему три комплексные размерности и шесть вещественных. Для многообразий, имеющих n комплексных измерений, последний класс Черна – n -й класс – всегда равен эйлеровой характеристике.

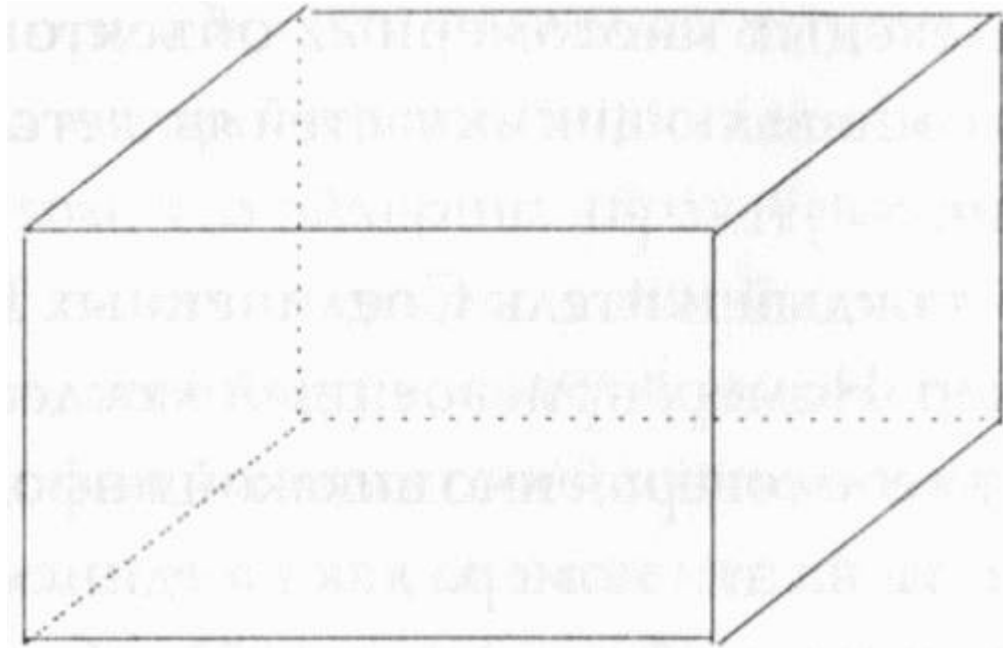


Рис. 4.5. Ориентируемая (двухсторонняя) поверхность в топологии описывается при помощи ее эйлеровой характеристики, или числа Эйлера. Для многогранника, являющегося геометрическим телом с плоскими гранями и прямыми ребрами, эйлерову характеристику можно рассчитать по простой формуле. Эйлерова характеристика, которая обозначается греческой буквой χ (хи), равна числу вершин минус число ребер плюс число граней. Для прямоугольной призмы или «коробки» в этом примере число Эйлера равно двум. Для тетраэдра это число также равно двум ($4-6+4$), как и для пирамиды с квадратным основанием ($5-8+5$). Нет ничего удивительного в том, что эти пространства имеют одинаковые эйлеровы характеристики, поскольку они топологически эквивалентны

$$\begin{aligned}
 V &= 8 \\
 E &= 12 \\
 F &= 6 \\
 \chi &= V - E + F = 2
 \end{aligned}$$

Но что в действительности означает класс Черна? Иными словами, Для чего нужны все эти числа, которые ставятся в соответствие подмногообразиям? Как оказалось, о подмногообразиях самих по себе данные коэффициенты не сообщают ничего особо важного, но многое могут рассказать о тех многообразиях, частями которых они являются. Исследование структуры комплексных многомерных объектов путем определения количества и типов составляющих их частей является общепринятой практикой в топологии.

Представим, к примеру, что каждый житель Соединенных Штатов получил свой собственный номер. Номер, присвоенный каждому конкретному человеку, не содержит в себе совершенно никакой информации о нем или о ней. Но если взглянуть на эти номера как на единое целое, то можно много интересного узнать про более крупный «объект» – а именно Соединенные Штаты – например, про численность населения этой страны или скорость его роста.

Вот еще один пример, позволяющий наглядно представить это весьма абстрактное понятие. Как обычно, начнем рассмотрение с весьма простого объекта, а именно сферы – поверхности, имеющей одно комплексное или два вещественных измерения. Сфера имеет только один класс Черна, который в данном случае равен эйлеровой характеристике. Во второй главе, как вы помните, обсуждались некоторые особенности метеорологии и динамики морских течений на планете сферической формы. Представим теперь, что в каждой точке данной планеты с запада на восток дует ветер. Точнее, почти в каждой точке.

Представить ветер, дующий в восточном направлении, на экваторе или на любой параллели, не составит никакого труда. Однако в двух точках, лежащих; на северном и южном полюсах, которые можно назвать сингулярными, ветра не будет вовсе – это неизбежное следствие сферической геометрии. Для поверхностей, обладающих подобными особыми точками, первый класс Черна не равен нулю. Иными словами, в данном случае первый класс Черна является *неисчезающим*.

Теперь рассмотрим бублик. Ветры на подобной поверхности могут дуть в любом направлении – по большим окружностям вокруг дырки, по малым окружностям через дырку или даже по более сложным спиральным траекториям, никогда не сталкиваясь с точкой сингулярности, в которой они должны остановиться. Можно совершить сколь угодно оборотов вокруг бублика, ни разу не натолкнувшись на какое-либо препятствие.

Рассмотрим следующий пример. Для так называемых КЗ поверхностей, имеющих два комплексных или четыре вещественных измерения, первый класс Черна обращается в нуль. Более подробно КЗ поверхности будут рассмотрены в шестой главе. Согласно гипотезе Калаби, именно это свойство должно позволить им иметь риччи-плоскую метрику, подобно тору. Однако в отличие от двухмерного тора, эйлерова характеристика которого равна нулю, величина χ для КЗ поверхности равна 24. Дело в том, что эйлерова характеристика и первый класс Черна, совпадающие в случае одного комплексного измерения, для более высоких размерностей могут заметно отличаться.

Следующим пунктом в нашем списке является кривизна Риччи – ключевое понятие для понимания гипотезы Калаби. Кривизна Риччи является обобщением более конкретного понятия, известного как *кривизна в двухмерном направлении*. Для того чтобы понять, как с ней работать, представим себе простую картину: сферу и касательное к ней пространство – плоскость, касающуюся сферы в точке северного полюса. Эта плоскость, перпендикулярная прямой, соединяющей центр сферы и точку касания, содержит в себе все касательные вектора, которые можно построить из данной точки сферы. Аналогично, трехмерная поверхность имеет трехмерное касательное пространство, состоящее из всех векторов, являющихся касательными к данной точке, – и так для любого числа измерений. Каждый вектор, лежащий на касательной плоскости, также является касательным к большой окружности сферы, проходящей через северный и южный полюса. Если теперь взять все большие окружности, касательные к векторам плоскости и объединить их, то результатом будет новая двухмерная поверхность. В данном случае двухмерная поверхность, полученная таким образом, совпадет с первоначальной сферой, но для более высоких размерностей подобная поверхность будет представлять собой двухмерное подмногообразие, находящееся в пределах другого, большего по размерам пространства. Кривизна касательной плоскости в двухмерном направлении будет совпадать с гауссовой кривизной полученной двухмерной поверхности.

Для того чтобы найти кривизну Риччи, возьмем некую точку на многообразии и найдем касательный вектор, проходящий через нее. Затем обратим внимание на все касательные двухмерные плоскости, содержащие данный вектор, каждая из которых имеет свою собственную кривизну в двухмерном направлении, которая, как уже было сказано, совпадает с гауссовой кривизной связанной с ней поверхности. Кривизна Риччи представляет собой среднее значение кривизны всех этих плоскостей. Многообразие можно считать риччи-плоским, если для любого произвольно выбранного вектора среднее кривизны касательных плоскостей в двухмерном направлении равно нулю, даже если для каждой отдельной плоскости это условие не выполняется.

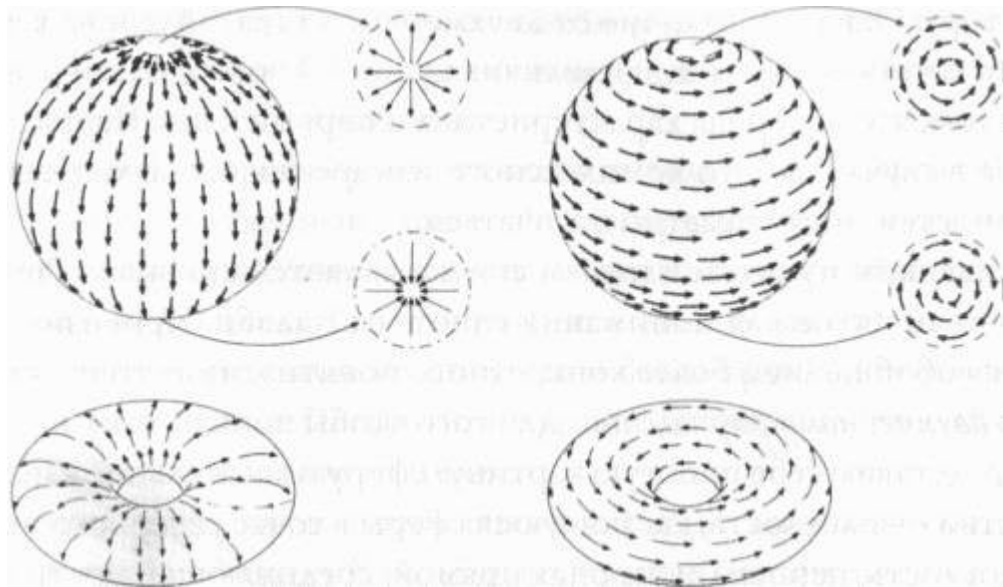


Рис. 4.6. *Первый класс Черна* для двумерных поверхностей, подобной этой, совпадающий с эйлеровой характеристикой, относится к точкам, в которых поток векторного поля полностью останавливается. На поверхности сферы, например глобуса, таких точек две. К примеру, если течение направлено с северного полюса на южный, как на изображенной слева сфере, то на каждом из полюсов суммарный поток будет равен нулю, поскольку в данных точках векторы будут взаимно компенсировать друг друга. Аналогично, если течение направлено с запада на восток, как на сфере, изображенной справа, также возникнут две точки остановки движения – на северном и южном полюсах, – в которых ничто не движется, поскольку само понятие востока и запада для этих точек отсутствует. Противоположным примером является поверхность бублика, на которой жидкость может течь как в вертикальном (на изображенном слева бублике), так и в горизонтальном направлении (на бублике, изображенном справа), не встречая при этом ни малейших препятствий. Именно поэтому первый класс Черна равен нулю для бублика, в котором сингулярные точки отсутствуют, но не равен нулю для сферы

Как вы уже могли догадаться, это означает, что ранее рассмотренный пример с двумерной сферой, через северный полюс которой проходит касательный вектор, совершенно нам неинтересен, поскольку данный вектор содержится только в одной касательной плоскости. В этом случае кривизна Риччи представляет собой просто кривизну в двумерном направлении этой плоскости, которая, в свою очередь, совпадает с гауссовой кривизной сферы, – для сферы единичного радиуса эта кривизна будет равна единице. Но при переходе к более высоким размерностям, число комплексных измерений для которых больше одного или число вещественных измерений больше двух, возникает весьма широкий выбор касательных плоскостей, и, как следствие, многообразие может быть риччи-плоским, не будучи при этом плоским во всех своих точках, то есть, будучи риччи-плоским, оно может иметь отличную от нуля кривизну в двумерном направлении и отличную от нуля гауссову кривизну.

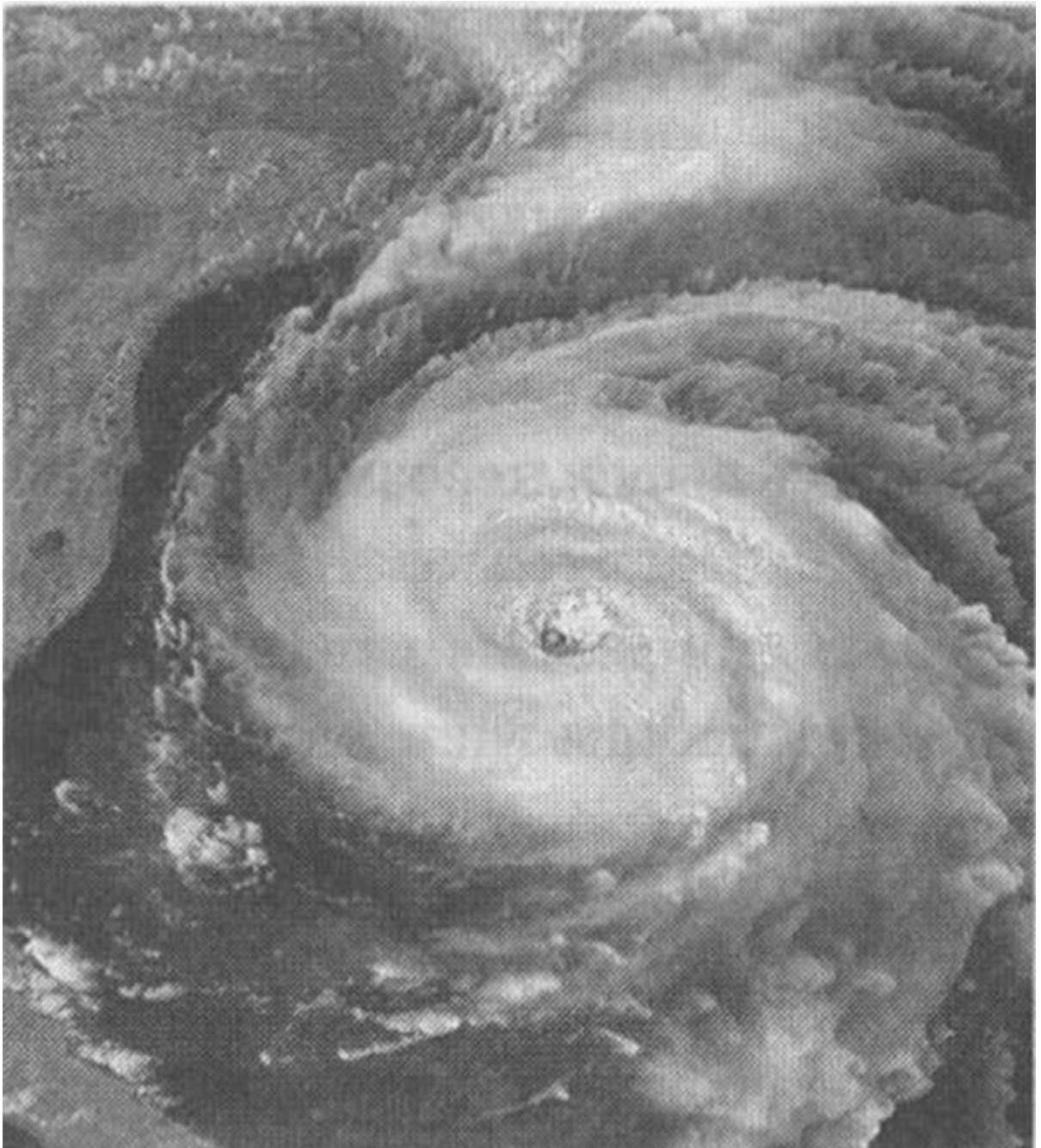


Рис. 4.7. Определение первого класса Черна для конкретного объекта сводится к нахождению точек, в которых поток векторного поля обращается в нуль. Подобные точки можно обнаружить в центре воронки, например в центре урагана, который представляет собой имеющую круговую форму область спокойной погоды, от 2 до 200 миль в диаметре, окруженную одними из наиболее грандиозных атмосферных явлений. На фотографии запечатлен ураган Фран 1996 года, как раз перед тем, как он опустошит Восточное побережье Соединенных Штатов, принеся миллиарды долларов убытка (фотография Хаслера, Честера, Грисволда, Пирса, Паланнаппана, Маньина, Суммея, Стара, Кенитцера & де Да Бюжардере, Лаборатория по изучению атмосферы, Центр космических полетов доктора Годдарда, НАСА)

Кривизна в двухмерном направлении полностью определяет риманову кривизну, которая, в свою очередь, содержит в себе всю возможную информацию о кривизне поверхности. В четырехмерном случае для описания кривизны необходимы двадцать чисел, для более высоких размерностей – еще больше. Тензор римановой кривизны может быть представлен в виде суммы двух слагаемых – тензора Риччи и так называемого тензора Вейля, на котором мы подробно останавливаться не будем. Главное, что из двадцати чисел,

необходимых для описания римановой кривизны в четырехмерном случае, десять описывают кривизну Риччи и десять – кривизну Вейля.

Тензор кривизны Риччи, являющийся ключевым составляющим известного уравнения Эйнштейна, характеризует влияние материи и энергии на геометрию пространства-времени. По сути дела, левая часть этого уравнения представляет собой так называемый тензор Эйнштейна – модифицированный тензор Риччи, тогда как в правой части находится *тензор энергии-импульса*, описывающий плотность и поток материи в пространстве-времени. Иными словами, уравнение Эйнштейна связывает поток плотности материи и импульс в данной точке пространственно-временного континуума с тензором Риччи. Поскольку тензор кривизны Риччи является только частью общего тензора кривизны, как уже говорилось выше, невозможно определить кривизну в целом только на основании этого тензора. Надежду на определение кривизны пространства-времени дает нам знание глобальной топологии.

В частном случае, когда масса и энергия равны нулю, уравнение сводится к следующему: тензор Эйнштейна = 0. Это так называемое уравнение Эйнштейна для вакуума, и хотя на первый взгляд оно может показаться простым, не следует забывать, что это уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных, которые почти никогда не решаются просто. Более того, уравнение Эйнштейна для вакуума на самом деле представляет собой систему из десяти нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, поскольку тензор состоит из десяти независимых коэффициентов. Это уравнение очень похоже на гипотезу Калаби, которая предполагает равенство нулю кривизны Риччи. Нет ничего особо удивительного в том, что оно имеет так называемое *тривиальное* решение, которое не представляет никакого интереса: пространственно-временной континуум, в котором нет ни материи, ни гравитации и в котором в принципе ничего не происходит. Однако существует и более интригующая возможность и именно о ней идет речь в гипотезе Калаби: может ли уравнение Эйнштейна для вакуума также иметь и *нетривиальное* решение? И ответ на этот вопрос, как мы увидим в свое время, утвердительный.

Вскоре после того, как Черн в середине 1940-х годов сформулировал понятие классов Черна, он показал, что для многообразий с кривизной Риччи, равной нулю, то есть для многообразий определенной геометрии, первый класс Черна также должен обращаться в нуль. Калаби представил проблему в другом виде, задавшись вопросом, насколько топологические особенности пространства определяют его геометрию или, точнее, позволяют пространству иметь ту или иную геометрию. Обратное верно далеко не всегда. К примеру, известно, что гладкая поверхность, то есть не имеющая углов, гауссова кривизна которой больше единицы, должна быть ограниченной или компактной. Она не может простирается до бесконечности. Но в общем случае компактные гладкие поверхности не обязательно имеют метрику с гауссовой кривизной больше единицы.

Например, бублик является совершенно гладким и компактным, однако его гауссова кривизна далеко не везде положительна, не говоря уже о том, что она далеко не всегда больше единицы. На самом деле, как уже обсуждалось ранее, метрика с гауссовой кривизной, равной нулю, вполне возможна, а метрика, кривизна которой всюду положительна, – нет.

Таким образом, гипотеза Калаби столкнулась с двумя большими затруднениями: из того, что эта гипотеза представляла собой утверждение, обратное общеизвестному факту, еще не следовала ее истинность. И даже при условии ее истинности, доказать существование метрики, удовлетворяющей всем необходимым требованиям, чрезвычайно сложно. Подобно гипотезе Пуанкаре, появившейся ранее, гипотезу Калаби, точнее важный частный случай этой гипотезы, можно сформулировать одним предложением: «Компактное кэлерово многообразие, в котором первый класс Черна обращается в нуль, может иметь риччи-плоскую метрику». Однако для доказательства этого простого утверждения потребовалось более двух десятилетий. Ну а работа над всеми возможными следствиями из данного утверждения продолжается уже несколько десятилетий после его доказательства.

Как заметил Калаби: «Я изучал кэлерову геометрию и понял, что пространство, которое может иметь по крайней мере одну кэлерову метрику, может также иметь и другие кэлеровы метрики. Найдя одну из них, не составит труда найти и прочие. Моей целью было нахождение такой метрики, которая была бы лучше всех остальных – более “округлая”, если так можно выразиться, – та, которая дает больше всего информации и сглаживает все неровности многообразия». Таким образом, гипотеза Калаби, по его словам, посвящена тому, как найти «лучшую» метрику.⁴⁰

Можно выразить это словами Грина: «Мы пытаемся найти ту единственную метрику, которую дал нам Бог».⁴¹

Лучшей с геометрической точки зрения иногда является так называемая «однородная» метрика. В этом случае, зная свойства одной из частей поверхности, можно сделать выводы о поверхности в целом. Благодаря постоянной кривизне и постоянной кривизне в двухмерном направлении, сфера представляет собой пример однородной метрики. Обладая совершенной симметрией, сфера со всех сторон выглядит одинаково, в отличие, например, от футбольного мяча, имеющего на поверхности швы и неровности. В то время как для сферы однородность метрики при положительной кривизне является возможной, многообразия Калаби-Яу, имеющие более одного комплексного измерения, могут характеризоваться постоянной кривизной в двухмерном направлении только в том случае, если они являются совершенно плоскими, – в этом случае кривизна в двухмерном направлении всюду равна нулю. Если не рассматривать этот вариант, то, по словам Калаби, «лучшим из остающихся вариантов будет попытка сделать кривизну настолько постоянной, насколько это только возможно».⁴² Лучшее, что нам удалось, – сделать постоянной кривизну Риччи, точнее, приравнять ее к нулю.

Гипотеза Калаби в целом является более общим утверждением и не ограничивается случаем равенства нулю кривизны Риччи. Случай постоянной кривизны Риччи также очень важен, особенно случай постоянной отрицательной кривизны, который использовался мной для решения некоторых важных проблем алгебраической геометрии, – о чем пойдет речь в шестой главе. Однако случай нулевой кривизны Риччи особо важен, поскольку кривизна в данном случае не просто постоянна, а равна нулю. А это, в свою очередь, порождает особую проблему – задачу нахождения метрики для многообразия или класса многообразий, которые, будучи близки к совершенству, тем не менее интересны с геометрической точки зрения.

В этом и состояло препятствие. Через два десятилетия после того, как Калаби сформулировал свое утверждение, очень немногие из математиков – как, впрочем, и сам автор гипотезы – верили в ее истинность. По сути, она была слишком хороша, чтобы быть истинной. Я также находился в рядах скептиков, но, не желая оставаться далее на вторых ролях, скрывал свои сомнения. С другой стороны, я горел желанием доказать ее неверность.

Пятая глава

Доказывая Калаби

Математическое доказательство чем-то напоминает восхождение на гору. На первом этапе, конечно, требуется найти гору, которая стоила бы восхождения. Представьте себе отдаленную пустынную местность, где еще не ступала нога человека. В наши дни такую местность обнаружить непросто, не говоря уже о том, удастся ли там найти что-то стоящее. Затем альпинист разрабатывает план, как добраться до вершины, который кажется ему безупречным, по крайней мере, на бумаге. После приобретения нужных инструментов и оборудования, а также необходимых навыков, авантюрист приступает к восхождению, однако останавливается, столкнувшись с неожиданными трудностями. Но те, кто пойдет по его

40 Robert Greene, interview with author, April 17, 2008.

41 Robert Greene, interview with author, June 24, 2008.

42 Eugenio Calabi, interview with author, October 18, 2007.

следам, используя те из его приемов, которые оказались удачными, выбирая другие пути, – достигнут новых высот на пути к вершине. Наконец появляется некто, не только имеющий хороший план, позволяющий избежать прошлых ошибок, но и решительно настроенный на то, чтобы покорить эту вершину и, возможно, установить на ней флаг в знак своего достижения. В математике угроза жизни и здоровью первопроходцев не столь велика, да и их приключения едва ли покажутся захватывающими кому-либо со стороны. И завершение долгого доказательства ученый не отмечает установкой флага. Он (или она) публикует это доказательство в научном журнале. Или в подстрочном примечании. Или в техническом приложении. В любом случае, и в нашей области есть и азарт, и опасность, с которыми мы постоянно сталкиваемся в процессе поисков, и успех сопутствует тем из нас, кому удалось по-новому взглянуть на скрытые тайны природы.

К началу 1970-х годов уже успело пройти не одно десятилетие с того момента, как Эудженио Калаби обнаружил свою «гору» – впрочем, мы по-прежнему нуждались в подтверждении того, что эта гора действительно была горой, а не, скажем, земляным холмиком. Я, например, вовсе не собирался безоговорочно верить тем неожиданным утверждениям, которые он представил перед нами. Причин для скептицизма, как я уже говорил, было немало. Прежде всего, многие сомневались в возможности существования компактных неограниченных многообразий с нетривиальной риччи-плоской метрикой (отличных от неинтересных нам плоских торов). В то время не было известно ни одного примера подобного многообразия, тогда как этот парень, Калаби, утверждал, что число многообразий данного типа огромно (или даже бесконечно).

Кроме того, Калаби, по словам Роберта Грина, в своей гипотезе воспользовался общим топологическим условием, чтобы получить частный геометрический вывод, который при этом должен быть верен для всего пространства. Для реальных многообразий, у которых отсутствует сложная структура, это неверно, однако для комплексных многообразий, к которым относится гипотеза, это в принципе возможно.⁴³ Говоря более конкретно, с точки зрения Грина, гипотеза Калаби утверждает, что начиная со случая одного комплексного измерения (и двух вещественных), исходя из общей топологии и формы, где средняя кривизна равна нулю, можно найти метрику или геометрию, где кривизна везде равна нулю. Для случая высоких размерностей гипотеза Калаби конкретно указывает на кривизну Риччи (которая совпадает с гауссовой кривизной для двух вещественных измерений, но отличается от нее, если размерность выше двух), а условие равенства нулю средней кривизны Риччи заменяется условием обращения в нуль первого класса Черна. Калаби утверждал, что если топологическое условие обращения в нуль первого класса Черна выполняется, то должна существовать кэлера метрика с нулевой кривизной Риччи. Таким образом, весьма широкое и размытое утверждение заменялось гораздо более узким и строгим – и именно поэтому Грин и большинство других математиков сочли это довольно неожиданным.

Я тоже с большим подозрением отнесся к данному утверждению, исходя из ряда формальных причин. Принято было считать, что никто никогда не сможет записать точное решение гипотезы Калаби за исключением разве что нескольких частных случаев. Если это предположение было правильным – что и было впоследствии доказано, – то ситуация становилась безнадежной, и тогда утверждение Калаби можно охарактеризовать как «слишком хорошее, чтобы быть правдой».

Можно провести следующую аналогию с теорией чисел. Хотя существует множество чисел, записать которые на бумаге не составляет ни малейшего труда, существует гораздо более обширный класс чисел, которые мы никогда не сможем записать в явном виде. Эти числа, называемые *трансцендентными*, включают в свое множество, например, e (2,718...) и π (3,1415...), запись которых даже с триллионом знаков после запятой все равно не будет полной. С технической точки зрения это происходит потому, что такие числа нельзя получить путем алгебраических преобразований и они не являются корнями полинома с рациональными коэффициентами. Ввести их можно только при помощи определенных

43 Robert Greene (UCLA), interview with author, January 29, 2008.

правил, это означает, что мы можем дать сколь угодно точное и обширное их описание, но никогда – дословное.

Похожая ситуация возникает и с нелинейными уравнениями типа тех, что относятся к гипотезе Калаби. Решением нелинейного уравнения является функция. При этом едва ли стоит ожидать, что найденное решение будет иметь простой и явный вид, например, что его можно будет выразить при помощи точной формулы, поскольку в большинстве случаев таких формул просто не существует. Единственное, что остается, – это пытаться аппроксимировать решение хорошо известными нам функциями: полиномиальными, тригонометрическими (такими, как синус, косинус и тангенс) и некоторыми другими. Если же попытка аппроксимации решения уравнения известными нам функциями оказалась неудачной, у нас начинаются проблемы.

Держа в голове все вышесказанное, я попытался в свободное от работы время найти контрпримеры к гипотезе Калаби. Были волнующие мгновения: мне казалось, что я наконец нашел направление атаки, позволяющее опровергнуть эту гипотезу, – однако позже я обнаруживал изъяны в моей, вроде бы безупречной, конструкции. Это происходило неоднократно. В 1973 году на меня снизошло озарение. На этот раз я чувствовал, что действительно попал на верный путь. Подход, который я избрал – доказательство от противного, – был аналогичен тому подходу, который мы с Ричардом Шоном использовали для доказательства гипотезы о положительности массы. И на этот раз я мог поручиться за безупречность своего доказательства.

Так совпало, что эта идея пришла мне в голову во время международной конференции по геометрии, которая проходила в Стэнфорде в 1973 году, на которой Герох затронул вопрос о гипотезе положительности массы. Принято считать, что конференции – это отличный способ оставаться в курсе событий, как в своей, так и в смежных и даже очень далеких областях исследований, и эта конференция не была исключением. Она стала для меня прекрасным местом для обмена идеями с коллегами, которых я не имел возможности видеть ежедневно. Впрочем, не так уж часто бывают конференции, на которых ты решаешься изменить направление своей деятельности. Причем дважды.

Общаясь со своими коллегами на протяжении конференции, я случайно упомянул, что нашел возможный способ раз и навсегда опровергнуть Калаби. После непродолжительных уговоров я согласился посвятить один из вечеров неофициальному обсуждению своей идеи, хотя уже запланировал несколько официальных докладов. На мое выступление собрались порядка двадцати человек – и атмосфера была весьма накалена. Когда же я закончил изложение своих идей, все, казалось, согласилось с моей аргументацией. Калаби также присутствовал и не высказал совершенно никаких возражений. Мне вынесли личную благодарность, объявив, что своим докладом я внес большой вклад в программу конференции, и впоследствии я весьма гордился этим.

Спустя несколько месяцев Калаби связался со мной, попросив прислать ему мое опровержение его гипотезы, поскольку он «ломал голову» над некоторыми деталями моих рассуждениях. Это побудило меня засесть за более строгое доказательство. Получив письмо Калаби, я почувствовал необходимость повторить весь ход своих рассуждений еще раз. Я работал очень усердно, на протяжении двух недель практически не оставляя времени даже на сон, чем почти довел себя до состояния нервного истощения. Всякий раз, когда мне казалось, что доказательство уже почти у меня в руках, в последнюю секунду все рассыпалось буквально у меня на глазах, причем самым обидным образом. После двухнедельного мучения я решил, что с моими рассуждениями что-то не так. Единственным выходом было сдаться и попробовать начать работу в противоположном направлении. Иными словами, я пришел к выводу о том, что гипотеза Калаби должна быть истинной. Это поставило меня в весьма любопытное положение: после изнурительных попыток доказать ошибочность утверждения Калаби мне теперь предстояло доказывать его истинность. А если гипотеза верна, то все, что из нее следует, все, что слишком хорошо, чтобы быть правдой, – действительно должно быть правдой.

Доказательство гипотезы Калаби подразумевало доказательство существования риччи-плоской метрики, а это означало решение уравнений в частных производных. Не просто любых дифференциальных уравнений в частных производных, а очень нелинейных уравнений определенного типа: комплексные уравнения Монжа-Ампера.

Уравнения Монжа-Ампера получили свое название в честь французского математика Гаспара Монжа, который начал изучать уравнения такого рода во времена Французской революции, и французского физика и математика Андре-Мари Ампера, продолжившего работу над ними несколько десятилетий спустя. Работать с этими уравнениями далеко не просто.

В качестве простейшего примера из повседневной жизни, поясняющего идеи Калаби, рассмотрим плоский пластичный лист с фиксированным периметром. Предположим теперь, что этот лист либо растягивается, либо сжимается. Вопрос в следующем: как в процессе сжатия или растяжения изменяется форма листа? Растяжение средней части листа приводит к возникновению на нем выпуклости с положительной кривизной, и соответствующее решение уравнения Монжа-Ампера будет принадлежать к *эллиптическому* типу. И наоборот, если внутренняя часть листа сжимается, то поверхность приобретает форму седла с отрицательной кривизной во всех своих точках, – решение будет *гиперболическим*. Наконец, если кривизна окажется равной нулю во всех точках, то можно ожидать решения *параболического* типа. Всем трем случаям будет соответствовать одно и то же уравнение Монжа-Ампера, но, как указал Калаби, «решать его необходимо совершенно разными методами».⁴⁴

Из трех перечисленных типов дифференциальных уравнений лучше всего мы умеем решать и анализировать уравнения эллиптического типа. Эллиптические уравнения относятся к простейшему – стационарному случаю, в котором рассматриваемые объекты неподвижны в пространстве и времени. Они описывают физические системы, не изменяющиеся с течением времени, такие как барабан, мембрана которого после остановки колебаний вернулась в состояние равновесия. Кроме того, решения эллиптических уравнений считаются наиболее простыми для понимания, поскольку соответствующие им графики являются гладкими и при их анализе проблемы с сингулярностями возникают весьма редко, хотя появление сингулярностей в решениях некоторых нелинейных эллиптических уравнений не исключено.

Гиперболические дифференциальные уравнения описывают процессы, подобные волнам или колебаниям, которые никогда не достигают равновесного состояния. Решения таких уравнений, в отличие от решений эллиптических, обычно обладают сингулярностями, и работать с ними намного сложнее. Если с линейными гиперболическими уравнениями, в которых изменение одной переменной приводит к пропорциональному изменению другой, мы уже научились управляться достаточно хорошо, то каких-либо эффективных инструментов для работы с нелинейными гиперболическими уравнениями, а именно для управления возникающими в них сингулярностями, попросту не существует.

Параболические уравнения лежат примерно где-то посередине. Они описывают стабильные физические системы, такие как колеблющаяся барабанная мембрана, которые только стремятся к равновесию, но на данный момент еще его не достигли, что привносит в физическую картину зависимость от времени. Эти уравнения менее склонны к сингулярностям, чем гиперболические, и сгладить их гораздо легче, что с точки зрения сложности решения опять-таки ставит их где-то между эллиптическими и гиперболическими.

Но существуют и еще более серьезные математические проблемы. Тогда как простейшие уравнения Монжа-Ампера содержат только две переменные, в более сложных случаях количество переменных значительно больше двух. Эти уравнения выходят за рамки гиперболических – их иногда называют *ультрагиперболическими*, и о их возможных решениях мы знаем еще меньше. Как заметил Калаби: «Мы понятия не имеем об этих других

44 Eugenio Calabi (University of Pennsylvania), interview with author, May 14, 2008.

решениях, лежащих за пределами трех известных нам, поскольку мы совершенно не способны представить соответствующую им физическую картину».⁴⁵ Из-за неодинаковой сложности трех типов уравнений в геометрическом анализе на сегодняшний день используются в основном либо эллиптические, либо параболические уравнения. Конечно, мы заинтересованы во всех трех типах уравнений, и существует множество интереснейших задач, связанных с гиперболическими уравнениями, например уравнения поля Эйнштейна, но обратиться к их решению нам мешает отсутствие необходимых для этого инструментов.

Уравнения, используемые в гипотезе Калаби, были нелинейными эллиптическими. Несмотря на связь этих уравнений с гиперболическими уравнениями поля Эйнштейна, гипотеза Калаби основана на несколько иных геометрических структурах. В рассматриваемом нами случае мы предполагаем, что время в нашей задаче остановилось, почти как в известной сцене из «Спящей красавицы», где на протяжении сотни лет никто и ничто не может сдвинуться с места. Благодаря этому допущению в доказательстве гипотезы Калаби можно было использовать эллиптические уравнения, устранив зависимость от времени. Это стало причиной, по которой я надеялся на то, что инструменты геометрического анализа – и в том числе те, о которых уже было сказано выше, – смогут быть с успехом использованы для решения нашей задачи.

Впрочем, даже имея в своем распоряжении все необходимые инструменты, мне предстояло проделать немалую подготовительную работу. Частично это было обусловлено тем, что никто до меня не решал комплексные уравнения Монжа-Ампера для случая более чем одного измерения. Как альпинист, постоянно стремящийся к покорению новых высот, я стремился к покорению более высоких размерностей. Чтобы подготовиться к схватке с многомерными уравнениями Монжа-Ампера, нелинейность которых сама собой подразумевалась, мы с моим другом Ш. Ченгом принялись за исследование различных многомерных случаев, начав с задач в вещественных числах с целью впоследствии перейти к более сложным комплексным уравнениям.

Для начала мы рассмотрели знаменитую задачу, выдвинутую на рубеже XX века Германом Минковским. Задача Минковского состояла в том, чтобы установить возможность или невозможность существования некоей структуры, удовлетворяющей определенному набору критериев. Рассмотрим простой многогранник. Его структуру можно охарактеризовать, подсчитав число граней и ребер и определив их размеры. Задача Минковского состояла в обратном: можно ли, зная форму, площадь, число и ориентацию граней, определить, существует ли в действительности многогранник, удовлетворяющий данным критериям, и если да, то будет ли он единственным?

Задача на самом деле была более общей, поскольку имела отношение не только к многогранникам, но и в принципе к любым выпуклым поверхностям. Вместо того чтобы говорить об ориентации граней, с равным успехом можно говорить о кривизне, указав для каждой точки поверхности направление перпендикулярных к ней – *нормальных* векторов, что соответствует ориентации поверхности в пространстве. После этого уже можно задаться вопросом, существует ли объект с указанной кривизной.

Удобно, что эта задача может быть представлена не только в геометрической форме. Она также может быть записана в виде дифференциального уравнения в частных производных. По словам Эрвина Лутвака из Политехнического института при Нью-Йоркском университете: «Если вы сможете решить геометрическую задачу, то автоматически получите дополнительный приз: решение сложнейшего дифференциального уравнения в частных производных. Такая взаимосвязь между геометрией и дифференциальными уравнениями в частных производных делает эту задачу столь важной».⁴⁶

Мы с Ченгом нашли способ решения этой задачи, и наша статья, посвященная этому вопросу, вышла в 1976 году. Как выяснилось, другое решение было представлено несколькими годами раньше – в 1971 году российским математиком Алексеем Погореловым.

45 Ibid.

46 Erwin Lutwak (Polytechnic Institute of NYU), interview with author, May 15, 2008.

Ни я, ни Ченг никогда не видели его статьи, поскольку она была опубликована на родном языке Погорелова. В конце концов, все свелось к решению сложнейшего дифференциального уравнения в частных производных из тех, которые никогда до этого не решались.

Несмотря на то что никому до нас не удавалось решить проблему данного типа, за исключением Погорелова, работа которого была нам неизвестна, процедура, позволяющая работать с нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных, на тот момент была уже хорошо разработана. Метод работы с подобными уравнениями, получивший название *метода непрерывности*, был основан на использовании последовательных приближений. И хотя этот общий подход никоим образом нельзя было назвать новым, особенность состояла в том, что каждая конкретная задача предусматривала разработку своей собственной стратегии, необходимой для ее решения. Основная идея заключалась в последовательной аппроксимации решения различными функциями так, чтобы каждое следующее приближение давало результаты лучше, чем предыдущее. Суть доказательства состояла в том, чтобы показать, что после достаточно большого числа итераций приближенная функция с большой точностью совпадет с решением искомого дифференциального уравнения. В случае удачи полученное путем аппроксимации приближение нужно рассматривать не как решение дифференциального уравнения, которое можно представить в виде определенной формулы, а как доказательство того факта, что решение существует. Для гипотезы Калаби и других задач того же типа существование решения дифференциального уравнения в частных производных эквивалентно доказательству существования определенной геометрии для заданных «топологических» условий. Это не означает, что вы ничего не знаете о решении, существование которого только что доказали. Схема, которая была использована для доказательства существования решения, зачастую может быть легко преобразована в численный метод для приближенного решения на компьютере. О численных методах речь пойдет в девятой главе.

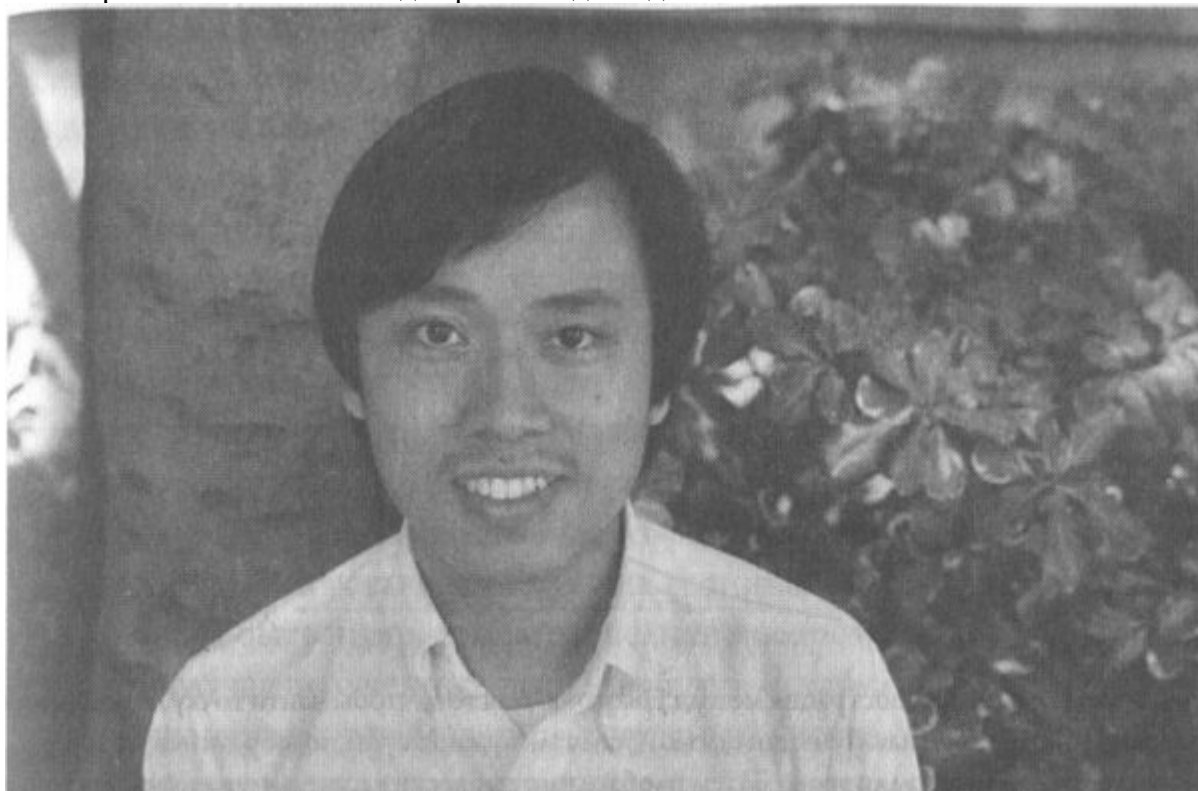


Рис. 5.1. Математик Ш. Ю. Ченг (фотография Джорджа М. Бергмана)

Метод непрерывности был назван так потому, что он подразумевает непрерывное преобразование решения некоего известного уравнения вплоть до его полного совпадения с решением искомого. Процедуру преобразования, как правило, разбивают на две части, одна из которых работает только в непосредственной близости от известного решения.

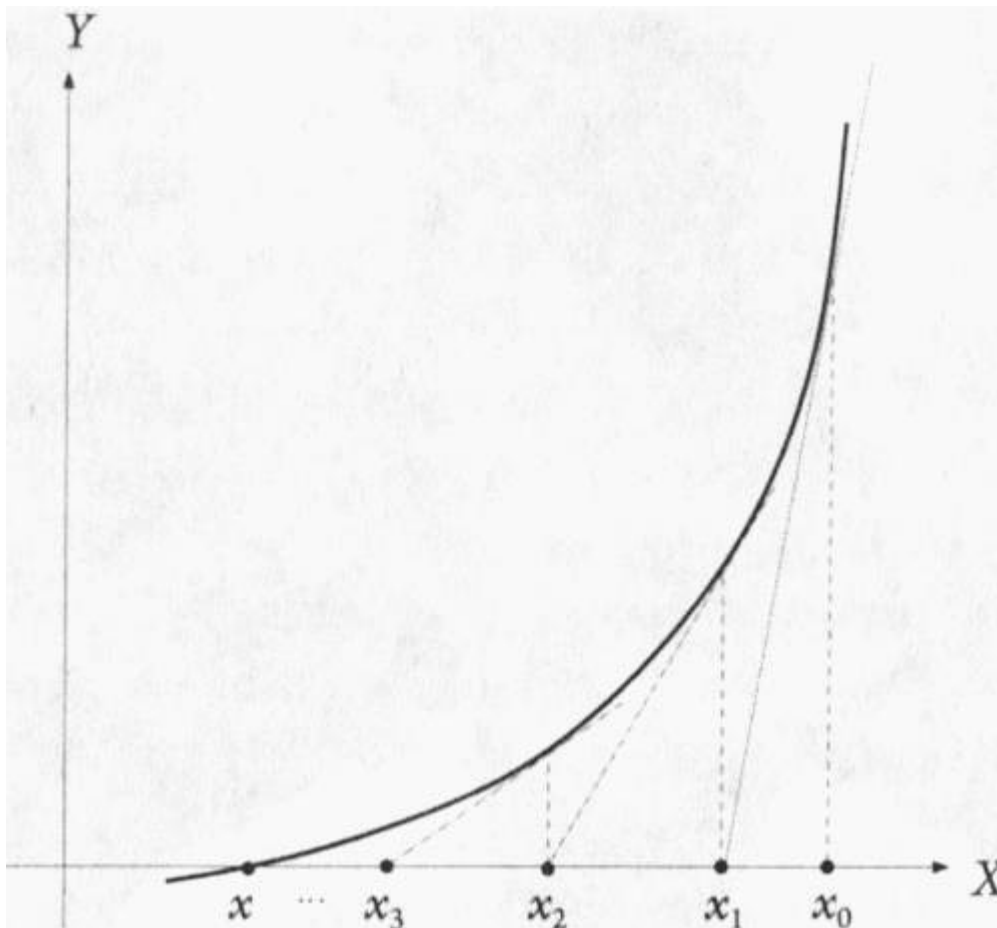


Рис. 5.2. Наглядная иллюстрация метода Ньютона. Для того чтобы найти точку пересечения определенной кривой или функции с осью X , сначала нужно наугад подобрать некую точку x_0 наиболее подходящую для этого. Затем необходимо провести касательную к кривой в точке x_0 и отметить точку, в которой эта касательная пересечет ось X (это будет точка x_1). В том случае, если наше изначальное предположение не было полностью ошибочным, продолжая этот процесс, мы будем получать точки все ближе и ближе к искомой

Одна из этих частей носит название метода Ньютона, так как она в определенной степени основана на методе, разработанном Исааком Ньютоном более трехсот лет назад. Для того чтобы продемонстрировать этот метод в действии, рассмотрим функцию $y=x-3x+1$, которая описывает кривую, пересекающую ось X в трех различных точках, являющихся корнями этого полинома. Подход, предложенный Ньютоном, позволяет определить положение корней на оси X , что далеко не всегда можно сделать, просто взглянув на уравнение. Предположим, что напрямую решить уравнение нельзя, однако один из корней соответствующей функции можно найти вблизи точки x_1 . Касательная, проведенная к кривой в этой точке, пересечет ось X в другой точке – x_2 , находящейся ближе к искомому корню, чем точка x_1 . Если мы проведем касательную в точке x_2 , она пересечет ось X в точке x_3 , которая будет еще ближе к искомому корню. Таким образом, многократное повторение данной процедуры должно довольно быстро привести нас к искомому корню, если только начальная точка x_1 была выбрана более-менее удачно.

В качестве еще одного примера рассмотрим набор уравнений E_t , только одно из которых, E_0 (для которого $t = 0$), мы способны решить. При этом в действительности нам нужно решить уравнение E_1 (для которого $t = 1$). Мы могли бы использовать метод Ньютона, если мы находимся в непосредственной близости к точке $t = 0$, решение уравнения в которой хорошо известно, но этот подход не может привести нас к 1 . В этом случае необходимо прибегнуть к другому методу оценки, обладающему большей применимостью.

Как же это сделать? Представим, что над Тихим океаном была запущена ракета, которая

приземлилась в радиусе ста миль от атолла Бикини. Это дает нам некоторое представление о том, где ракета может быть, другими словами – ее общую позицию, но мы хотели бы знать больше, например ее скорость, или ее ускорение, или как это ускорение изменялось в течение полета. Это можно сделать при помощи дифференциального исчисления – путем взятия первой, второй и третьей производных от функции, описывающей зависимость положения ракеты от времени. С таким же успехом можно брать производные и более высоких порядков, но для эллиптических уравнений второго порядка того типа, которым я занимаюсь, третьей производной вполне хватает.

Одного лишь знания производных функции недостаточно, хотя задача по их нахождению сама по себе может быть чрезвычайно трудоемкой. Кроме того, производные нужно «контролировать». Иными словами, необходимо установить для них границы – удостовериться, что они не могут быть ни чрезвычайно велики, ни чрезвычайно малы. Только в этом случае полученные решения будут «стабильны» – то есть не будут бесконтрольно раздуваться, тем самым дисквалифицируя себя как решения и разрушая наши надежды на них. Итак, взяв для начала нулевую производную – то есть исходную функцию, описывающую изменение положения ракеты с течением времени, мы устанавливаем для нее наличие верхних и нижних границ – иными словами, делаем оценки, показывающие, что решение по крайней мере возможно. Та же самая операция проводится для всех производных более высоких порядков, что позволяет удостовериться в том, что они не являются ни бесконечно большими, ни бесконечно малыми, а функции, их описывающие, не флуктуируют совершенно беспорядочным образом. Это позволяет априори оценить скорость, ускорение, зависимость ускорения от времени и т. д. Если мы можем таким образом проверить все производные от нулевой до третьей, значит, у нас есть хороший способ оценить уравнение в целом и приличный шанс найти его решение. Подобный процесс оценки и доказательства того, что оценочные данные сами по себе находятся под контролем, как правило, представляют самую сложную часть всего процесса.

Итак, в конце концов, все сводится к оценкам. Есть что-то ироническое в моем признании их актуальности для решения проблемы, с которой я столкнулся. Помню, когда я впервые попал в Беркли, в коридоре математического факультета я столкнулся с двумя постдоками из Италии. Они прыгали с радостными криками. На мой вопрос о том, что произошло, они ответили, что им только что удалось получить приближенную оценку. Когда же я спросил их о том, что это такое – оценка, они посмотрели на меня как на полного невежду, непонятно как попавшего в это здание. Именно с этого момента я пытался узнать как можно больше об априорных оценках. Калаби получил такой же урок несколькими десятилетиями ранее от своего друга и соратника Луиса Ниренберга: «Повторяй за мной, – говорил тогда Ниренберг, – без априорных оценок ты никогда не сможешь решать дифференциальные уравнения в частных производных!»³ А в начале 1950-х Калаби переписывался с Эндрю Вейлем по поводу своей гипотезы. Вейль, который полагал, что математические технологии того времени просто не созрели для нахождения решения, спрашивал Калаби: «Как вы собираетесь получить оценки?»⁴⁷

Два десятилетия спустя, когда я включился в игру, сама проблема не изменилась. Она по-прежнему оставалась невероятно сложной, хотя математический аппарат за это время успел развиваться настолько, что решение стало в принципе возможным. Проблема состояла лишь в том, чтобы найти верный подход или, по крайней мере, создать необходимую точку опоры. Так что я подобрал более простое уравнение, а затем постарался показать, что его решение может в конечном счете «деформироваться» в решение более сложного уравнения.

Предположим, что вам нужно решить уравнение $f(x) = x - x$ при $f(x) = 0$. Подставим для начала $x = 2$ и убедимся, что этот вариант не подходит: $f(2) = 2$, а не 0 . Тем не менее у нас теперь есть решение, если не для исходного уравнения, то для чего-то подобного. Перепишем первоначальное уравнение как $f(x) = 2t$. Для случая $t = 1$ его решение уже известно ($x = 2$),

³ Calabi, interview, May 14, 2008.

⁴⁷ Eugenio Calabi, interview with author, June 16, 2008.

и теперь задача состоит в том, чтобы решить его при $t = 0$. Как же это сделать? Рассмотрим параметр t . Что произойдет, если немного изменить значение t , так, чтобы оно уже не было равно точно 1, но все же оставалось близким к единице? Интуиция подсказывает, что если t будет близко к 1, значение $f(t)$ будет близко к 2. Это предположение оказывается верным для большинства случаев, а это означает, что при t близком к 1 мы можем решить уравнение.

Теперь будем уменьшать t , так чтобы рано или поздно его значение достигло нуля и в результате мы получили исходное уравнение. Выбирая все меньшие и меньшие значения t , будем записывать для каждого из них соответствующие решения уравнения. В результате возникнет последовательность точек, в которых решение уравнения существует, и каждой из этих точек соответствует собственное значение x , которое я буду называть x_i . Смысл этого упражнения заключается в том, чтобы доказать, что последовательность x_i сходится к определенному значению. Для этого нужно показать, что x_i ограничено и не может возрастать до бесконечности, потому что для любой ограниченной последовательности по крайней мере некоторые ее части должны сходиться. Показав сходимость x_i , мы тем самым покажем возможность уменьшения величины t до 0 без столкновения с какими-либо непреодолимыми препятствиями. И если мы сможем это сделать, мы тем самым решим уравнение, показав, что случай с $t = 0$ также имеет решение. Иными словами, мы покажем, что решение исходного уравнения $x^{22} - x = 0$ должно существовать.

Именно такие рассуждения я использовал при доказательстве гипотезы Калаби. Ключевым моментом доказательства стала необходимость показать, что x_i представляют собой сходящуюся последовательность. Конечно, уравнение, лежащее в основе гипотезы Калаби, было намного сложнее, чем $x^{22} - x = 0$. В этом уравнении в роли x выступало не число, а функция, что безмерно увеличивало сложность, поскольку сходимость последовательности функций доказать, как правило, весьма и весьма непросто.

Итак, мы снова разбиваем большую проблему на более мелкие фрагменты. Уравнение, входящее в гипотезу Калаби, является эллиптическим уравнением второго порядка, и для решения подобных уравнений необходимо сделать оценки нулевого, первого, второго и третьего порядков. Сделав эти оценки и доказав, что они сходятся к желаемому решению, можно считать гипотезу доказанной. Это легче сказать, чем сделать, поскольку нахождение этих четырех оценок представляет собой отнюдь не простую задачу. Думаю, именно за способность делать такие вещи нас и ценят.

Впрочем этим наша с Ченгом подготовка к наступлению на уравнения Монжа-Ампера не ограничилась. Мы начали работу над так называемой проблемой Дирихле, названной в честь немецкого математика Лежёна Дирихле. Эта проблема относилась к категории краевых задач, решение которых, как правило, представляет собой первый этап решения эллиптических дифференциальных уравнений. Примером краевой задачи может служить проблема Плато, затронутая в третьей главе, которую обычно поясняют на примере мыльных пленок и которая утверждает, что для произвольного замкнутого контура всегда можно найти минимальную поверхность, ограниченную этим контуром. Каждая точка такой поверхности в действительности является решением определенного дифференциального уравнения. Иными словами, вопрос сводится к следующему: если известно граничное решение такого уравнения, то можно ли найти поверхность в целом и таким образом полностью решить уравнение? Несмотря на то что гипотеза Калаби не является краевой задачей, мы с Ченгом нуждались в проверке методов, которые могли впоследствии пригодиться нам в работе над комплексными уравнениями Монжа-Ампера типа того, что фигурирует в гипотезе Калаби. Для этого мы занялись решением задачи Дирихле в определенных областях комплексных евклидовых пространств.

Решить задачу Дирихле можно при помощи уже упомянутых ранее шагов, оценивая значения производных нулевого, первого, второго и третьего порядка для точек, лежащих на границе. Но мы должны сделать такие же оценки и для внутренних точек поверхности, поскольку рассматриваемый «мыльный пузырь» может иметь разрывы, сингулярности и другие отклонения от гладкости. Таким образом, общее число оценок равно восьми.

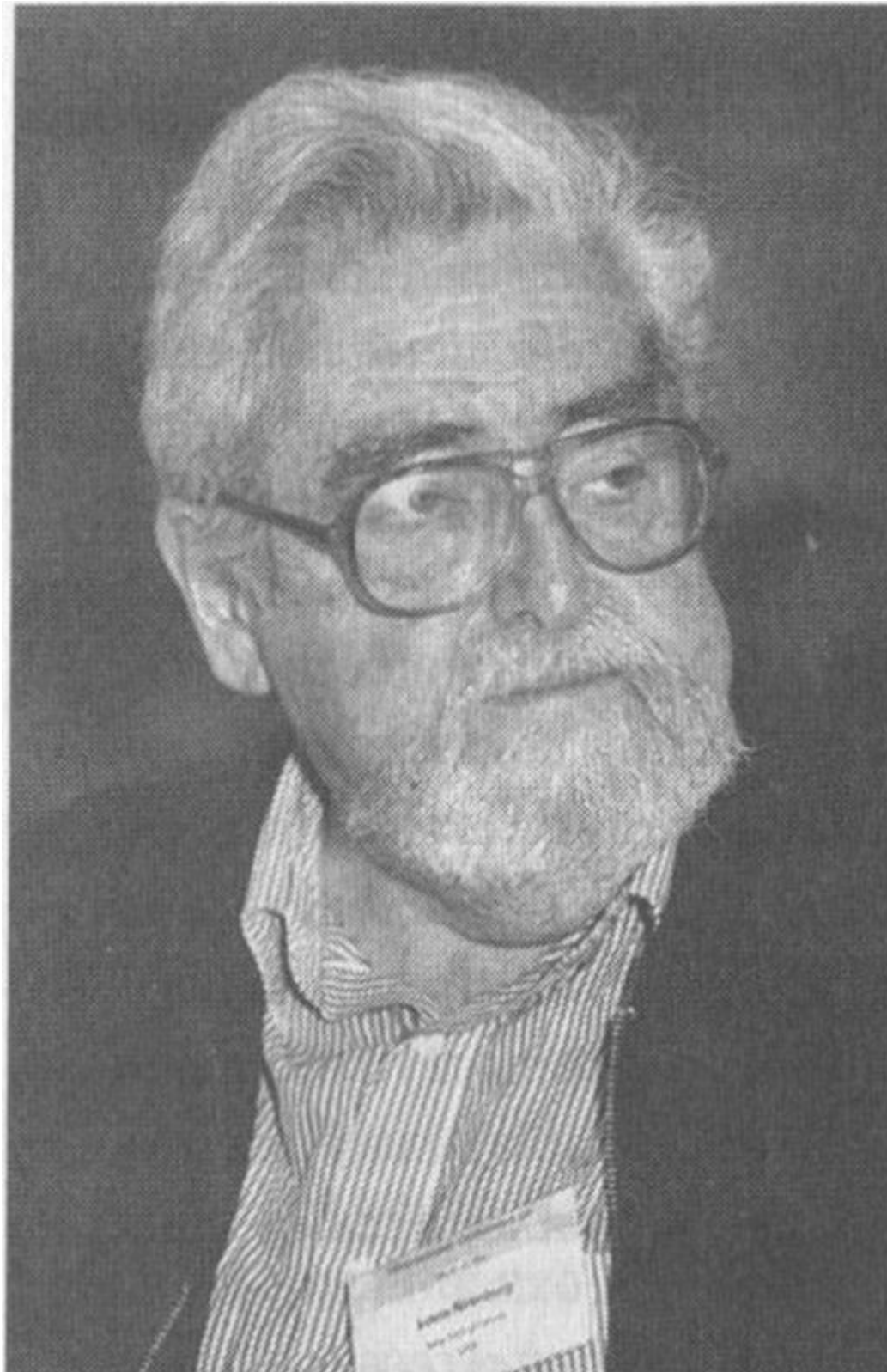


Рис. 5.3. Математик Луис Ниренберг

К началу 1974 года Калаби и Ниренберг, также работавшие над задачей Дирихле, одновременно с нами получили оценку второго порядка. Нахождение оценки нулевого порядка оказалось весьма простой задачей. Ну а оценку первого порядка можно вывести из оценок нулевого и второго порядков. Итак, оставалась только оценка третьего порядка, нахождение которой и открывало путь к решению задачи Дирихле.

Математический аппарат, необходимый для решения этой задачи, возник еще в конце 1950-х. Я еще учился в средней школе, когда Калаби нашел решение главной геометрической

задачи, оказавшейся впоследствии решающей в вопросе нахождения оценок третьего порядка для внутренних точек поверхности в случае вещественных уравнений Монжа-Ампера. Сделать вклад в эту область Калаби во многом помогло стечение обстоятельств. В то время он работал над проблемой из области аффинной геометрии (аффинная геометрия представляет собой обобщение евклидовой геометрии, в подробности которого я, будучи весьма далек от этой области, не особо хочу вдаваться), тогда как Ниренберг и Чарльз Левнер из Стэнфордского университета занимались задачей Дирихле для уравнения Монжа-Ампера, но не с гладкой, а с так называемой сингулярной границей, подобной гребню волны. Увидев то уравнение, над которым работали Ниренберг и Левнер, Калаби понял, что оно непосредственно связано с тематикой его работ по аффинной геометрии. Калаби и Ниренберг догадались, как применить результаты Калаби, полученные им в 1950-х годах, к проблеме оценки третьего порядка для внутренних точек поверхности, с которой мы столкнулись в 1970-х. «Многие математические открытия происходят благодаря удачному стечению обстоятельств, такому как это, – заметил Калаби. – Порой стоит попробовать соединить кажущиеся несовместимыми идеи и затем посмотреть, где можно применить то, что получилось в результате».⁴⁸

Позже, в 1974 году, Калаби и Ниренберг объявили, что им удалось найти решение краевой задачи для комплексных уравнений Монжа-Ампера. Впрочем, оказалось, что они допустили ошибку, и оценка третьего порядка для точек, находящихся на границе, по-прежнему отсутствовала.

Вскоре мы с Ченгом представили и свою версию оценки третьего порядка на границе. Это произошло во время обеда, на который Ч. Ш. Черн пригласил нас, чтобы мы составили компанию ему с Ниренбергом. Ниренберг в то время уже был большой шишкой, тогда как мы только окончили университет, поэтому всю ночь перед предполагавшимся обедом мы посвятили проверке нашего доказательства и, к нашему ужасу, обнаружили в нем ошибки. На их исправление и переписывание доказательства нам потребовалась целая ночь. Следующим вечером мы показали наше доказательство Ниренбергу. Он остался им доволен, мы также остались им довольны, так что теперь можно было спокойно наслаждаться обедом. Но уже после обеда мы с Ченгом заново просмотрели доказательство и нашли в нем новые ошибки. Только через шесть месяцев после этого, в самом конце 1974 года, мы закончили работу над краевой задачей. Нам удалось решить ее путем исследования уравнения, близкого к тому, над которым работали Левнер и Ниренберг, только для более высоких размерностей. Метод, который мы использовали, позволял не принимать во внимание оценку третьего порядка, делая ее необязательной.

Закончив эту работу, я был готов приступить к комплексному варианту гипотезы Калаби – задаче, которая, в отличие от задачи Дирихле, сформулированной для комплексного евклидова пространства, относилась к случаю комплексного многообразия. Мое стремление как можно быстрее приступить к ее доказательству было столь сильным, что к публикации статьи, посвященной задаче Дирихле, мы смогли вернуться только через пять лет – в 1979 году.

Когда задача Дирихле осталась позади, большая часть оставшейся работы представляла собой обобщение или, иными словами, перевод оценок, сделанных для вещественных уравнений Монжа-Ампера, в оценки для комплексных уравнений. Этот путь мне пришлось преодолевать уже в одиночку, поскольку дороги Ченга лежали немного в другом направлении.

Когда-то, в 1974 году, Калаби и Ниренберг совместно с Дж. Дж. Коном из Принстона уже начинали работу над комплексной разновидностью задачи Дирихле в евклидовом пространстве. Они добились определенных успехов в исследовании оценок третьего порядка, так что мне оставалось применить их результаты к случаю искривленного пространства. В том же году у меня возникли некоторые идеи по поводу нахождения оценок второго порядка для гипотезы Калаби, при этом я опирался на собственную работу 1972 года, посвященную

48 Ibid.

так называемой лемме Шварца. Эта лемма, или мини-теорема, появилась еще в XIX столетии и не имела ничего общего с геометрией, до тех пор пока в первой половине XX столетия она не была переосмыслена профессором Гарвардского университета Ларсом Альфорсом. Теорема Альфорса относилась только к римановым поверхностям, имеющим по определению одно комплексное измерение, но мне удалось обобщить ее для случая любой комплексной размерности.

Приготовления к поиску оценки второго порядка для гипотезы Калаби я закончил летом 1975 года. Год спустя я узнал, что французский математик Тьерри Обен нашел подход к данной оценке независимо от меня. Сделав оценку второго порядка, я также показал ее зависимость от оценки нулевого порядка и продемонстрировал возможность перехода от нулевого порядка ко второму. После окончания работы над этой оценкой оставался только один нерешенный вопрос, от которого теперь зависела судьба всего доказательства, – нахождение оценки нулевого порядка. Из оценки нулевого порядка я уже мог получить оценку как второго, так и первого порядка – в качестве бесплатного приложения к уже найденным, поскольку из оценок нулевого и второго порядков оценка первого порядка следует автоматически. Это было чистой воды везение. Фигурально выражаясь, так легли карты и, в целом, легли они весьма неплохо. Оценка третьего порядка также оказалась зависящей от оценок нулевого и второго порядков – то есть все свелось к нахождению оценки нулевого порядка. Знание этой оценки должно было расставить все остальное на свои места, но без нее все прочее было бы бессмысленно.

Свою работу я заканчивал в Курантовском институте Нью-Йорка, находясь на должности приглашенного сотрудника – эту должность мне помог занять Ниренберг. Вскоре моя невеста Ю-Юн, работавшая до этого в Принстоне, получила предложение работы в Лос-Анджелесе. Не желая разлучаться с ней, я занял другую приглашенную должность в Калифорнийском университете. В 1976 году мы вместе проехали всю страну с востока на запад, собираясь заключить брак сразу же по прибытии в Калифорнию. И действительно, прибыв в Калифорнию, мы тут же обвенчались. Эта поездка запомнилась нам надолго: мы были влюблены друг в друга, природа вокруг поражала своей красотой и большую часть пути мы строили планы на будущую совместную жизнь. Но все же я должен признаться, что даже тогда было нечто, что не давало мне покоя: в моей голове по-прежнему крепко сидела гипотеза Калаби и, в частности, оценка нулевого порядка, которая никак мне не поддавалась. Целый год я бился над ее поисками. В сентябре 1976 года, сразу после нашей свадьбы, мои усилия, наконец, увенчались успехом, и остальные части доказательства тут же встали на свои места. Как оказалось, семейная жизнь была именно тем, чего мне не доставало.

Задача нахождения оценки нулевого порядка аналогична нахождению оценок других порядков: на некое уравнение или функцию необходимо наложить ограничения – как сверху, так и снизу. Иными словами, функцию нужно поместить в воображаемый ящик и показать, что функция «влезет» в него, даже если размеры ящика не будут бесконечно велики. Если это возможно сделать, то функцию можно считать ограниченной сверху. С другой стороны, нужно показать, что функция не настолько мала, чтобы каким-либо образом «просочиться» за пределы ящика, таким образом ограничив ее снизу.

Один из возможных подходов к задаче такого типа состоит в том, чтобы взять абсолютное значение – *модуль* функции, которое говорит о ее величине в целом вне зависимости от того, положительное или отрицательное значение она принимает. Для того чтобы проверить функцию u , нужно показать, что ее абсолютное значение в любой точке пространства будет меньше постоянной величины c (или равно ей). Поскольку значение c точно определено, необходимо просто показать, что функция u не может произвольно принимать очень большие или очень малые значения. Иными словами, утверждение, которое мы хотим доказать, является простым неравенством, утверждающим, что модуль функции u должен быть меньше или равен c : $|u| \leq c$. И хотя оно выглядит не особо сложным, в том случае, когда u является комплексным объектом, доказательство требует достаточно много усилий.

Я не буду подробно останавливаться на деталях доказательства, отмечу только, что оно основывалось на оценке второго порядка для уравнения Монжа-Ампера, которую я уже сделал ранее. Мне также пригодилось известное неравенство Пуанкаре, а также неравенство, полученное российским математиком Сергеем Соболевым. Оба они содержали возведенные в определенную степень интегралы и производные различных порядков от абсолютного значения u . Последнее, а именно нахождение различных степеней интегралов и производных от u , имело решающее значение для проведения оценок, поскольку, только показав, что интегралы и производные от u в степени p даже при очень больших p все равно остаются ограниченными, можно считать работу выполненной. После этого функцию можно было считать стабильной. В конце концов, с помощью этих неравенств и различных теорем, а также ряда лемм, сформулированных мной по ходу доказательства, я смог это сделать. Когда, наконец, оценка нулевого порядка была получена, работу можно было считать завершенной.

Впрочем, говорят, что нельзя судить о пудинге до тех пор, пока его не попробуешь, – даже если что-то имеет привлекательный вид, окончательный вывод можно сделать только после тщательной проверки. Я не мог слепо полагаться на удачу. Однажды я уже поставил себя в неловкое положение, публично заявив на стэнфордской конференции 1973 года, будто знаю, как опровергнуть гипотезу Калаби. Тогда мое предполагаемое опровержение провалилось, и если бы теперь точно так же провалилось и мое подтверждение гипотезы Калаби, моя репутация как математика оказалась бы под большим вопросом. Я точно знал, что на данном этапе своей карьеры – мне тогда еще не исполнилось тридцати – я не могу позволить себе ошибиться вновь, по крайней мере, в столь важном деле.

Поэтому я проверял и перепроверял свое доказательство, рассмотрев его четыре раза с четырех совершенно разных позиций. Я проверял его столько раз, что поклялся, что если я окажусь неправ, то брошу математику. Но все мои попытки найти огрехи в доказательстве оказались тщетными. Насколько я мог судить, в нем все было идеально. Поскольку в те времена еще не существовало Интернета, где я мог бы просто опубликовать черновик своей статьи и попросить прокомментировать его, я избрал старомодный путь – выслал копию моего доказательства Калаби и отправился в Филадельфию для дальнейшей дискуссии с ним самим и другими геометрами с математического факультета Пенсильванского университета, в том числе и с Джерри Кадзаном.

Калаби счел мое доказательство безупречным, но мы договорились встретиться с Ниренбергом и проработать его вместе шаг за шагом. Так как найти время, когда мы все трое были бы свободны, было весьма непросто, наша встреча пришлось на Рождество 1976 года – единственный день, в который никто из нас не имел неотложных дел. На этой встрече нам так и не удалось найти в доказательстве ни одной ошибки – впрочем, чтобы окончательно удостовериться в правильности доказательства, требовалось намного больше времени. «На первый взгляд оно выглядит весьма правдоподобно, – вспоминал Калаби. – Но чрезвычайная сложность этого доказательства требует еще порядка месяца для более детальной проверки».⁴⁹

По окончании срока, отпущенного на рецензирование, Калаби и Ниренберг выразили свое полное согласие с моим доказательством. С этого момента гипотезу Калаби можно было объявить доказанной, и за прошедшие с того времени тридцать с лишним лет никто так и не смог поколебать это утверждение. На сегодняшний день доказательство гипотезы Калаби выдержало столько проверок, проведенных столь значительным числом ученых, что едва ли можно ожидать обнаружения в нем существенных ошибок в дальнейшем.

Итак, что же мне удалось сделать? Доказательством гипотезы Калаби я еще раз укрепил свое убеждение о том, что важнейшие математические проблемы могут быть разрешены путем объединения геометрии с дифференциальными уравнениями в частных производных. Более конкретно, я доказал существование риччи-плоской метрики для компактных кэлеровых пространств, первый класс Черна для которых обращается в нуль, хотя я и не смог написать точную формулу, определяющую метрику саму по себе. Все, что я мог сказать, – это

49 Eugenio Calabi, interview with author, October 18, 2007.

то, что подобная метрика существовала, но точный ее вид так и остался мне неизвестным.

Хотя это может прозвучать несколько неожиданно, метрика, существование которой я доказал, обладала почти сверхъестественными свойствами. В качестве постскриптума к своему доказательству я показал возможность существования множества фантастических многомерных пространств, известных сейчас как пространства Калаби-Яу, которые удовлетворяли уравнениям Эйнштейна в случае отсутствия в них материи. Таким образом, я обнаружил не просто решение, а самый многочисленный из известных класс решений уравнений Эйнштейна.

Кроме того, мне удалось показать, что непрерывно изменяя топологию, можно получить бесконечный класс решений основного уравнения, входящего в гипотезу Калаби, в настоящее время известного как уравнение Калаби-Яу и являющегося частным случаем уравнения Эйнштейна. Решения этого уравнения представляли собой топологические пространства, и сила доказательства состояла в его общности. Иными словами, я доказал существование не только одного примера подобных пространств или частного случая, а целого класса примеров. Более того, я показал, что для определенной топологии – например, для комплексных подмногообразий, находящихся внутри более крупных многообразий, – существует только одно возможное решение.

До появления моего доказательства единственными известными компактными пространствами, удовлетворяющими требованиям уравнений Эйнштейна, были так называемые локально однородные многообразия, в которых любые находящиеся рядом две точки казались неразличимыми. Но те пространства, которые мне удалось обнаружить, были как неоднородны, так и асимметричны, точнее, в них отсутствовала всеохватывающая глобальная симметрия, что, однако, не мешало им иметь менее заметную внутреннюю симметрию, о которой уже шла речь в предыдущей главе. Лично для меня это казалось преодолением огромного препятствия, поскольку выход за пределы глобальной симметрии открывал целый ряд новых возможностей, делая мир вокруг и интереснее и запутаннее.

В первое время я просто наслаждался красотой этих замысловатых пространств и кривизны самой по себе, не задумываясь об их возможных применениях. Но уже вскоре оказалось, что эти пространства имеют множество применений, как в рамках математики, так и за ее пределами. Однажды мы уже сочли гипотезу Калаби «слишком хорошей, чтобы быть истинной». На самом деле она оказалась даже лучше, чем мы думали.

Шестая глава

ДНК теории струн

При поиске алмазов, если вам повезет, вы также можете найти и другие драгоценные камни. Когда я заявил о своем доказательстве гипотезы Калаби в 1977 году в своей двухстраничной статье, за которой последовало само доказательство на семидесяти трех страницах в 1978-м, я также объявил о доказательстве еще пяти теорем, относящихся к данной гипотезе. Такая плодотворность во многом стала следствием тех необычных обстоятельств, в которых завязывались мои отношения с гипотезой Калаби, – начав с попыток доказать ее ошибочность, я затем резко сдал назад и стал доказывать ее истинность. К счастью, оказалось, что мои усилия не были потрачены даром – все мои ошибочные шаги, все те безвыходные положения, в которые я попадал, впоследствии были мной использованы. Придуманные мной контрпримеры – следствия, логически вытекающие из гипотезы Калаби, которые, как я полагал, должны были оказаться ложными, – также оказались истинными. Эти неудавшиеся контрпримеры на самом деле были настоящими примерами и вскоре были представлены мной в виде нескольких небезынтересных математических теорем.

Важнейшая из этих теорем вела к доказательству гипотезы Севери (комплексного варианта гипотезы Пуанкаре), задачи, которая оставалась нерешенной на протяжении двух

десятилетий. Но прежде чем дойти до этого, я доказал одно важное неравенство, напрямую связанное с вопросом классификации поверхностей на основе их топологии, которым я заинтересовался, отчасти благодаря моему разговору с гарвардским математиком Дэвидом Мамфордом, проезжавшим в то время через Калифорнию. Задача, о которой идет речь, впервые была выдвинута Антониусом ван де Веном из Лейденского университета и относилась к вопросу о неравенстве между классами Черна для кэлеровых многообразий. Ван де Вен доказал, что для любого многообразия второй класс Черна, умноженный на восемь, должен быть больше или равен квадрату первого класса Черна того же многообразия. Притом многие полагали, что этому неравенству можно придать более сильную форму, заменив восьмерку на тройку. Действительно, тройку можно было бы считать оптимальным значением. Вопрос, поставленный Мамфордом, состоял в возможности доказательства этого *более сильного* утверждения. Смысл выражения «более сильное утверждение» заключается в том, что, согласно предположению Мамфорда, некая величина, а именно второй класс Черна, будет больше, чем некая другая, не только при умножении на восемь, но и при умножении на меньшее число – три.

Мамфорд поднял этот вопрос во время своей лекции в Калифорнийском университете в Ирвине в сентябре 1976 года; я также присутствовал на ней, как раз незадолго до этого закончив работу над доказательством гипотезы Калаби. Во время доклада Мамфорда мне стало понятно, что я уже сталкивался с этой задачей раньше. Поэтому в процессе дискуссии, возникшей по окончании лекции, я сказал Мамфорду, что смогу доказать этот более сложный случай. Придя домой, я проверил свои расчеты и обнаружил, что, как я и подозревал, этот тип неравенства я пытался использовать в 1973 году для опровержения гипотезы Калаби; теперь же я мог использовать теорему Калаби-Яу для доказательства этого неравенства. Более того, доказав упомянутое выше утверждение, я теперь мог воспользоваться его частным случаем, а именно случаем равенства (второй класс Черна, умноженный на три, *равен* квадрату первого класса Черна) для доказательства гипотезы Севери.

Эти две теоремы, открывшие путь к доказательству гипотезы Севери и более общего неравенства, иногда называемого неравенством Богомолова-Мияока-Яу (я привожу полное название, чтобы выразить признательность двум другим математикам, внесшим вклад в решение этой задачи), стали первыми побочными результатами доказательства гипотезы Калаби, за которыми последовали многие другие. Гипотеза Калаби, по сути, оказалась намного обширнее, чем я считал до этого. Она применима не только к случаю нулевой кривизны Риччи, но и к случаям постоянной отрицательной и постоянной положительной кривизны. Никто до сих пор не исследовал случай положительной кривизны в наиболее общем виде, для которого гипотеза Калаби заведомо ложна. Я сформулировал новую гипотезу, определяющую условия, при которых метрика с положительной кривизной Риччи может существовать. На протяжении последних двух десятилетий многие математики, в том числе и Дональдсон, внесли значительный вклад в доказательство этой гипотезы, но окончательного доказательства до сих пор нет. При этом мне удалось исследовать случай отрицательной кривизны как часть общего доказательства гипотезы Калаби, независимо от меня этот же результат был получен французским математиком Тьерри Обеном. Решение, найденное для случая отрицательной кривизны, позволило показать существование широкого класса объектов, называемых многообразиями Кэлера-Эйнштейна, создав тем самым новые области геометрии, оказавшиеся необычайно плодотворными.

Справедливости ради стоит сказать, что я плодотворно провел время, посвященное поиску непосредственных применений гипотезы Калаби, – я доказал порядка полудюжины теорем. Оказалось, что одно лишь знание того, что определенная метрика существует, уже приводит к огромному числу следствий. Это знание можно было использовать для дедуктивного рассуждения и получить топологию многообразия, даже не зная точного значения метрики. И напротив, зная свойства многообразия, можно предсказать некоторые его уникальные особенности – подобно тому как, не зная всех деталей, можно сделать определенные выводы и о колоде карт, например об общем числе карт и маркировке каждой

из них, или даже о строении Галактики. Как мне кажется, подобные возможности, предоставляемые математикой, представляют собой нечто сверхъестественное и говорят даже больше о ее силе, чем в тех ситуациях, когда каждая из деталей нам известна.

Мне было весьма приятно пожинать плоды своих трудов и наблюдать, как другие вслед за мной прокладывают пути в те места, которые самому мне оказались недоступны. И все же, несмотря на все успехи, кое-что по-прежнему не давало мне покоя. В глубине души я был уверен, что эта работа должна иметь не только математические, но и физические приложения, хотя и не мог точно сказать, какие. В некоторой степени моя уверенность объяснялась тем, что дифференциальные уравнения, задействованные в гипотезе Калаби – в случае нулевой кривизны Риччи, – представляли собой уравнения Эйнштейна для пустого пространства, соответствующие Вселенной без дополнительной вакуумной энергии, космологическая постоянная для которой была бы равна нулю. В настоящее время космологическую постоянную принято считать положительной и связанной с темной энергией, заставляющей Вселенную расширяться. Кроме того, многообразия Калаби-Яу представляли собой решения дифференциальных уравнений Эйнштейна, также как, например, единичная окружность представляет собой решение уравнения $x^2 + y^2 = 1$.

Конечно, для описания пространств Калаби-Яу необходимо намного больше уравнений, чем для описания окружности, и сложность этих уравнений гораздо выше, но основная идея остается той же. Многообразия Калаби-Яу не только удовлетворяют уравнениям Эйнштейна, они удовлетворяют им чрезвычайно элегантно образом, что я, в частности, нахожу поразительным. Все это давало мне основание надеяться на их применимость в физике. Я только не знал, где именно.

Мне не оставалось ничего иного, кроме как пытаться объяснить моим друзьям и постдокам физикам те причины, по которым я считаю гипотезу Калаби и возникшую из нее так называемую *теорему Яу* столь важными для квантовой гравитации. Основная проблема состояла в том, что в то время мое понимание теории квантовой гравитации было явно недостаточным, чтобы я мог всецело положиться на собственную интуицию. Я время от времени возвращался к этой идее, но в основном сидел сложа руки и ждал, что из этого выйдет.

Шли годы, и в то время, пока я и другие математики продолжали работать над гипотезой Калаби, пытаюсь воплотить в жизнь обширные планы по ее применению в области геометрического анализа, в мире физики также началось некое закулисное движение, о котором я не догадывался. Этот процесс начался в 1984 году, который оказался поворотным для теории струн, начавшей в тот год стремительное восхождение от умозрительной идеи к полновесной теории.

Прежде чем приступить к описанию этих захватывающих событий, следует рассказать подробнее о самой теории струн, которая дерзко попыталась преодолеть разрыв между общей теорией относительности и квантовой механикой. В ее основе лежит предположение, что мельчайшие частицы материи и энергии представляют собой не точечные частицы, а крошечные, колеблющиеся участки струн, либо замкнутые в петли, либо открытые. Подобно струнам гитары, способным воспроизводить различные ноты, эти фундаментальные струны также способны колебаться огромным количеством способов. Теория струн предполагает, что струны, колебания которых различны, соответствуют разным частицам и силам, встречающимся в природе. Если эта теория справедлива, то проблема объединения сил решается следующим образом: все силы и частицы связаны между собой, поскольку все они являются проявлениями возбуждений одной и той же основной струны. Можно сказать, что это именно то, из чего состоит Вселенная: спустившись на наиболее элементарный уровень мироздания, вы обнаружите, что все состоит из струн.

Теория струн заимствует у теории Калуцы-Клейна общую идею, что осуществление великого синтеза физических сил требует наличия дополнительных измерений. Доказательство отчасти основано на тех же постулатах: всем четырем существующим в природе взаимодействиям – гравитационному, электромагнитному, слабому и сильному – в

четырёхмерной теории просто не хватает места. Если воспользоваться подходом Калуцы и Клейна и задаться вопросом, сколько измерений необходимо, чтобы соединить все четыре силы в рамках единой теории, то с учетом пяти измерений, необходимых для гравитации и электромагнетизма, пары измерений для слабого взаимодействия и еще нескольких для сильного, окажется, что минимальное число измерений равно одиннадцати. Впрочем, это не совсем так – что в числе прочего было показано физиком Эдвардом Виттенем.

К счастью, теория струн не основана на столь произвольном обращении с физическими понятиями, каким является выбор случайного числа измерений и пропорциональное ему расширение матрицы или метрического тензора Римана с последующей оценкой, сколько и каких сил поместится в этот тензор. Напротив, теория точно предсказывает число необходимых измерений, и это число равно десяти – четыре «обычных» пространственно-временных измерения, исследуемых при помощи телескопов, плюс шесть дополнительных.

Причина, по которой теория струн требует наличия именно десяти измерений, весьма сложна и основана на необходимости сохранения симметрии – важнейшем условии построения любой фундаментальной теории, – а также на необходимости достижения совместимости с квантовой механикой, являющейся, несомненно, одним из ключевых ингредиентов любой современной теории. Но по сути объяснение сводится к следующему: чем больше число измерений системы, тем больше в ней число возможных колебаний. Чтобы воспроизвести весь диапазон возможностей для нашей Вселенной, число допустимых типов колебаний, согласно теории струн, должно быть не просто очень велико, а еще и четко определено – и это число можно получить только в десятимерном пространстве. Несколько позже мы обсудим еще один вариант, или «обобщение» теории струн, носящее название М-теории и требующее одиннадцати измерений, но в настоящий момент мы не будем его касаться.

Струна, колебания которой ограничены одним измерением, может колебаться только в *продольном* направлении – путем сжатия и растяжения. В случае двух измерений колебания струны возникнут как в *продольном*, так и в перпендикулярном к нему *поперечном* направлении. Для трех и более измерений число независимых колебаний будет продолжать расти до тех пор, пока размерность не станет равной десяти (девять пространственных измерений и одно временное) – именно тот случай, в котором удовлетворяются математические требования теории струн. Вот почему теория струн требует как минимум десяти измерений. Строго говоря, причина, по которой теория струн требует ровно десять измерений, а не больше и не меньше, относится к понятию о *сокращении аномалий*, которое возвращает нас в 1984 год, к тому месту, на котором я прервал повествование.

Большинство струнных теорий, разработанных на тот момент, страдали наличием аномалий или несовместимостей, делающих все их предсказания бессмысленными. Эти теории, к примеру, приводили к возникновению неверного типа лево-правой симметрии – несовместимой с квантовой теорией. Ключевой прорыв был сделан Майклом Грином, в то время работавшим в Колледже Королевы Марии в Лондоне, и Джоном Шварцем из Калифорнийского технологического института. Основная проблема, которую удалось преодолеть Грину и Шварцу, относилась к так называемому *нарушению четности* – идее о том, что фундаментальные законы природы несимметричны в отношении зеркального отражения. Грин и Шварц обнаружили способ формулирования теории струн в таком виде, который подразумевал, что нарушение четности в системе действительно имеет место. Квантовые эффекты, из-за которых в теории струн возникали всевозможные несоответствия, в десятимерном пространстве удивительным образом взаимно уничтожились, породив тем самым надежды на то, что именно эта теория и является истинной. Успех Грина и Шварца обозначил начало того, что впоследствии было названо первой струнной революцией. То, что им удалось обойтись без аномалий, позволило говорить о способности данной теории привести к объяснению вполне реальных физических эффектов.

Отчасти задача исследователя состоит в том, чтобы убедиться в способности теории

струн дать ответ на вопрос: почему Вселенная именно такова, какова она есть? Этот ответ должен объяснить и причину, по которой пространство-время, в котором мы живем, выглядит четырехмерным, в то время как теория настаивает на его десятимерности. В теории струн это кажущееся несоответствие объясняется *компактификацией*. Это понятие не является совершенно новым, поскольку Калуца и Клейн (особенно Клейн) уже предполагали, что дополнительное измерение в их пятимерной теории на самом деле компактифицировано – сжато до столь малых размеров, что увидеть его было попросту невозможно. В аналогичной ситуации оказались и струнные теоретики – только они имели в своем распоряжении не одно, а шесть «лишних» измерений.

Слово «лишние» вводит в заблуждение, поскольку мы на самом деле не пытаемся избавиться от каких-либо измерений. Задача состоит в том, чтобы неким замысловатым образом свернуть эти измерения – придать им строго определенную геометрическую форму, которая позволила бы произвести магический акт компактификации, составляющий одну из основных задач теории струн. При этом количество возможных геометрий, ведущих к различным способам компактификации, чрезвычайно велико.

Вся идея, по словам гарвардского физика Кумруна Вафы, может быть представлена в виде простого уравнения, понятного каждому: $4+6=10$.⁵⁰ Этим можно ограничиться, хотя вы, возможно, захотите переформулировать его в виде: $10-6=4$, означая, что, скрыв (или вычтя) шесть измерений, мы получим десятимерную Вселенную, кажущуюся нам четырехмерной. Компактификацию с тем же успехом можно рассматривать как своеобразную разновидность умножения, известную как декартово, или *прямое*, произведение – произведение, в котором количества измерений складываются, а не умножаются. Соответствующее уравнение, описывающее результирующее многообразие, в котором четыре измерения объединяются с шестью ($4 \times 6 = 10$), предполагает, что наше десятимерное пространство-время имеет подструктуру, являющуюся прямым произведением четырех- и шестимерного пространства-времени, точно так же как плоскость представляет собой прямое произведение двух линий, а цилиндр – прямое произведение линии и окружности. Цилиндр, как уже говорилось, представляет собой наглядную и часто используемую иллюстрацию идеи Калуцы и Клейна. Если вы представите наше четырехмерное пространство-время в виде линии, имеющей бесконечную протяженность в обоих направлениях, а затем мысленно разрежете ее и рассмотрите один из концов в микроскоп, то сможете увидеть, что на самом деле эта линия имеет некую толщину, и правильнее было бы говорить о ней не как о линии, а как о цилиндре, хотя и очень маленького радиуса. Именно внутри этой окружности крошечного радиуса и спрятано пятое измерение теории Калуцы-Клейна. Теория струн продвигает эту идею на несколько шагов дальше, утверждая, что, посмотрев на сечение этого тонкого цилиндра при помощи еще более мощного микроскопа, можно обнаружить не одно, а целых шесть скрытых внутри него измерений. Независимо от того, где вы находитесь – в четырехмерном пространстве-времени или на поверхности бесконечно длинного цилиндра, – к каждой точке прикреплено крошечное шестимерное пространство. И независимо от того, где вы находитесь в этом бесконечном пространстве, можете быть уверены, что компактное шестимерное пространство, спрятанное «по соседству», будет точно таким же.

Эта картина, конечно, является весьма грубой и схематичной и ничего не говорит нам о подлинной геометрии этого компактифицированного шестимерного мира. Возьмем, к примеру, обычную сферу, представляющую собой двухмерную поверхность, и мысленно сожмем ее в точку, то есть превратим ее в нульмерный объект. Таким образом, мы компактифицировали два измерения, превратив их в ничто. Можно попытаться таким же образом свести десять измерений к четырем, сжимая теперь уже шестимерную сферу $a+b^{22}+c^2+d^2+e^2+f^2=1$, но в качестве геометрии дополнительных измерений этот вариант не пройдет; уравнения теории струн требуют строго определенной структуры шестимерного пространства, и обычная сфера этим требованиям не соответствует.

Было ясно, что требовалась более сложная форма, и после успеха Грина и Шварца с

50 Cumrun Vafa (Harvard University), interview with author, January 19, 2007.

нарушением четности задача нахождения этой формы вышла на первый план. Как только физикам стал бы известен точный вид многообразия, в которое сворачиваются дополнительные шесть измерений, они, наконец, смогли бы перейти от слов к делу.

Следующий шаг был предпринят в 1984 году, когда Грин, Шварц и Питер Вест из Кингс-Колледжа заинтересовались КЗ-поверхностями – широким классом комплексных многообразий, который изучался математиками уже более столетия, хотя внимание именно физиков КЗ привлекли, когда мои доказательства гипотезы Калаби показали, что эти поверхности могут поддерживать риччи-плоскую метрику. «Я понял, что компактное пространство должно быть риччи-плоским, для того чтобы космологическая постоянная пространства более низкой размерности, в котором мы живем, не была положительной – как и требовали все теории того времени», – вспоминает Шварц.⁵¹ В свете последующего открытия темной энергии, предполагающей наличие чрезвычайно малой, но все же положительной космологической постоянной, пришлось разработать более сложные варианты теории, предполагающей возникновение очень малой космологической постоянной в нашем четырехмерном мире из компактных риччи-плоских пространств, – об этом пойдет речь в десятой главе.

Поверхность КЗ, обязанная своим названием горе К2 и трем математикам, исследовавшим геометрию подобных пространств, – Эрнсту Куммеру, упоминавшемуся ранее Эриху Кэлеру и Кунихико Кодайра, – была выбрана для предварительной проверки несмотря на наличие у нее только четырех вещественных (или двух комплексных) измерений вместо требуемых шести, во многом благодаря тому, что коллеги убедили Грина, Шварца и Веста в отсутствии аналогов этих многообразий более высокой размерности. Однако, как говорит Грин: «Я совершенно уверен в том, что мы нашли бы способ расставить все по местам... даже если бы в то время и не получили этой информации [о существовании шестимерных аналогов риччи-плоских КЗ поверхностей]». ⁵² «То, что исследование было начато с испытанных КЗ поверхностей, – добавляет Шварц, – было обусловлено совсем не желанием найти подлинный вид компактификации. Мы просто хотели поиграть, посмотреть, что мы получим в результате и как это связано с сокращением аномалий». ⁵³ С тех пор поверхности КЗ имеют неопределимое значение для струнных теоретиков, исполняя роль «игрушечных моделей» для компактификации. Они также незаменимы при исследовании двойственностей в теории струн, о которых пойдет речь в следующей главе.

Примерно в то же время, в 1984 году, физик Эндрю Строминджер, сейчас работающий в Гарварде, а тогда – в Институте перспективных исследований (ИПИ) в Принстоне, объединил свои усилия с физиком-теоретиком Филиппом Канделасом, сейчас работающим в Оксфорде, а тогда – в Техасском университете, для того чтобы определить класс шестимерных пространств, удовлетворяющий строгим условиям теории струн. Им было известно, что внутренние пространства этих шестимерных многообразий должны быть компактными, чтобы иметь возможность перейти от десяти к четырем измерениям, а кривизна должна удовлетворять как уравнениям теории гравитации Эйнштейна, так и требованиям симметрии, налагаемым теорией струн. Эти исследования в конце концов привели их и еще двоих их коллег – Гари Горовица из Калифорнийского университета и Виттена – к тем пространствам, существование которых я установил, доказав гипотезу Калаби, хотя Виттен пришел к этим многообразиям собственным путем. «Одной из важнейших особенностей открытий в современной науке является то, что физики и математики по совершенно разным причинам зачастую приходят к одним и тем же структурам, – делится своим наблюдением Строминджер. – Порой физики обгоняют математиков, порой математики обгоняют физиков. В данном случае математики оказались впереди. Им удалось понять важность этих пространств раньше нас». ⁵⁴

51 John Schwarz (California Institute of Technology), interview with author, August 13, 2008.

52 Michael Green (University of Cambridge), e-mail letter to author, August 15, 2008.

53 John Schwarz, interview with author, August 13, 2008.

54 Andrew Strominger (Harvard University), interview with author, February 7, 2007.

То, что говорит Строминджер, несомненно является правдой, но так же верно и то, что математики, и в их числе я сам, изначально не имели ни малейшего представления о связи пространств Калаби-Яу с физикой. Причина, по которой я занялся исследованием этих пространств, состояла в том, что я находил их чрезвычайно красивыми; именно их необычайная красота зародила во мне подозрение, что физики обязательно должны взглянуть на них повнимательнее, что эти пространства содержат в себе множество загадок, достойных того, чтобы быть открытыми. В конечном итоге, именно физикам предстояло создать эту связь, построив мост между геометрией и физикой и положив тем самым начало долгому и продуктивному сотрудничеству между двумя областями знаний – сотрудничеству, которое процветает и по сей день.

История установления этой связи интересна сама по себе. Строминджер подытожил ее следующим образом: «Суперсимметрия позволила перебросить мост к голономии, а голономия стала мостом к пространствам Калаби-Яу».⁵⁵

Как вы помните, мы кратко обсудили суперсимметрию в четвертой главе, в контексте вопроса об одной из разновидностей внутренней – ограниченной симметрии – в отличие от более радикальной, глобальной, симметрии такого объекта, как, например, сфера, – которую должны были демонстрировать многообразия Калаби-Яу будучи классом кэлеровых многообразий. Эта внутренняя симметрия представляет собой часть того, что мы подразумеваем под термином «суперсимметрия», но прежде чем мы попытаемся нарисовать ясную картину, скажем несколько слов о голономии.

Грубо говоря, *голономия* является мерой, характеризующей поведение касательных векторов для определенной поверхности при попытке их параллельного переноса по петле, охватывающей данную поверхность. Представьте, к примеру, что вы стоите на Северном полюсе и держите в руке копьё, направленное по касательной к земной поверхности. Сначала вы движетесь строго в направлении экватора вдоль того направления, в котором указывает ваше копьё. Достигнув экватора, вы обнаружите, что теперь ваше копьё направлено перпендикулярно экватору в сторону Южного полюса. После этого, двигаясь по экватору, вы обходите половину земной окружности, держа копьё направленным на юг. Пройдя это расстояние, вы вновь держите путь на Северный полюс, не меняя направления копья. Оказавшись на Северном полюсе, вы неожиданно обнаружите, что, несмотря на все ваши старания, копьё, которое вы держали в руках, оказалось повернутым на 180 градусов относительно первоначального направления.

Мы могли бы повторить этот процесс любое число раз, совершая более длинные или более короткие путешествия вдоль экватора, каждый раз обнаруживая, что копьё повернулось на некоторый угол, иногда меньше 180 градусов, иногда больше – в зависимости от длины нашего пути по экватору. Для того чтобы определить голономию нашей планеты, которую в первом приближении можно считать двухмерной сферой, рассмотрим все возможные пути – или все возможные петли, – которые можно проложить на ее поверхности. Оказывается, на поверхности сферы можно получить любой наперед заданный угол поворота от 0 до 360 градусов, делая соответствующую петлю больше или меньше. Можно даже получить угол больше 360 градусов, пройдя один и тот же путь два или более раз. Принято говорить, что двумерная сфера относится к группе голономии $SO(2)$ или к специальной ортогональной группе 2 , содержащей в себе все возможные углы. Сферы более высоких размерностей относятся к группам $SO(n)$, содержащим все возможные вращения, сохраняющие ориентацию, а n относится к числу измерений.

55 Andrew Strominger, interview with author, November 1, 2007.

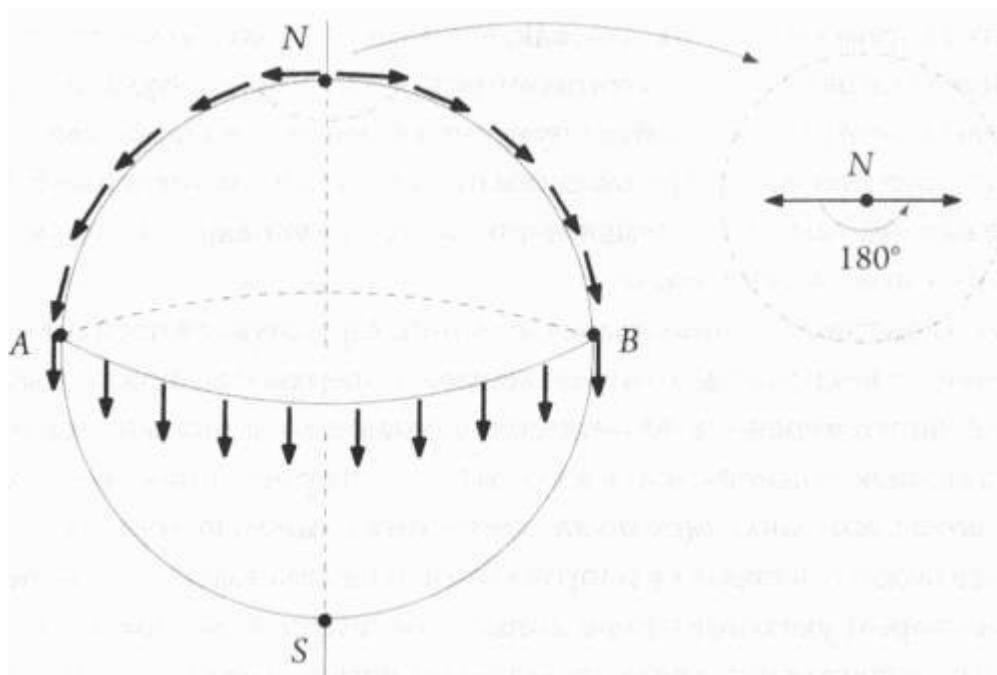


Рис. 6.1. Одним из способов классификации пространства или поверхности является его классификация при помощи голономии, показывающей, что происходит с касательным вектором при параллельном переносе в таком пространстве – то есть перемещении, при котором мы стремимся сохранить направление вектора, несмотря на искривленность траектории. В данном примере, взяв на северном полюсе касательный вектор, направленный в точку А, мы начинаем движение в сторону экватора. По достижении экватора оказывается, что вектор теперь направлен на юг. Сохраняя это направление, мы перемещаемся вдоль экватора из точки А в точку В, проходя при этом половину земной окружности. После этого мы опять движемся на северный полюс, вновь сохраняя направление вектора неизменным. Оказавшись на северном полюсе, мы неожиданно обнаруживаем, что вектор оказался повернутым на 180 градусов относительно первоначального направления, несмотря на все наши попытки сохранить его направление неизменным

Многообразия Калаби-Яу, с другой стороны, относятся к более ограниченной группе голономии $SU(n)$, что означает специальную унитарную группу, имеющую n комплексных измерений. Те из многообразий Калаби-Яу, к которым проявляет особый интерес теория струн, имеют три комплексных измерения, что позволяет поместить их в группу голономии $SU(3)$. Конечно, пространства Калаби-Яу намного сложнее сфер, и голономия $SU(3)$ намного сложнее предыдущего примера с вектором, который поворачивается при движении по поверхности сферы, несмотря на все наши усилия сохранять его направление неизменным. Более того, поскольку в многообразиях Калаби-Яу, в отличие от сферы, отсутствует глобальная симметрия, не существует осей, при повороте вокруг которых эти многообразия совпали бы сами с собой. Впрочем, они имеют более ограниченный тип симметрии, который, как мы уже говорили, относится к голономии и суперсимметрии. Для многообразия обладание суперсимметрией равнозначно обладанию так называемым ковариантно-постоянным спинором. Спиноры, хотя их весьма тяжело описать, во многом аналогичны касательным векторам. Для кэлерова многообразия существует единственный спинор, который остается неизменным при параллельном переносе вдоль любой замкнутой петли. В многообразиях Калаби-Яу – как и во всей группе $SU(3)$, к которой они принадлежат, помимо этого спинора существует еще один, который также не изменяется при параллельном переносе по любой замкнутой петле, принадлежащей многообразию.

Наличие этих спиноров помогает убедиться в наличии суперсимметрии для соответствующих многообразий, и именно требование суперсимметрии определенного типа было предъявлено Строминджером и Канделасом к группе $SU(3)$ в первую очередь. Группа

SU(3), в свою очередь, является группой голономии, связанной с компактными кэлеровыми многообразиями с обращаемым в нуль первым классом Черна и нулевой кривизной Риччи. Иными словами, голономия SU(3) неявно подразумевает многообразия Калаби-Яу. Или, что эквивалентно, если нужно найти такое решение, которое удовлетворяло бы как уравнениям Эйнштейна, так и уравнениям суперсимметрии – и если при этом нужно оставить дополнительные измерения скрытыми и сохранить суперсимметрию в наблюдаемом мире, – единственным решением будут многообразия Калаби-Яу. Как сказал физик из Университета Джона Хопкинса Раман Сандрам: «Они представляют собой прекрасный математический ответ».⁵⁶

«Я едва ли хорошо разбирался в математике в то время, но мне удалось установить связь с многообразиями Калаби-Яу благодаря группе голономии, их характеризующей, – говорит Строминджер. – Я обнаружил статью Яу в библиотеке и мало что из нее понял, но из того немногого, что мне удалось понять, я сделал однозначный вывод о том, что эти многообразия – это как раз то, что доктор прописал».⁵⁷ Хотя чтение моих статей далеко не для всех становится незабываемым жизненным опытом, Строминджер действительно говорил (почти через двадцать лет после того, как это произошло) о том возбуждении, которое он испытал, впервые наткнувшись на мое доказательство гипотезы Калаби.⁵⁸ Однако прежде чем полностью предаться своим чувствам, Строминджер позвонил мне, чтобы убедиться в том, что он действительно правильно понял мою статью. Я подтвердил его ожидания. В тот момент я осознал, что после восьми лет поисков физика наконец обнаружила многообразия Калаби-Яу.

Итак, в этот укромный уголок математики физиков привела суперсимметрия, – впрочем, я еще не объяснил, по какой именно причине принято рассматривать суперсимметрию как нечто сверхъестественно важное, если не считать таковым общего утверждения о значимости симметрии в понимании любого типа многообразий. Как поясняет принстонский физик Хуан Малдасена: «Суперсимметрия не только делает расчеты проще, она делает их возможными. Почему? Потому что проще описать движение сферы, катящейся с идеального холма, чем движение футбольного мяча по реальному склону, траектория которого будет в значительной степени случайна».⁵⁹

Наличие симметрии делает все проблемы более простыми для разрешения. Предположим, что нам необходимо найти все решения уравнения $x^2 = 4$. Это займет много времени, поскольку число решений этого уравнения бесконечно. Если, однако, ввести условие симметрии, $x = y$, то решений будет только два: 2 и -2. Аналогично, если известно, что необходимые нам точки плоскости x - y симметричны относительно начала координат, то есть находятся на окружности, то вместо двух переменных – x и y – для описания этой окружности вам будет достаточно только одной – ее радиуса. Подобным образом и суперсимметрия сокращает число переменных, значительно упрощая тем самым решаемые задачи, накладывая ограничения на те геометрические формы, которые могут принимать скрытые шесть измерений. По словам математика из Техасского университета Дэна Фрида, «это ограничение и дает вам Калаби-Яу».⁶⁰

Конечно, мы не имеем права настаивать на существовании суперсимметрии в нашей Вселенной только ради того, чтобы сделать наши расчеты проще. Должна существовать более веская причина, чем простое удобство. И она существует. Одним из преимуществ теории суперсимметрии является то, что она автоматически обеспечивает устойчивое состояние вакуума – основного состояния в общей теории относительности, благодаря чему наша Вселенная может избежать постоянного падения во все более и более глубокие энергетические ямы. Эта идея относится к гипотезе о положительности массы, о которой уже шла речь в третьей главе. На самом деле суперсимметрия была одним из инструментов

56 Raman Sundrum (Johns Hopkins University), interview with author, January 25, 2007.

57 Andrew Strominger, interview with author, February 7, 2007.

58 Dennis Overbye, “One Cosmic Question, Too Many Answers,” *New York Times*, September 2, 2003.

59 Juan Maldacena (Princeton University), interview with author, September 9, 2007.

60 Dan Freed (University of Texas), interview with author, June 24, 2008.

Эдварда Виттена в доказательстве его гипотезы, основанной на физических представлениях, однако в более нелинейном математическом подходе, разработанном Ричардом Шоном и мной, ей места не нашлось.

Но большинство физиков заинтересованы в идее суперсимметрии по иной причине, которая, собственно, и привела к возникновению этого понятия. Для физиков наиболее важным аспектом является концепция симметрии, связывающей элементарные частицы материи, иначе называемые *фермионами*, к которым относятся, например, кварки или электроны, и частицы, отвечающие за взаимодействия, иначе называемые *бозонами*, – такие как фотоны и глюоны. Суперсимметрия приводит к возникновению подобия, своего рода математической эквивалентности, между силами и материальными объектами, то есть между этими двумя классами частиц. Теория утверждает, что каждый фермион связан с определенным бозоном – его *суперпартнером*, и то же самое верно для любого бозона. Таким образом, теория предсказывает существование целого класса элементарных частиц с забавными названиями, такими как *скварки*, *сэлектроны*, *фотино* и *глюино*, – более тяжелыми по сравнению со своими известными аналогами и со спином, отличающимся от спина своих партнеров на $1/2$. До настоящего времени эти суперпартнеры в природе не наблюдались, хотя исследователи продолжают их поиск при помощи мощнейших ускорителей (см. двенадцатую главу).

Мир, в котором мы живем, называемый физиками «миром низких энергий», несомненно, суперсимметричным не является. В то же время принято считать, что суперсимметрия доминирует в области высоких энергий, и в этой области элементарные частицы и их суперпартнеры идентичны. Но как только энергия становится ниже некоего определенного значения, суперсимметрия «разрушается», и тот мир, в котором мы живем, является миром нарушенной суперсимметрии, где элементарные частицы и их суперпартнеры различны как по массе, так и по другим свойствам. Разрушившись, суперсимметрия не исчезает полностью, но переходит в скрытую фазу. По словам физика Тристана Хабша из Университета Говарда, моего бывшего постдока, можно понять существование различия в массах, мысленно заменив суперсимметрию на вращательную симметрию некоего объекта, например вертикально расположенного гибкого стержня. Представьте, что вы закрепили концы стержня и изгибаете его в двух направлениях, перпендикулярных стержню. Вне зависимости от того, под каким углом вы на него нажимаете, объясняет Хабш, пока вы будете делать это в направлении, перпендикулярном направлению стержня, каждое из этих возмущений будет требовать одно и то же количество энергии. «И поскольку эти малые перемещения связаны друг с другом посредством вращательной симметрии, можно свободно заменять одно из них на другое».

Предположим, что мы ударили по стержню, возбудив в нем поперечные колебания. Эти колебания будут обладать вращательной симметрией и будут эквивалентны двум различным элементарным частицам, а энергия колебаний будет определять массу частиц. Наличие вращательной симметрии (или суперсимметрии, в случае теории струн) позволяет двум элементарным частицам иметь одинаковую массу и оставаться неразличимыми во всех прочих отношениях.

Вращательную симметрию – в данном случае служащую заменой суперсимметрии – можно разрушить, согнув стержень наподобие лука. Чем сильнее мы сведем его концы, тем больше будет изгиб и тем сильнее нарушится симметрия. «После того как симметрия нарушена, по-прежнему существуют два вида колебаний, но они уже не связаны друг с другом вращательной симметрией», – говорит Хабш. Чтобы возбудить колебания в плоскости изгиба, как и раньше, требуется энергия, и чем больше величина изгиба, тем эта энергия больше. Но если толкнуть стержень в направлении, перпендикулярном плоскости изгиба, стержень придет во вращательное движение, не требующее для своего поддержания никаких затрат энергии (конечно, при условии, что затратами энергии на преодоление силы трения между концами стержня и их креплениями можно пренебречь). Иными словами, между этими двумя движениями существует разница в энергиях, или энергетическая щель, – одно из

них требует затрат энергии, а второе – нет, что соответствует энергетической разнице (или разнице в массах) между безмассовой элементарной частицей и ее суперпартнером, обладающим массой, в случае разрушенной суперсимметрии.⁶¹ Физики пытаются обнаружить признаки существования подобной энергетической щели и таким образом доказать существование обладающих массой суперсимметричных партнеров привычных нам частиц в высокоэнергетических экспериментах, приводящихся в настоящее время на Большом адронном коллайдере.

Если с точки зрения математика способ объединения сил и материи при помощи суперсимметрии прекрасен сам по себе, то физики-теоретики интересуются симметрией по другой причине, выходящей за пределы ее эстетически привлекательных аспектов. Без суперсимметрии теория струн становится малоосмысленной. Она начинает предсказывать немыслимые частицы типа тахионов, движущихся быстрее света и имеющих отрицательное значение квадрата массы – то есть их масса содержит в себе комплексную единицу i . Большинство физических теорий отвергают возможность существования столь странных объектов. Суперсимметрия, возможно, не нуждается в теории струн – хотя она обязана своим развитием именно этой теории – но теория струн, несомненно, очень многое приобретает за счет суперсимметрии. Суперсимметрия же, как уже говорилось выше, была именно тем понятием, которое привело физиков на порог двери, за которой скрывались многообразия Калаби-Яу.

Когда Строминджер и Канделас получили в свои руки многообразие Калаби-Яу, у них тут же возникло страстное желание сделать следующий шаг – проверить, действительно ли это то многообразие, которое они искали, то самое, которое обуславливает всю физику, с которой мы имеем дело. Они приехали в Санта-Барбару в 1984 году, горя желанием приступить к этому проекту, и вскоре сошлись с Горовицем, который годом раньше перешел в Санта-Барбару из ИПИ. Помимо всего прочего, они были в курсе, что Горовиц являлся моим постдоком и в результате этого сотрудничества знал больше о гипотезе Калаби, чем ему нужно было для его непосредственной работы. Когда Горовиц понял, чем занимаются Строминджер и Канделас, а именно пытаются определить математические требования к внутреннему пространству теории струн, – он подтвердил, что многообразия Калаби-Яу полностью им соответствуют. Имея более близкие отношения с этой областью математики, чем кто-либо другой, Горовиц стал весьма ценным членом команды.

Вскоре после этого Строминджер посетил Виттена в Принстоне и посвятил его в те результаты, которые им удалось получить. Оказалось, что Виттен независимо от них добрался практически до того же места, хотя и попал туда несколько иным путем. Канделас и Строминджер начинали с утверждения о существовании в теории струн десяти измерений, которые должны были быть компактифицированы в некое шестимерное многообразие. Затем физики попытались выяснить, какая из разновидностей шестимерных пространств (помимо прочих требований) дает правильный тип суперсимметрии. С другой стороны, Виттен подошел к проблеме с точки зрения замкнутой струны, движущейся в пространстве-времени и заметающей при этом поверхность с одним комплексным и двумя вещественными измерениями, известную также как риманова поверхность. Подобно обычной поверхности в дифференциальной геометрии, риманова поверхность оснащена метрикой, позволяющей определять расстояние между любыми двумя точками поверхности, и «механизмом» измерения углов. От всех остальных поверхностей римановы поверхности отличает возможность обладания (за некоторыми незначительными исключениями) уникальной метрикой с отрицательной (-1) кривизной во всех точках.

Расчеты Виттена в рамках двухмерной разновидности квантовой теории, называемой *конформной теорией поля*, заметно отличались от расчетов его коллег, поскольку он сделал намного меньше предположений относительно лежащего в ее основе пространства-времени. Впрочем, он пришел к тому же заключению, что и другие, а именно что геометрия внутренних пространств должна принадлежать к типу Калаби-Яу. Ничто другое не

61 Tristan Hubsch (Howard University), interview with author, August 30, 2008.

подходило. «Тот факт, что результат был получен двумя независимыми путями, укреплял уверенность в его истинности, – говорит Горовиц. – Более того, это свидетельствовало в пользу того, что это наиболее естественный путь проведения компактификации, поскольку к одним и тем же условиям мы пришли с двух совершенно разных стартовых позиций».⁶²

Четверка закончила свою работу в 1984 году и моментально поделилась своими открытиями с коллегами, выпустив несколько препринтов, хотя их статья вышла только через год. Эта статья ввела в оборот термин «пространства Калаби-Яу», впервые познакомив физиков со странным шестимерным миром.

До публикации в 1985 году статьи Калаби «не ожидал, что наша работа может иметь какое-либо физическое значение. Это была чистая геометрия», – по его же собственным словам. Вышедшая статья, однако, изменила все, введя многообразия Калаби-Яу в самое сердце теоретической физики. «Она также привлекла неожиданное внимание к двум математикам, причастным к открытию этих пространств, – вспоминает Калаби, – поместив нас на передовицы газет. Подобные вещи всегда льстят, это относится и к той известности, которая пришла к нам с началом разговоров о пространствах Калаби-Яу, хотя на самом деле наша заслуга была не столь велика».⁶³

Наша работа, по крайней мере, на некоторое время стала последним пискom моды в физике, перекинувшись с «газетных передовиц» и на другие области. Многообразия Калаби-Яу стали названием экспериментальной театральной постановки «Калаби-Яу», заглавием альбома в жанре электро/синтпоп группы DopplerEffekt – «Пространства Калаби-Яу», названием картины «Мона Лиза Калаби-Яу» итальянского художника Франческо Мартино и мишенью шутки в рассказе Вуди Аллена из «Нью Йоркера»: «Мой милый, – сказала она, кокетливо улыбаясь и свернувшись в форме поверхности Калаби-Яу».⁶⁴ Известность, которую приобрела эта столь трудная для понимания идея, была весьма неожиданной, учитывая то, что многообразия данного типа непросто даже описать словами, не то что представить. Пространство, обладающее шестью измерениями, по замечанию одного физика, имеет «на три измерения больше, чем то, которое я способен вообразить». Картина осложняется и присутствием скрученностей, многомерных дыр, которых может быть как небольшое количество, так и свыше пятисот, словно в элитном сорте швейцарского сыра.

62 Gary Horowitz (University of California, Santa Barbara), interview with author, February 15, 2007.

63 Eugenio Calabi (University of Pennsylvania), interview with author, October 18, 2007.

64 Woody Allen, “Strung Out,” *New Yorker*, July 28, 2003.

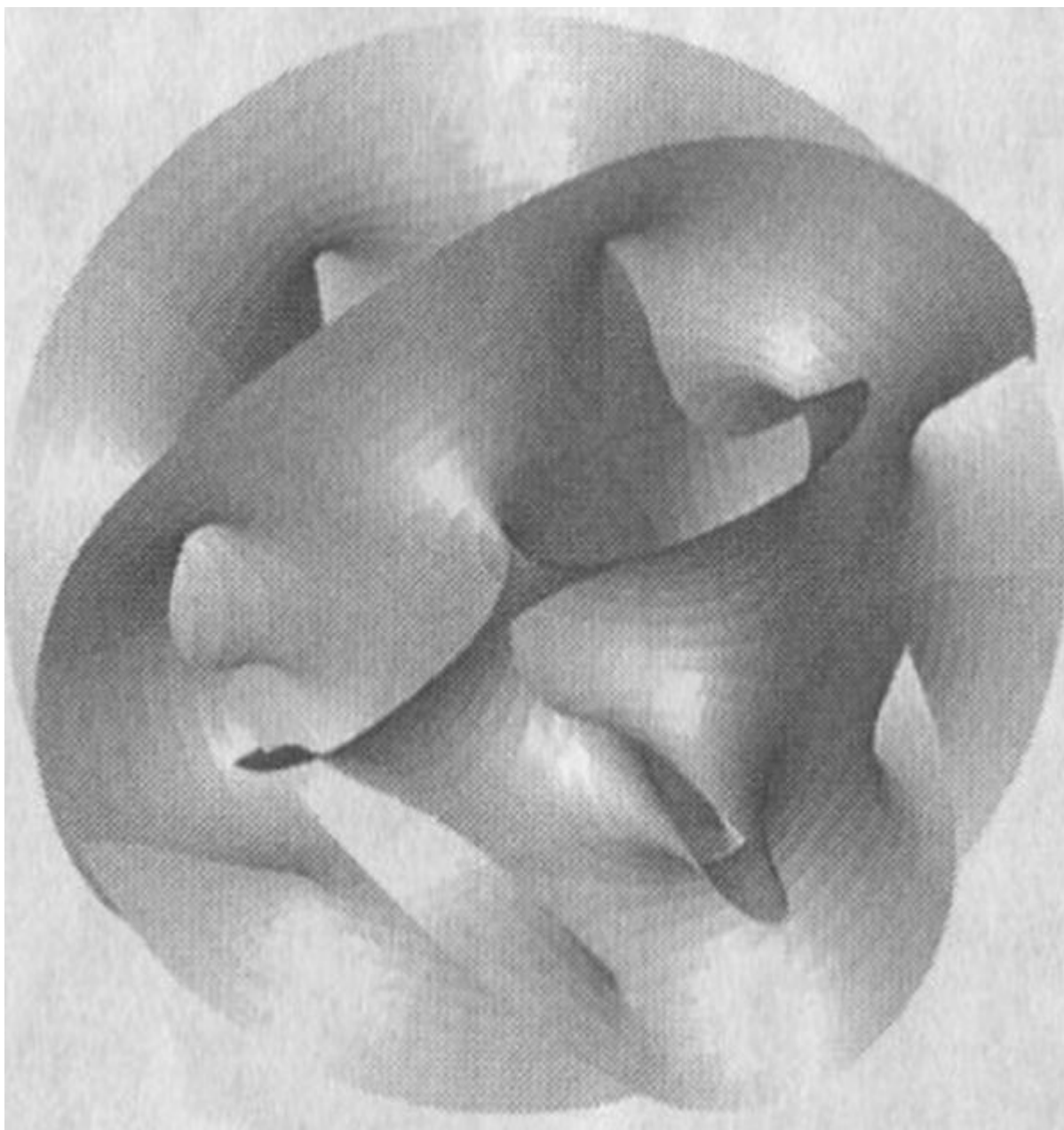


Рис. 6.2. Наглядное изображение двухмерного «поперечного сечения» шестимерного многообразия Калаби-Яу (Эндрю Хэнсон, Университет Индианы)

Возможно, наиболее простой особенностью пространств Калаби-Яу является их компактность. Многообразия Калаби-Яу похожи на бесконечный лист бумаги, но не ровный и простирающийся неограниченно во всех направлениях, а скомканный и покрытый складками, но скомканный строго определенным образом. Компактное пространство не содержит областей с бесконечной длиной или шириной, так что при наличии достаточно большого чемодана пространство легко уместится внутри него. Можно выразиться по-другому: по словам Лайама Макаллистера из Корнеллского университета, компактное пространство «можно накрыть одеялом из конечного числа лоскутов» – при этом каждый лоскут, разумеется, должен быть конечного размера.⁶⁵ Оказавшись на поверхности подобного пространства и начав прогулку по «большому кругу», можно вернуться в ту же точку, из которой вы вышли. Впрочем, даже если вы не вернетесь именно в ту точку, вы все же никогда не уйдете бесконечно далеко от точки, из которой вы вышли, вне зависимости от продолжительности вашей прогулки. Назвать пространство Калаби-Яу компактным никоим образом не будет преувеличением. Хотя вопрос о точном размере подобного многообразия

⁶⁵ Liam McAllister (Cornell University), e-mail letter to author, April 24, 2009.

по-прежнему остается открытым, очевидно, что оно должно быть чрезвычайно мало и иметь диаметр порядка 10 сантиметров, что в двести восемьдесят квадриллионов раз меньше классического радиуса электрона. Обитатели четырехмерного пространства, подобные нам, не в силах даже увидеть это шестимерное пространство, но оно все же всегда на месте, будучи прикреплено к каждой точке нашего пространства. Мы просто слишком велики, чтобы зайти внутрь и осмотреться.

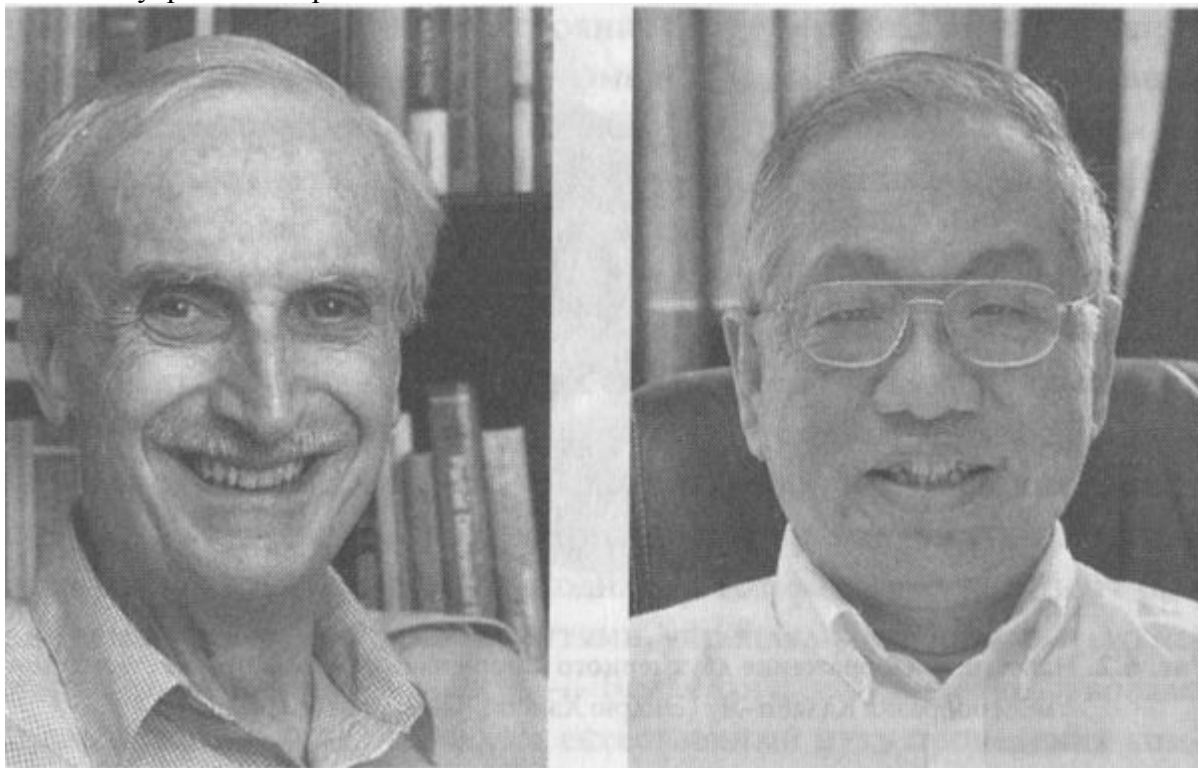


Рис. 6.3. Калаби-Яу собственной персоной: Эудженио Калаби (*слева*) и Шинтан Яу (фотография Калаби публикуется с разрешения Э. Калаби, фотография Яу сделана Сьюзан Таун Гильберт)

Это, впрочем, совсем не значит, что мы не взаимодействуем с этими невидимыми измерениями. Прогуливаясь или двигая рукой, мы каждую секунду пронизываем скрытые измерения, даже не замечая этого, – эти движения в каком-то смысле компенсируют друг друга. Представим себе стадо северных оленей в сто тысяч голов, движущееся в одном направлении – например, с прибрежной равнины Аляски на хребет Брукса, где их ждет прекрасная долина, в которой они смогут провести зиму. «Каждое животное, – объясняет Алан Адамс из Массачусетского технологического института, – пройдет эти 800 миль по своей собственной траектории, но в целом отклонения от среднего компенсируют друг друга, и можно считать все стадо движущимся по одному общему пути».³⁰ Наши краткие вторжения в пространства Калаби-Яу взаимно компенсируют друг друга аналогичным образом, что делает их несущественными по сравнению с более длинными путями, которые мы проходим в четырехмерном пространстве.

30 Allan Adams (MIT), interview with author, August 10, 2007.

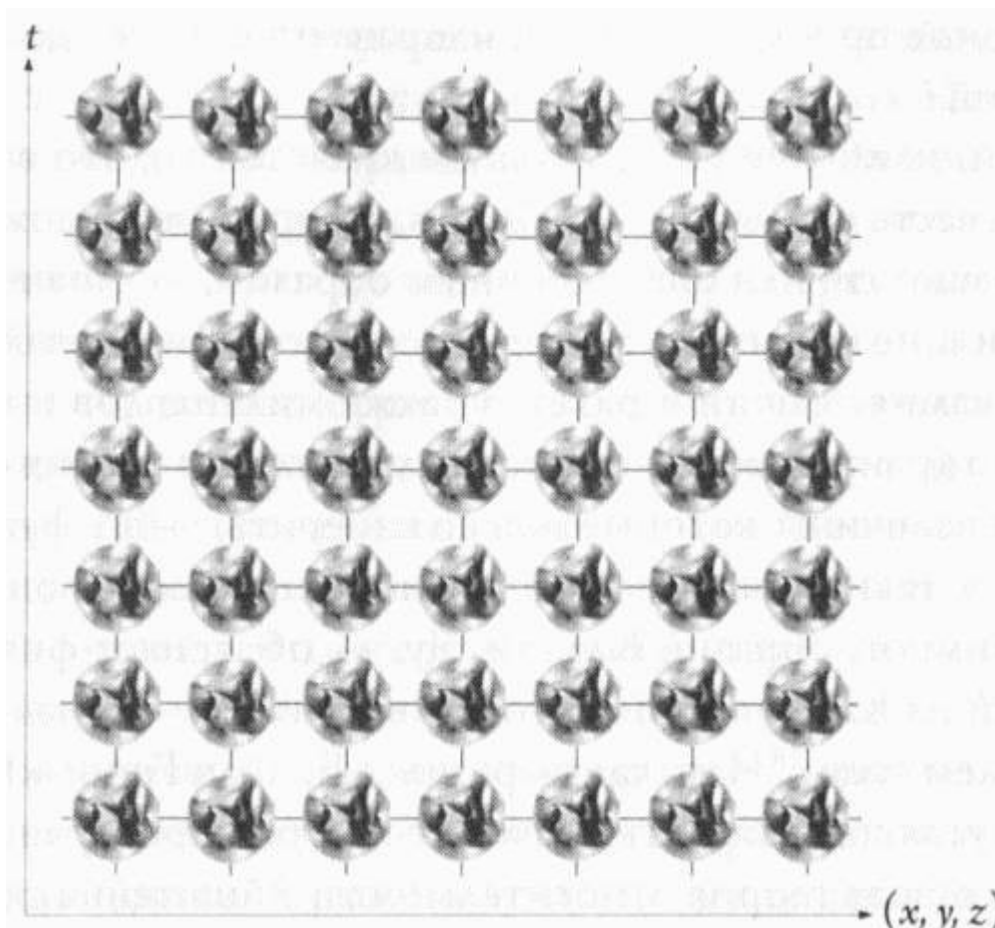


Рис. 6.4. Если теория струн верна, то в любой точке четырехмерного пространства-времени присутствует скрытое шестимерное пространство Калаби-Яу (изображения многообразий Калаби-Яу сделаны Эндрю Хэнсоном, Университет Индианы)

Можно объяснить и по-другому: мы живем в бесконечном пространстве, и наши горизонты чрезвычайно широки, даже если та часть пространства, которую мы успели посетить, чрезвычайно мала. Однако куда бы мы ни шли в этом большом и широком мире, везде «на расстоянии вытянутой руки» нас будет сопровождать крошечное пространство, полный доступ к которому мы никогда не получим. Представим себе необычную систему координат, в которой ось x представляет собой наше бесконечное четырехмерное пространство, а ось y – внутреннее пространство Калаби-Яу. Каждой точке на оси x соответствует скрытая шестимерная область. Напротив, каждой точке на оси y соответствует четырехмерное пространство или направление, также доступное для исследований.

Пожалуй, наиболее удивительным является то, что эта скрытая, внутренняя часть Вселенной – область, которую невозможно увидеть, ощупать, понюхать или ощутить иным образом, – может оказывать большее влияние на физические процессы, чем привычный нам мир из кирпича и камня, машин и ракет, а также миллиардов и миллиардов галактик. По крайней мере, именно это утверждает теория струн. «Все физические величины, которые можно измерить, – все фундаментальные понятия, такие как масса кварков и электронов, – определяются геометрией многообразий Калаби-Яу, – объясняет физик Джозеф Полчинский из Калифорнийского университета. – Зная форму, мы, по сути, знаем все».⁶⁶ Или, как выразился Брайан Грин: «Код Вселенной можно успешно записать языком геометрии пространств Калаби-Яу».⁶⁷ Если общая теория относительности Эйнштейна сводит гравитацию к геометрии, то струнные теоретики надеются развить это утверждение дальше, доказав, что геометрия в виде многообразий Калаби-Яу лежит в основе не только гравитации,

⁶⁶ Joe Polchinski (University of California, Santa Barbara), interview with author, January 29, 2007.

⁶⁷ Brian Greene, *The Fabric of the Cosmos* (New York: Alfred A. Knopf, 2004), p. 372.

но и всей физики в целом.

Я, конечно, не собираюсь ставить под сомнение эти фундаментальные утверждения. Но разумный человек может задаться вопросом: если гипотеза Калаби слишком хороша для того, чтобы быть истинной, то как относиться к вышеуказанному утверждению? И каким образом можно объяснить все вышесказанное? Я опасаясь, что настоящее объяснение покажется кому-то неудовлетворительным и даже представляющим собой подобие порочного круга – способность многообразий Калаби-Яу к столь чудесным свершениям объясняется тем, что это их свойство с самого начала было встроено в механизм работы теории струн. Впрочем, даже если и так, то все же возможно дать некое общее представление о том, как этот «механизм» – с десятимерными многообразиями на входе и четырехмерной физикой на выходе – работает на самом деле. Попробуем представить максимально упрощенную картину способа получения элементарных частиц и их масс из заданного многообразия Калаби-Яу при учете того, что соответствующее многообразие является *неодносвязным*. Неодносвязное многообразие подобно тору с одной или большим числом дырок, часть петель которого, находящихся на его поверхности, не могут быть стянуты в точку, в противоположность сфере – односвязной поверхности, на которой любая петля может быть стянута в точку подобно тому как натянутая на глобус упругая резиновая лента соскальзывает с экватора на один из полюсов. Начав со сложного шестимерного многообразия с определенным числом дырок, рассчитаем все возможные пути, которыми можно пропустить струны через многообразие, проходя через различные дырки один или более раз. Это нелегкая задача, поскольку путей пропускания струн через многообразие существует огромное множество, а петли могут иметь разные размеры, зависящие, в свою очередь, от размеров дырок. Из всех этих возможностей вы можете составить список потенциальных частиц. Массы частиц можно определить, умножая длины струн на их натяжение, эквивалентное линейной плотности энергии струны, входящей в кинетическую энергию колебания. Объекты, получаемые таким образом, могут иметь любое число измерений между нулем и шестью. Некоторые из них разрешены, некоторые – нет. Взяв все разрешенные объекты и все разрешенные движения, вы и получите окончательный список частиц и их масс.

Рассматривая этот вопрос с другой стороны, можно отметить, что, согласно представлениям, царящим в квантовой физике, в силу концепции так называемого корпускулярно-волнового дуализма, каждую частицу можно представить в виде волны и каждую волну в виде частицы. Различные частицы в теории струн, как уже говорилось ранее, соответствуют различным модам колебаний струны, тогда как струна, колеблющаяся определенным, заранее заданным образом, также подобна волне. Вопрос в том, чтобы понять, как геометрия этих пространств будет влиять на возникающие волны.

Представим, что пространство, о котором идет речь, это Тихий океан, и мы находимся в его середине, за тысячи миль от ближайшего континента и намного выше его дна. Можно представить себе, что в волны, возникающие возле нас на поверхности океана, практически не будут зависеть от формы или топографии океанического дна, находящегося под нами на расстоянии многих миль. Но в ограниченном пространстве, например в мелкой и узкой бухте, в которой даже небольшое сотрясение дна может привести к возникновению цунами или, если брать менее экстремальный пример, для которой рифы и скалы под поверхностью воды имеют огромное влияние на формирование и разрушение волн, картина будет совсем иная. В этом примере открытый океан играет роль некомпактного или протяженного пространства, тогда как прибрежные воды больше похожи на небольшие, компактные измерения теории струн, где геометрия определяет форму возникающих волн и, следовательно, тип возможных частиц.

В качестве еще одного примера компактного пространства можно привести струнные музыкальные инструменты, например скрипку, которые при помощи определенных колебаний, или волн, порождают не частицы, а звуки. Звук, производимый струной, зависит не только от ее длины и толщины, но и от формы внутренней части инструмента – акустической камеры, – где волны определенных частот входят в резонанс, достигая

максимальной амплитуды. Струны музыкальных инструментов получили названия по их основным частотам, для большинства скрипок это G, D, A и E (соль, ре, ля, ми). Физики, подобно скрипичным мастерам, подбирающим формы, соответствующие тем звукам, которые они собираются получить, охотятся на многообразия Калаби-Яу с соответствующей геометрией, способной привести к возникновению тех волн и частиц, с которыми мы постоянно сталкиваемся в окружающем нас мире.

Путь, который физики обычно выбирают для атаки на задачи такого рода, состоит в нахождении решений волнового уравнения, более известного как *уравнение Дирака*. Решениями волнового уравнения, что неудивительно, являются волны – и соответствующие им частицы. Но это очень сложное для решения уравнение, и мы обычно не в состоянии решить его для всех элементарных частиц, существующих в природе. Это возможно только для так называемых *безмассовых* частиц, соответствующих нижним, или фундаментальным, частотам определенной струны. К безмассовым принято относить все частицы, которые мы видим или интуитивно чувствуем в окружающем мире, включая те, которые лишь на считанные мгновения возникают внутри ускорителей. Некоторые из этих частиц – например, электроны, мюоны и нейтрино – на самом деле имеют массу, хотя и называются безмассовыми. Но механизм обретения ими массы совершенно не похож на механизм обретения массы так называемыми *массивными* частицами, формирование которых ожидается при более высоких энергиях на «струнной шкале». Масса обычных частиц (например, электронов) намного меньше массы частиц, называемых массивными, – в квадриллион раз или даже больше, – поэтому определение обычных частиц как безмассовых представляет собой достаточно хорошую аппроксимацию.

Даже если ограничить себя только безмассовыми частицами, получив тем самым возможность найти решения уравнения Дирака, задача по-прежнему останется весьма непростой. К счастью, многообразия Калаби-Яу обладают определенными характеристиками, которые помогают в этом вопросе. Первой из них является суперсимметрия, уменьшающая число переменных, превращая тем самым дифференциальное уравнение второго порядка (уравнение, в котором некоторые из производных взяты дважды) в дифференциальное уравнение первого порядка (уравнение, в котором все производные взяты только единожды). Еще одним вкладом суперсимметрии в решение уравнения является то, что она сопоставляет каждому фермиону свой собственный бозон. Найдя все фермионы, вы автоматически найдете и все бозоны, и наоборот. Итак, достаточно разобраться только с одним из классов частиц, поэтому можно выбрать тот из них, для которого уравнения решать проще.

Еще одной особенностью многообразий Калаби-Яу и, в частности, их геометрии, является то, что для них решения уравнения Дирака – в этом случае соответствующие безмассовым частицам – совпадают с решениями другого уравнения, известного как уравнение Лапласа, работать с которым намного проще. Наибольшее преимущество в данном случае заключается в том, что решения уравнения Лапласа можно получить – и, следовательно, распознать безмассовые частицы, – в принципе, и не решая каких-либо дифференциальных уравнений. Нет необходимости знать точную геометрию или метрику многообразий Калаби-Яу. Вместо этого все необходимое можно получить из топологических «данных» о многообразии Калаби-Яу, содержащихся в матрице 4×4 , называемой ромбом Ходжа. О ромбах Ходжа речь пойдет в следующей главе, поэтому сейчас я скажу только то, что эта топологическая уловка позволяет нам весьма успешно собрать воедино все безмассовые частицы.

Впрочем, нахождение частиц является только началом. В конце концов, физика – это нечто большее, чем простой набор частиц. Кроме этого существуют еще и силы или взаимодействия между частицами. В теории струн струнные петли, движущиеся через пространство, могут либо соединяться, либо расщепляться, и их склонность к одному или другому процессу зависит от *струнной константы связи*, выступающей мерой взаимодействия между струнами.

Расчет сил взаимодействия между частицами является весьма кропотливой задачей,

требующей для своего решения использования почти всего арсенала инструментов теории струн, так что работа над одной моделью на практике занимает не меньше года. И вновь суперсимметрия делает наши вычисления менее накладными. Также может помочь и математика, поскольку этот тип проблем уже давно знаком геометрам, в результате чего у них появилось множество инструментов, которыми можно воспользоваться. Петля, свободно движущаяся и колеблющаяся в пространстве Калаби-Яу, может самопроизвольно превратиться в восьмерку и затем расщепиться на две отдельные петли. И напротив, две отдельные петли могут объединиться в восьмерку. При прохождении через пространство-время эти петли заматают риманову поверхность, точно определяющую картину взаимодействий между струнами, хотя до появления на сцене теории струн математикам не приходило в голову каким-то образом связать ее с физикой.

Насколько же близко могут подойти ученые в своих предсказаниях к свойствам реального мира, получив в руки все эти инструменты? Этой теме будет посвящена девятая глава, а сейчас мы рассмотрим статью Канделаса, Горовица, Строминджера и Виттена, вышедшую в 1985 году и представляющую собой первую серьезную попытку показать способность теории струн при помощи компактификаций Калаби-Яу описывать реальный мир.⁶⁸ Уже тогда физики были способны получать хорошее соответствие теории с практикой. В частности, их модель предсказала оптимальную для случая четырех измерений суперсимметрию, обозначаемую как $N=1$, что означает инвариантность пространства относительно четырех симметричных преобразований, которые можно рассматривать как четыре различных вида вращений. Это само по себе уже являлось большим успехом, так как в случае получения ими максимального значения суперсимметрии $N = 8$, что соответствовало бы наиболее сложной ситуации – инвариантности относительно двадцати двух различных симметричных операций, – это наложило бы на физику столь сильные ограничения, что единственным допустимым вариантом Вселенной стало бы плоское пространство без какой-либо кривизны, в существовании которой, конечно, сомнений быть не может, или любых других неоднородностей типа черных дыр, делающих жизнь, по крайней мере, физиков-теоретиков, столь интересной. В случае, если бы Канделас и его коллеги потерпели неудачу на этом фронте и было бы получено доказательство, что данные шестимерные пространства не способны обладать необходимой суперсимметрией, компактификация в теории струн, по крайней мере, для данного примера, потерпела бы неудачу.

Эта статья стала огромным шагом вперед и в настоящее время рассматривается как этап первой струнной революции, хотя в некоторых вопросах, например в предсказании количества поколений элементарных частиц, она промазала мимо цели. В стандартной модели, принятой в физике элементарных частиц, – модели, на протяжении уже нескольких десятилетий задающей тон в этой области физики и включающей в себя электромагнитное, слабое и сильное взаимодействия, – все элементарные частицы, из которых состоит вещество, разделены на три поколения. Каждое из поколений состоит из двух кварков, электрона или одного из его аналогов (мюона или таона) и нейтрино, которое также бывает трех видов – электронное, мюонное и таонное. Частицы, принадлежащие к первому поколению, наиболее привычны для нашего мира, являясь одновременно наиболее стабильными и наименее массивными. Частицы из третьего поколения обладают наименьшей стабильностью и наибольшей массой, тогда как члены второго поколения находятся примерно посередине. К глубокому сожалению для Канделаса и компании, многообразия Калаби-Яу, с которыми они работали, дали на выходе четыре поколения элементарных частиц. Они ошиблись лишь на единицу, но в этом случае разница между тремя и четырьмя была огромной.

В 1984 году Строминджер и Виттен начали активно работать над решением задачи о числе поколений и в конце концов обратились ко мне с вопросом о существовании

68 P. Candelas, G. Horowitz, A. Strominger, and E. Witten, "Vacuum Configurations for Superstrings," *Nuclear Physics B* 258 (1985): 46–74.

многообразий Калаби-Яу, которые приводили бы не к четырем, а к трем поколениям элементарных частиц. Горовиц в общении со мной также подчеркнул важность этого момента. Итак, существовала необходимость в многообразии с эйлеровой характеристикой, равной 6 или -6, поскольку, как показал Виттен за несколько лет до этого, для определенного класса многообразий Калаби-Яу, обладающих, помимо всего прочего, нетривиальной фундаментальной группой или нестягиваемой петлей, число поколений равно модулю эйлеровой характеристики, деленному на два. Один из вариантов этой формулы фигурировал в часто цитируемой статье, выпущенной «четверкой» в 1985 году.

Мне удалось выкроить немного времени на то, чтобы заняться этой проблемой, в том же году во время перелета из Сан-Диего в Чикаго по пути в Аргоннскую национальную лабораторию, проводившую одну из первых крупных конференций по теории струн. Мне предстояло выступить с докладом, и время, проведенное на борту самолета, я планировал посвятить подготовке к своему выступлению. Мне пришло в голову, что я, возможно, смогу прояснить вопрос о трех поколениях, который мои друзья-физики считают столь важным. Я оказался прав и по окончании полета смог представить искомое решение – многообразие Калаби-Яу с эйлеровой характеристикой, равной -6, что сделало это многообразие первым, приводящим к трем поколениям элементарных частиц, как и требовалось в рамках стандартной модели. Хотя это и не было огромным прыжком вперед, тем не менее стало своеобразным «маленьким шагом» – как представил его Виттен.⁶⁹

Я сконструировал это многообразие при помощи скорее формального, хотя впоследствии и доказавшего свою действенность, метода. Для начала я взял декартово произведение двух кубических *гиперповерхностей*. Гиперповерхность является подмногообразием, то есть поверхностью, размерность которой на единицу меньше размерности пространства, в котором она находится, подобно диску, входящему в шар, или отрезку прямой, являющемуся частью диска. Таким образом, гиперповерхность кубической поверхности с тремя комплексными измерениями имеет два комплексных измерения. Произведение двух таких гиперповерхностей имеет $2 \times 2 = 4$ комплексных измерения. Это на одно измерение больше, чем нужно, и я укоротил многообразие до трех комплексных измерений (или шести вещественных), необходимых для теории струн, найдя его поперечное сечение.

К сожалению, многообразие, полученное в результате этой процедуры, являлось не совсем тем, которое нам было нужно, поскольку оно порождало не три поколения частиц, а девять. Однако это многообразие характеризуется симметрией третьего порядка, что позволило мне создать так называемое *фактор-многообразие*, в котором каждая точка соответствовала трем точкам в исходном многообразии. Нахождение фактор-многообразия в этом случае было подобно делению исходного многообразия на три равных части. Таким образом, число точек уменьшилось в три раза, так же как и число поколений.

Насколько мне известно, это фактор-многообразие было первым – и долгое время единственным – многообразием Калаби-Яу, имеющим эйлерову характеристику 6 или -6, что открывало возможность его использования для создания трех поколений элементарных частиц. И действительно, я не слышал ни о чем подобном вплоть до конца 2009 года, когда Канделасу с двумя его коллегами – Фолькером Брауном из Дублинского института перспективных исследований и Рисом Дэвисом из Оксфорда – удалось проделать что-то подобное, создав многообразие Калаби-Яу с эйлеровой характеристикой, равной -72, и фактор-многообразие с эйлеровой характеристикой, равной -6. По иронии судьбы, в конце 1980-х Канделасу с двумя его коллегами удалось создать и исходное (или «родительское») многообразие Калаби-Яу – одно из восьми тысяч многообразий, созданных на то время, – но его потенциальную применимость он осознал только более чем через двадцать лет.⁷⁰

69 Edward Witten (IAS), e-mail letter to author, July 24, 2008.

70 Volker Braun, Philip Candelas, and Rhys Davies, “A Three-Generation Calabi-Yau Manifold with Small Hodge Numbers,” October 28, 2009, http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0910/0910.5464v1.pdf.

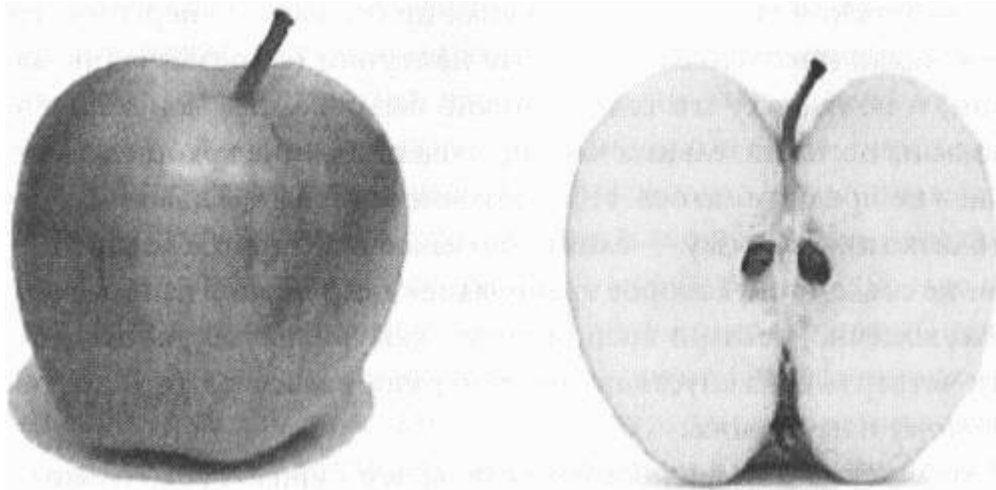


Рис. 6.5. Геометрия позволяет нам уменьшить число измерений объекта, разрезав его и рассматривая только полученное поперечное сечение. К примеру, разрезав трехмерное яблоко, вы обнаружите двухмерную поверхность – одну из множества поверхностей, которые можно получить, в зависимости от того, где и как вы разрежали. Следующий разрез позволит получить одномерную линию на поверхности. Разрезая эту линию, вы получите отдельную (нульмерную) точку. Таким образом, каждый успешный разрез, вплоть до получения точки, уменьшает размерность объекта на единицу

Я затронул этот вопрос, поскольку в далеком 1986 году, когда Брайан Грин только начинал свои попытки извлечь подлинную физику из многообразий Калаби-Яу, возможных вариантов многообразий существовало не так уж много. Для того чтобы получить правильное число поколений, он принял на вооружение то многообразие, которое я создал в 1984 году по пути в Аргонскую национальную лабораторию. Работая над этой проблемой сначала в качестве аспиранта Оксфордского университета, а затем моего постдока в Гарварде, Грин совместно с Келли Кирклином, Полом Мироном и своим бывшим руководителем по Оксфорду Грэхемом Россом подошел еще ближе к Стандартной модели, чем Канделас, Горовиц, Строминджер и Виттен за год до этого. Модель Грина содержала гораздо больше информации – буквально пошаговое руководство по извлечению физических характеристик из многообразий Калаби-Яу. Он и его коллеги получили правильную суперсимметрию, верное число поколений, массивные нейтрино (с чрезвычайно малой массой) и почти все, что только можно было желать, за исключением нескольких дополнительных частиц, существование которых в данном случае и не предполагалось. Итак, это многообразие Калаби-Яу оказалось близко к желаемому – ближе, чем какое-либо другое до этого, – но все же не совсем тем, которое требовалось для решения данного вопроса. Это, конечно, не стоит воспринимать как критику их работы, так как почти четверть века спустя полностью разобраться в этом «вопросе» так никому и не удалось.

В те далекие дни физики надеялись, что существует только одно многообразие Калаби-Яу, которым им придется заниматься, – уникальное решение, из которого можно рассчитать все остальное, – или, по крайней мере, что количество их столь невелико, что не составит труда быстро отбросить наименее подходящие и выбрать из оставшихся то, которое нужно. Когда Строминджер и Виттен впервые спросили меня о количестве известных и уже сконструированных многообразий Калаби-Яу, я смог привести с определенностью только два примера. Одна из этих поверхностей, *трехмерная поверхность пятого порядка*, по-видимому, является простейшим возможным многообразием Калаби-Яу. Это поверхность пятого порядка, поскольку ее можно описать при помощи полиномиального уравнения пятого порядка, имеющего общий вид $z_1 + z_2^{55} + z_3^5 + z_4^5 + z_5^5 = z_1 \times z_2 \times z_3 \times z_4 \times z_5$. Трехмерной она называется потому, что имеет три комплексных измерения. Второе многообразие Калаби-Яу можно было получить путем объединения (или нахождения прямого произведения) трех комплексных одномерных тороидов и модифицирования полученного результата.

Примерно в это время Строминджер спросил меня об общем количестве возможных многообразий Калаби-Яу. Я сказал, что, вероятно, речь может идти о десятках тысяч многообразий, каждое из которых обладает своей собственной топологией и является определенным решением уравнений теории струн. В рамках каждого из этих топологически различных семейств, кроме того, лежало бесконечное разнообразие возможных форм. Именно это я и заявил перед огромной толпой физиков, собравшихся на мою лекцию в Аргоннской национальной лаборатории в 1984 году, и многие из них испытали потрясение, когда я сказал о цифре десять тысяч, – что впоследствии оказалось достаточно точной оценкой.

Нужно сказать, что тогда физики еще не были способны самостоятельно конструировать многообразия Калаби-Яу, поскольку эта математика была им малознакома, что означало их зависимость от людей, подобных мне, в вопросах о структуре данных объектов. Впрочем, знакомство с соответствующей литературой позволило им быстро вырваться вперед и самостоятельно создать множество примеров, работая независимо от математиков. Вскоре после моей лекции Канделас и его студенты взяли на вооружение тот же общий подход, который использовал я, конструируя первое многообразие, порождавшее три поколения элементарных частиц, и, создав на основе этого метода компьютерную программу, дали начало тысячам многообразий Калаби-Яу. Только несколько из них было разработано непосредственно мной, в расчетах же на компьютере я никогда не был особо силен. Но в свете достижений Канделаса и результатов, полученных при помощи его компьютера, утверждение об огромном количестве многообразий перестало быть чистой абстракцией или грубой оценкой предвзятого математика. Оно превратилось в строго установленный факт, и если вас одолевают какие-либо сомнения в этом вопросе, то все, что вам нужно, – это заглянуть в базу данных Канделаса.

Все это привело к тому, что теория струн стала выглядеть намного более сложной, чем планировалось первоначально. Проблема уже состояла не в нашей способности, взяв многообразие Калаби-Яу, извлечь из него всю заложенную в нем физику. Прежде чем приступить к работе, нужно было сначала ответить на вопрос: какое, собственно, из многообразий нам брать? И, как будет показано в десятой главе, проблема, порожденная избытком многообразий Калаби-Яу, год от года скорее усложнялась, нежели упрощалась. Эта проблема вышла на первый план уже в 1984 году, когда, по словам Строминджера, «единственность теории струн была поставлена под сомнение».⁷¹

И если со всем этим еще можно было смириться, то существовали и другие проблемы, преследовавшие теорию струн на ее начальном этапе, и одной из них был вопрос о количестве струнных теорий самих по себе. Единой теории струн попросту не существовало. Вместо этого имелись пять отдельных теорий – типа I, типа IIA, типа IIB, гетеротическая SO(32) и гетеротическая E8×E8, – отличавшиеся, к примеру, тем, что в одних струны могли существовать только в виде замкнутых петель, другие же допускали существование незамкнутых струн. Каждая из этих теорий предполагала наличие различных групп симметрии и каждая из них содержала уникальный набор допущений о таких понятиях, как, например, хиральность (зеркальная неразличимость) фермионов и т. д. Началась дискуссия о том, какая же из этих пяти возможных теорий в конце концов одержит верх и станет подлинной Теорией Всего. В то время мы находились в парадоксальной – если не сказать неловкой – ситуации, когда параллельно существовали целых пять «единых» теории природы.

В 1995 году, проявив немалую силу интеллекта, Виттен показал, что все пять струнных теорий представляют собой взгляд под разными углами на одну и ту же всеохватывающую теорию, которую он назвал *M-теорией*. Виттен никогда не объяснял, что значит в этом контексте буква «M», породив тем самым массу догадок: *мастерская, магическая, могущественная, мистическая, материнская, матричная или мембранная*.

Последнее слово в этом списке имеет особое значение, поскольку к фундаментальным

71 Dennis Overbye, “One Cosmic Question, Too Many Answers,” New York Times, September 2, 2003.

составляющим М-теории теперь относились не только струны. На смену им пришли более общие объекты, называемые *мембранами*, или *бранами*, которые могли иметь от нуля до девяти измерений. Одномерный вариант (1-брана) аналогичен обычной струне, тогда как 2-брана близка нашему представлению о мембране, а 3-брана подобна трехмерному пространству. Эти многомерные браны получили название р-бран, тогда как разновидность этих объектов, называемая D-бранами, представляет собой *подповерхности* в пределах пространств большей размерности, к которым прикреплены открытые (в противоположность замкнутым петлям) струны. Появление бран сделало теорию струн более богатой и более приспособленной для объяснения широкого спектра явлений, о чем пойдет речь в дальнейших главах. Более того, установленная фундаментальная связь между пятью струнными теориями открыла возможность для ученого выбирать тот из вариантов теории, который упрощает решение именно его проблемы.

М-теория имеет еще одну важную особенность, отличающую ее от теории струн. Эта теория существует не в десяти, а в одиннадцати измерениях. «Физики утверждают, что у них есть красивая и последовательная теория квантовой гравитации, однако им не удается договориться о количестве измерений, – замечает Малдасена. – Некоторые говорят, что измерений десять, некоторые – что одиннадцать. На самом деле наша Вселенная может иметь как десять, так и одиннадцать измерений».⁷²

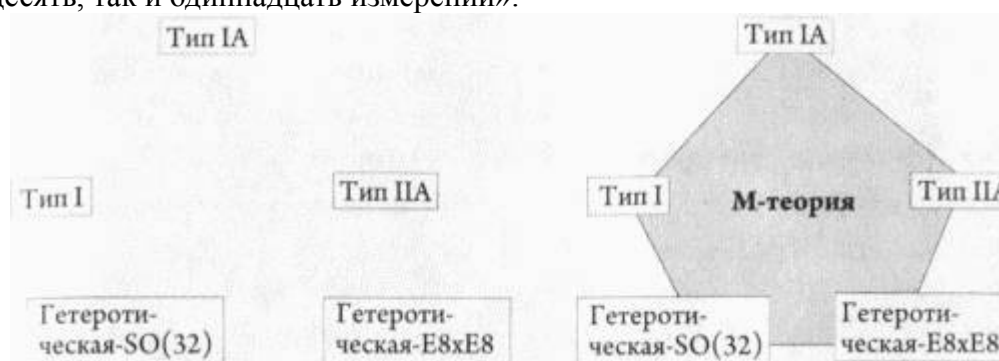


Рис. 6.6. Вначале пять различных струнных теорий рассматривались как конкурирующие, они исследовались отдельно и считались отличными между собой. Эдвард Виттен и другие архитекторы «второй струнной революции» показали, что эти теории взаимосвязаны – соединены в общую структуру, носящую название М-теории (хотя, по-видимому, никто не знает, что означает М)

Строминджер утверждает, что «понятие размерности не является абсолютным». Он сравнивает теорию струн и М-теорию с различными фазовыми состояниями воды. «Охладив ее ниже температуры замерзания, вы получите лед, выше нуля – жидкость, над точкой кипения – пар, – говорит он. – В зависимости от фазового состояния, в котором она находится, вода может иметь совершенно различный внешний вид. Но в какой из этих фаз на самом деле живем мы – нам неизвестно».⁷³

Даже главный создатель М-теории, Виттен, признает, что десяти- и одиннадцатимерное описание Вселенной «могут быть истинными одновременно. Я не считаю одно из них более фундаментальным, чем другое, но, по крайней мере, для некоторых целей, одно может быть более полезным, чем другое».⁷⁴

Подходя с практической точки зрения, можно сказать, что физики больше преуспели в объяснении физических явлений нашего четырехмерного мира, рассматривая его с десяти-, а не одиннадцатимерной перспективы. Исследователи делают попытки перейти от одиннадцати измерений непосредственно к четырем путем компактификации дополнительных измерений в семимерное, так называемое G2-многообразие, – первый

⁷² Dale Gubach and Juan Maldacena, “Who’s Counting?” Astronomy, May 2006, p. 72.

⁷³ Andrew Strominger, “String Theory, Black Holes, and the Fundamental Laws of Nature,” lecture, Harvard University, Cambridge, Mass., April 4, 2007.

⁷⁴ Edward Witten (IAS), e-mail letter to author, July 21, 2008.

компактный вариант которого был предложен в 1994 году Домиником Джойсом, математиком, работающим в настоящее время в Оксфорде. Если бы это удалось, то большая часть того, о чем мы говорили до сих пор, – например, получение четырехмерного физического мира из десятимерной Вселенной при помощи шестимерных многообразий Калаби-Яу ($4+6=10$), – могло бы мгновенно устареть благодаря открытиям Виттена. К счастью, по крайней мере, в контексте нашей дискуссии, это не так.

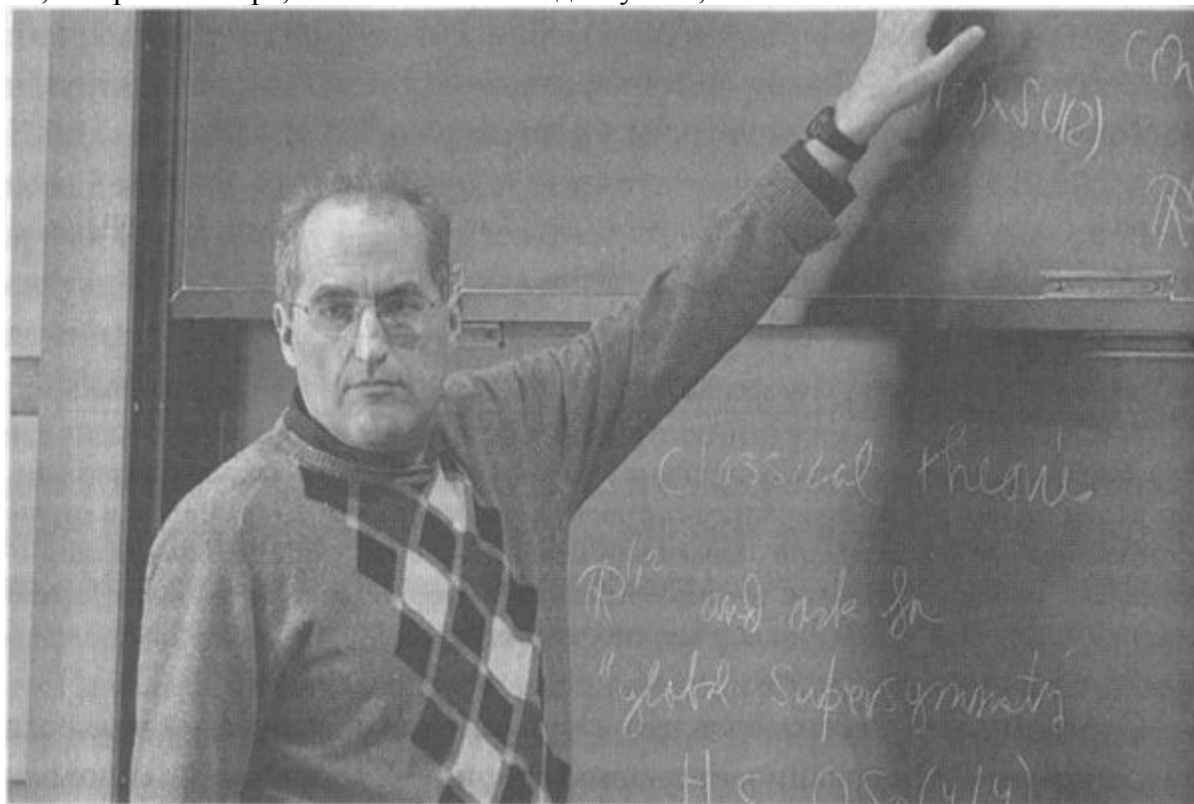


Рис. 6.7. Эдвард Виттен в Институте перспективных исследований (фотография Клиффа Мура)

Одним из недостатков G_2 -подхода, поясняет физик из Беркли Петр Хорава, сотрудник Виттена и человек, внесший ключевой вклад в M -теорию, состоит в том, что мы не можем восстановить четырехмерную физику путем компактификации на «гладком» семимерном многообразии. Еще одной проблемой является то, что семимерные многообразия, в отличие от многообразий Калаби-Яу, не могут быть комплексными, поскольку комплексные многообразия должны иметь четное число измерений. Это, возможно, важнейшее отличие, добавляет Хорава, «поскольку комплексные многообразия намного лучше ведут себя, их намного проще понять и с ними гораздо легче обращаться».⁷⁵

Более того, о существовании, уникальности и других математических характеристиках семимерных G_2 -многообразий еще очень многое предстоит узнать. Не существует даже систематического пути поиска этих многообразий или общего набора правил их нахождения, как в случае многообразий Калаби-Яу. Мы с Виттеном пытались разработать нечто подобное гипотезе Калаби для G_2 -многообразий, но до сих пор ни я, ни он, ни кто-либо другой пока не смогли ничего обнаружить. Впрочем, одной из возможных причин, по которым M -теория на сегодня развита не так сильно, как теория струн, является то, что ее математика намного сложнее и изучена далеко не столь подробно.

По причине затруднений с G_2 -многообразиями основные усилия в M -теории следовали непрямыми путями компактификации одиннадцати измерений в четыре. Во-первых, одиннадцатимерное пространство-время рассматривается как произведение десятимерного пространства-времени и одномерной окружности. Окружность можно компактифицировать,

⁷⁵ Petr Horava (University of California, Berkeley), interview with author, July 6, 2007.

сделав ее радиус крошечным, что оставляет нам только десять измерений. После этого десять оставшихся измерений обычным путем компактифицируются при помощи многообразия Калаби-Яу, получая тем самым четыре измерения нашего мира. «Итак, даже в М-теории многообразия Калаби-Яу по-прежнему находятся в центре событий», – говорит Хорава.⁷⁶ Этот подход, инициированный Виттенем, Хоравой, Бартом Оврутом и другими, носит название *гетеротической М-теории*. Она сыграла важную роль при создании концепции бранных вселенных, считающей, что наша Вселенная находится на бране, а также породила альтернативные теории ранней Вселенной.

Итак, по крайней мере, на текущий момент, оказалось, что все дороги проходят через многообразия Калаби-Яу. Извлечь подлинную физику и космологию из теории струн и М-теории невозможно без знания геометрии этих пространств, содержащих в себе «генетический код Вселенной» – генеральный план строительства мира. Именно по этой причине стэнфордский физик Леонард Сасскинд, один из основателей теории струн, утверждает, что многообразия Калаби-Яу представляют собой нечто большее, чем просто вспомогательную структуру или строительные леса теории. «Они – это ДНК теории струн», – говорит он.

Седьмая глава

В Зазеркалье

Несмотря на то что многообразия Калаби-Яу произвели в физике подлинный взрыв, этот взрыв чуть было не обратился во всхлип⁷⁷, причем по причинам, совершенно не связанным с затруднениями, вызванными избыточной плодотворностью теории струн в виде множества теорий, которые впоследствии были объединены Эдвардом Виттенем. Привлекательность этих геометрических форм была очевидной. Ронен Плессер из Университета Дьюка так описал планы по работе над ними: «Мы надеялись, что сможем классифицировать эти пространства, определимся с типом физики, который они порождают, исключим некоторые из них из рассмотрения – и на основании этого сделаем вывод, что нашу Вселенную можно описать, например, пространством номер 476, и получим из этого все, что бы мы хотели узнать»⁷⁸.

На сегодняшний день этот простой план все еще находится на стадии реализации. Прогресс застопорился еще двадцать лет назад; тогда же иссяк энтузиазм ученых, и поползли неизбежные сомнения. В конце 1980-х годов многие физики считали, что попытка использования многообразий Калаби-Яу в физике потерпела поражение. Например, физик Пол Эспинволл, на данный момент работающий в Университете Дьюка, вскоре после защиты диссертации в Оксфорде обнаружил, что найти работу и получить гранты для исследования многообразий Калаби-Яу и теории струн стало весьма непросто. Разочаровавшиеся в теории студенты, в том числе и два бывших однокурсника и соавтора Брайана Грина из Оксфордского университета, начали покидать физику ради того, чтобы стать финансистами. Те, кто остался, подобно Грину, были вынуждены отбиваться от обвинений в желании «заниматься вычислениями ради вычислений – математикой под видом физики».⁷⁹

Возможно, это и правда. Но, учитывая, что Грин и Плессер вскорости внесли важнейший вклад в область зеркальной симметрии, который дал вторую жизнь сонному царству многообразий Калаби-Яу и восстановил в правах подзабытую на то время область геометрии, я должен выразить им свою огромную признательность за то, что они предпочли

⁷⁶ Ibid.

⁷⁷ Аллюзия на цитату из поэмы Томаса Стернза Элиота «Полые люди»: «Не взрыв, но всхлип». – *Примеч. перев.*

⁷⁸ Ronen Plesser (Duke University), interview with author, September 3, 2008.

⁷⁹ Ibid.

продолжение исследований торговле ценными бумагами. Однако перед тем, как наступил этот подъем, доверие к многообразиям упало до такого минимума, что, по крайней мере, некоторое время казалось, будто их история закончилась.

Первые тревожные признаки появились, когда теория струн в своем развитии натолкнулась на понятие конформной инвариантности. Струна, движущаяся через пространство-время, замечает поверхность с двумя вещественными измерениями (одним пространственным и одним временным) и одним комплексным – так называемый *мировой лист*. Если струна имеет форму петли, то мировой лист представляет собой вытянутую многомерную трубку, или, точнее, комплексную риманову поверхность без границы; в случае же незамкнутой струны в роли мирового листа будет выступать бесконечная лента – комплексная риманова поверхность, имеющая границу. В струнной теории мы исследуем все возможные колебания струн, которые определяются физическим принципом – *принципом наименьшего действия*, зависящим от конформной структуры мирового листа – внутреннего свойства римановых поверхностей. Таким образом, конформная инвариантность изначально встроена в теорию струн. Кроме того, теория струн обладает масштабной инвариантностью, а это означает, что умножение расстояний на произвольную постоянную не изменяет отношений между точками. Итак, можно изменять поверхность – накачивать ее воздухом подобно воздушному шару или сжимать ее, выпуская накачанный воздух, растягивать ее любыми другими путями, меняя форму или расстояние между точками, – не затрагивая при этом чего-либо существенного с точки зрения теории струн.

Проблемы возникают, когда требование конформной инвариантности выдвигается в рамках квантовых представлений. Подобно тому как классическая частица движется по геодезической линии – траектории, соответствующей минимальному четырехмерному пространственно-временному расстоянию между двумя точками, как предсказывает принцип наименьшего действия, о котором шла речь в третьей главе, классическая струна также движется по траектории, длина которой минимальна. В результате этого мировой лист, образованный движущейся струной, представляет собой минимальную поверхность особого типа. Поверхность такого двумерного мирового листа можно описать при помощи системы уравнений – двумерной теории поля, которая точно предсказывает возможные пути перемещения струны. В теории поля все силы описываются при помощи полей, пронизывающих пространство-время. Движение струны и ее поведение в целом определяется силами, которые на нее действуют, и струна перемещается таким образом, чтобы поверхность соответствующего мирового листа была минимальной. Среди огромного количества возможных мировых листов, соответствующих множеству возможных путей перемещения струны, теория поля отбирает именно тот, площадь которого минимальна.

Квантовая интерпретация данной теории поля учитывает не только наиболее существенные особенности движения струны в пространстве-времени и поверхности, заметаемой данной струной, но также и некоторые более мелкие детали, обусловленные колебаниями струны в процессе движения. В результате мировой лист будет иметь небольшие особенности, отражающие эти колебания. В квантовой механике частица или струна, движущаяся в пространстве-времени, движется одновременно по всем возможным траекториям. Вместо того чтобы просто выбрать один мировой лист, обладающий минимальной поверхностью, квантовая теория поля рассматривает средневзвешенное значение всех возможных конфигураций мирового листа, и большое значение в ее уравнениях отведено поверхности с меньшей площадью.

Вопрос состоит в том, будет ли теория двумерного квантового поля после усреднения, проведенного путем интегрирования по всем возможным геометриям мирового листа, по-прежнему удовлетворять условию масштабной инвариантности и другим аспектам конформности? Ответ на этот вопрос зависит от метрики пространства, в котором находится мировой лист; для одних метрик теория поля является конформной, для других – нет.

Для того чтобы определить, поддерживается или нет масштабная инвариантность конкретной метрикой, рассчитывается так называемая бета-функция, определяющая

отклонение теории от конформности. Если значение бета-функции равно нулю, то при деформации мирового листа – раздувании, растяжении или сжатии – ничего не изменяется, что говорит о конформности теории. Бета-функция автоматически обращается в нуль в случае риччи-плоской метрики подобной той, которой обладают пространства Калаби-Яу. К сожалению, как и в случае многих обсуждавшихся ранее сложных уравнений, решение уравнения для бета-функции в явном виде найти невозможно. Вместо этого было найдено приближенное решение путем аппроксимации искомой функции суммой бесконечного числа слагаемых – так называемым степенным рядом. Считается, что чем больше членов ряда задействовано в аппроксимации, тем она лучше.

Чтобы лучше понять, как это работает, представьте, что вы хотите измерить площадь поверхности сферы, заворачивая ее в проволочную сетку. Если проволока состоит только из одной петли, то, натянув ее на сферу, вы едва ли получите хорошую оценку для площади. Однако если взять не одну, а четыре треугольные петли, соединенные в форме тетраэдра, охватывающего сферу, аппроксимация будет гораздо лучше. Увеличение числа петель до двенадцати – в форме пятиугольников, соединенных в додекаэдр, или до двадцати – в форме треугольников, соединенных в икосаэдр, даст еще более точные оценки. Как и в нашем примере, слагаемые степенного ряда бета-функции также носят название петель. Взяв только первое слагаемое ряда, вы получите однопетлевую бета-функцию, взяв первые два – двухпетлевую и т. д.

Добавление новых петель к проволочной сетке приводит к следующей проблеме: расчеты бета-функции, которые и без того чрезвычайно сложны, при возрастании числа петель становятся еще сложнее, и объем вычислений многократно возрастает. Расчеты показали, что первые три слагаемых степенного ряда, как и было предсказано ранее, равны нулю – что весьма обнадежило физиков. Однако в статье 1986 года Маркус Грисару, физик, в настоящее время работающий в Университете Макгилла, и двое его коллег, Антон ван де Вен и Даниэла Занон, обнаружили, что четырехпетлевая бета-функция в нуль не обращается. Последовавший за этим расчет, выполненный Грисару и его коллегами, показал, что пятипетлевая бета-функция тоже не равна нулю. Это открытие стало заметным ударом по позициям, занимаемым в физике многообразиями Калаби-Яу, поскольку из него следовало, что метрика данных многообразий не приводит к сохранению конформной инвариантности.

«У меня, как у сторонника теории струн и суперсимметрии, наши результаты вызвали некоторое беспокойство, – говорит Грисару. – Мы, конечно, были счастливы, что эти результаты в некоторой степени прославили нас, но слава разрушителя прекрасного здания – это далеко не то, чего можно желать каждому. Впрочем, мое мнение о науке заключается в том, что нужно смириться с теми результатами, которые ты получил».⁸⁰

Однако не все еще было потеряно. В статье, выпущенной в 1986 году Дэвидом Гроссом и Виттенем, работавшими тогда в Принстоне, было показано, что, несмотря на то что для риччи-плоской метрики многообразий Калаби-Яу конформная инвариантность действительно не соблюдается, эту метрику можно слегка изменить так, чтобы бета-функция, как и требовалось, обратилась в нуль. Подобная «настройка» метрики проводится не за один, а за бесконечное число корректировок, или *квантовых поправок*. Но в подобных случаях, когда поправки представляют собой бесконечный ряд, неминуемо возникает вопрос: сойдется ли этот ряд в конце концов к искомому решению? «Может ли выйти так, что, сведя воедино все поправки, никакого решения вы не получите?» – задается вопросом Плессер.

В лучшем случае небольшое изменение метрики приведет к незначительному изменению решения. К примеру, нам известно, как решать уравнение $2x=0$, его ответом является $x=0$. «Если теперь я захочу решить уравнение $2x=-0,1$, то обнаружу, что ответ изменился весьма несущественно ($x=-0,05$), – что является для меня оптимальным вариантом», – поясняет Плессер. Уравнение $x=0$ также не вызывает особых затруднений (вновь $x=0$). «Но если я попытаюсь решить уравнение $x^{22}=-0,1$, то обнаружу, что оно попросту не имеет решения, по крайней мере, в действительных числах, – говорит он. –

80 Marcus Grisaru (McGill University), interview with author, August 18, 2008.

Итак, вы видите, что небольшое изменение параметров может привести как к тому, что решение лишь немного изменится, так и к тому, что оно вообще исчезнет [например, для вещественных чисел]». ⁸¹

Как было установлено Гроссом и Виттенем, для исправленного многообразия Калаби-Яу последовательный ряд поправок сходится. Они показали, что, если почленно исправлять метрику Калаби-Яу, в результате возникнет сложнейшее уравнение, которое тем не менее можно решить. При этом все петли бета-функции устремятся к нулю.

После этого, по словам Шамита Качру из Стэнфорда, «вопрос о том, чтобы полностью отбросить многообразия Калаби-Яу, уже не стоял; теперь достаточно было только слегка их модифицировать. И, поскольку изначально не существовало возможности записать метрику Калаби-Яу, необходимость ее небольшого преобразования не стала чем-то особо удручающим». ⁸²

Дальнейшее развитие идей о способах преобразования метрики Калаби-Яу основано на появившейся в том же году работе Денниса Немесчанского и Ашока Сена, в то время работавших в Стэнфорде. Полученное в результате исправления многообразия топологически оставалось многообразием Калаби-Яу, а его метрика – почти риччи-плоской, хотя и не совсем. Немесчанский и Сен вывели точную формулу, показывающую степень отклонения модифицированной метрики от риччи-плоского случая. Их работа, совместно с работой Гросса и Виттена, «помогла сохранить многообразия Калаби-Яу для физики, поскольку без них пришлось бы прекратить исследования в целой области», – утверждает Сен. Более того, по словам Сена, без первого допущения о том, что многообразия Калаби-Яу, фигурирующие в теории струн, являются риччи-плоскими, добраться до окончательного решения было бы невозможно. «Если бы мы начали с метрики, не являющейся риччи-плоской, сложно даже представить, при помощи каких методик мы получили бы исправленный вариант». ⁸³

Я полностью согласен с Сеном, хотя и не считаю, что допущение о риччи-плоской метрике многообразий Калаби-Яу после этого стало бесполезным. Можно рассматривать многообразие Калаби-Яу с риччи-плоской метрикой как решение уравнения $x=2$. При этом уравнение, которое нужно решить, – это $x^{22}=2,0000000001$, поскольку, как уже было сказано, искомое многообразие является почти, но не точно риччи-плоским. Для того чтобы получить модифицированную метрику, существует только один способ – начать с решения уравнения $x^2=2$ и уже от него двигаться в требуемом направлении. При этом в большинстве случаев решение уравнения $x^2=2$ служит весьма хорошим приближением. Кроме того, риччи-плоская метрика, как правило, является простейшей для использования и охватывает подавляющее большинство явлений, интересующих ученых.

Следующие существенные шаги в вопросе восстановления в правах многообразий Калаби-Яу были сделаны Дороном Гепнером, в то время постдоком в Принстоне, на протяжении нескольких лет, начиная с 1986 года. Гепнер разработал несколько конформных теорий поля, каждая из которых в рамках соответствующих физических понятий обладала потрясающим сходством с описаниями отдельных многообразий Калаби-Яу определенного размера и формы. Изначально Гепнер обнаружил, что физика, относящаяся к его теории поля, – включая определенные симметрии, поля и частицы, – имеет тот же вид, что и физика струны, движущейся в определенном многообразии Калаби-Яу. Это привлекло его внимание, поскольку связь между двумя столь, казалось бы, несвязанными вещами, как конформная теория поля и многообразия Калаби-Яу, казалась поистине сверхъестественной.

Одним из тех, кто проявил необычайный интерес к этой новости, стал Брайан Грин – в то время мой гарвардский постдок, специалист в области математических обоснований многообразий Калаби-Яу, закончивший докторскую диссертацию по этому предмету и, кроме того, имевший солидную подготовку в области конформной теории поля. Он тут же связался

81 Plesser, interview with author, September 3, 2008.

82 Shamit Kachru (Stanford University), interview with author, August 19, 2008.

83 Ashoke Sen (Harish-Chandra Research Institute), interview with author, August 22, 2008.

с учеными с физического факультета, также работавшими в области конформных теорий, в том числе с двумя аспирантами – Роненом Плессером и Жаком Дистлером. Дистлер и Грин начали совместное исследование *корреляционных функций*, связанных с конформной теорией поля и соответствующим многообразием Калаби-Яу. Корреляционные функции в этом случае включали в себя так называемые «взаимодействия Юкавы», определяющие взаимодействия частиц между собой, в том числе и такие взаимодействия, которые наделяли частицу массой. В статье, представленной весной 1988 года, Дистлер и Грин объявили, что корреляционные функции – или взаимодействия Юкавы – для конформной теории поля и соответствующих многообразий Калаби-Яу численно совпадают, что стало еще одним подтверждением их тесной взаимосвязи, если не сказать больше.⁸⁴ Гепнер пришел к аналогичному выводу относительно совпадения величин взаимодействий Юкавы в статье, поданной в печать вскоре после этого.⁸⁵

В частности, Дистлер, Грин и независимо от них Гепнер обнаружили, что для многообразий определенного размера и формы можно рассчитать все корреляционные функции, представляющие собой набор математических выражений, которые, будучи сведены воедино, полностью характеризуют конформную теорию поля. Иными словами, результатом стала возможность представить связь между конформной теорией поля и многообразиями Калаби-Яу в строгих и исчерпывающих понятиях, путем определения как типа конформной теории поля со всеми корреляционными функциями, так и точного размера и формы соответствующего многообразия Калаби-Яу. Таким образом, ограниченному классу многообразий Калаби-Яу, известных на сегодняшний день, стало возможным сопоставить соответствующую модель Гепнера.

Эта связь, нашедшая надежное подтверждение в конце 1980-х годов, помогла опровергнуть мнение относительно бесполезности многообразий Калаби-Яу. Как сказал Качру, «можно не сомневаться в существовании предложенных им [Гепнером] конформных теорий поля, поскольку они являются полностью разрешимыми, в том числе и в численном виде. И если истинность этих теорий не вызывает сомнений, а их свойства аналогичны свойствам компактификаций Калаби-Яу, то в достоверности этих компактификаций также можно не сомневаться».⁸⁶

«Статья Гепнера позволила сохранить многообразия Калаби-Яу, – утверждает Эспинволл, – по крайней мере, для физики и теории струн».⁸⁷ Более того, связь между моделью Гепнера и отдельными компактификациями Калаби-Яу помогла заложить основу для открытия зеркальной симметрии, что стало достаточным для исключения всех сомнений в том, заслуживают ли многообразия Калаби-Яу дальнейшего исследования.

Некоторые из наиболее ранних идей относительно зеркальной симметрии возникли в 1987 году, когда стэнфордский физик Ланс Диксон совместно с Гепнером установил, что различные К3-поверхности связаны с одной и той же квантовой теорией поля, что говорило о том, что эти совершенно различные поверхности связаны при помощи симметрии. При этом ни Диксон, ни Гепнер не публиковали статей по этой теме, хотя Диксон сделал несколько докладов, поэтому первой публикацией, посвященной зеркальной симметрии, по-видимому, стала вышедшая в 1989 году статья Вольфганга Лерке из Калифорнийского технологического института, Кумрана Вафы и Николаса Варнера из Массачусетского технологического института. Они доказали, что если взять два топологически различных трехмерных многообразия Калаби-Яу, то есть шестимерное многообразие Калаби-Яу вместо четырехмерной К3-поверхности, мы получим одну и ту же конформную теорию поля и, следовательно, ту же самую физику.⁸⁸ Это утверждение было более сильным, чем

84 Jacques Distler and Brian Greene, “Some Exact Results on the Superpotential from Calabi-Yau Compactifications,” *Nuclear Physics B* 309 (1988): 295–316.

85 Doron Gepner, “Yukawa Couplings for Calabi-Yau String Compactification,” *Nuclear Physics B* 311 (1988): 191–204.

86 Kachru, interview with author, August 19, 2008.

87 Paul Aspinwall (Duke University), interview with author, August 14, 2008.

88 Wolfgang Lerche, Cumrun Vafa, and Nicholas Warner, “Chiral Rings in $N=2$ Superconformal Theories,” *Nuclear*

утверждение Диксона-Гепнера, поскольку оно связывало многообразия Калаби-Яу с различной топологией, тогда как предыдущее относилось к поверхностям с одной и той же топологией, хотя и с различной геометрией (все КЗ-поверхности являются топологически эквивалентными). Проблема состояла в том, что никому не был известен способ объединения многообразий Калаби-Яу в пары, связанные между собой столь странным образом. Модели Гепнера оказались ключом к разгадке – и эти же модели помогли встретиться Брайану Грину и Ронену Плессеру.

Осенью 1988 года Брайан Грин, общаясь с Вафой, – их офисы находились на одном и том же «теоретическом» этаже здания, в котором размещался физический факультет Гарвардского университета, – узнал о существовании возможной связи между различными многообразиями Калаби-Яу. Грин моментально понял, что эта теория была бы чрезвычайно важна, если бы удалось ее доказать. Он объединил усилия с Вафой и Варнером, для того чтобы лучше понять взаимосвязь многообразий Калаби-Яу с моделью Гепнера. По словам Грина, в первую очередь он, Вафа и Варнер наметили шаги перехода от модели Гепнера к определенному многообразию Калаби-Яу.⁸⁹ Исследователям удалось разработать «алгоритм, показывающий, почему и как связаны эти многообразия. Дайте мне модель Гепнера, и я в мгновение ока смогу показать вам, какому многообразию Калаби-Яу она соответствует».⁹⁰ В статье Грина, Вафы и Варнера объяснялось, почему каждая модель Гепнера приводит к компактификации Калаби-Яу. Их анализ подтвердил догадки о согласовании моделей Гепнера с многообразиями Калаби-Яу, ранее сделанные самим Гепнером на основании рассмотрения таблиц многообразий Калаби-Яу и выбора из них тех многообразий, которые приводили к требуемой физике.

В 1989 году, когда связь между моделями Гепнера и многообразиями Калаби-Яу была установлена окончательно, Грин объединился с Плессером в надежде на дальнейшее продвижение. Одним из первых выводов, который им удалось сделать, по словам Грина, стал вывод о том, что «теперь мы имели мощный инструмент для анализа чрезвычайно сложной геометрии [Калаби-Яу] в виде теории поля, которую мы полностью контролируем и полностью понимаем»⁹¹. Их заинтересовал вопрос о том, что произойдет, если они слегка изменят модель Гепнера. Как они полагали, измененная модель будет соответствовать немного отличному многообразию Калаби-Яу. Для начала они применили к модели Гепнера преобразование, отвечающее вращательной симметрии, подобно повороту квадрата на 90 градусов. Эта операция оставила теорию поля неизменной. Однако, выполнив то же преобразование для многообразия Калаби-Яу, они получили многообразие с совершенно иной топологией и совершенно иной геометрией.

Иными словами, преобразование, отвечающее вращательной симметрии, изменило топологию многообразия Калаби-Яу, оставив неизменной сопутствующую ей конформную теорию поля. В результате теперь двум многообразиям Калаби-Яу с совершенно различной топологией можно было сопоставить одну и ту же физическую теорию. «Это, коротко говоря, и называется зеркальной симметрией», – поясняет Гепнер.⁹² Используя более общее понятие, можно также определить это свойство как *дуальность*, смысл которой состоит в том, что два объекта, с виду не имеющие отношения друг к другу, в данном случае – два многообразия Калаби-Яу, тем не менее порождают одну и ту же физику.

Первая статья Грина и Плессера по теме зеркальной симметрии описывала десять так называемых зеркальных партнеров, или зеркальных многообразий, обнаруженных среди нетривиальных и не являющихся совершенно плоскими многообразий Калаби-Яу, начиная с простейшего случая – трехмерной поверхности пятого порядка. Наряду с еще девятью примерами в этой статье содержалась формула, дающая возможность получить зеркальные

Physics B 324 (1989): 427–474.

⁸⁹ B. R. Greene, C. Vafa, N. P. Warner, “Calabi-Yau Manifolds and Renormalization Group Flows,” *Nuclear Physics B* 324 (1989): 371–390.

⁹⁰ Brian Greene (Columbia University), interview with author, March 11, 2010.

⁹¹ Ibid.

⁹² Doron Gepner, interview with author, August 19, 2008.

пары для любой модели Гепнера, – на сегодня число подобных пар составляет сотни, если не тысячи.⁹³

Зеркальные многообразия имеют ряд интереснейших свойств, проявляющихся при сопоставлении объектов, которые ранее казались не имеющими отношения друг к другу. К примеру, Грин и Плессер обнаружили, что одно из многообразий Калаби-Яу может иметь 101 вариант формы и только один вариант размера; зеркальное же многообразие, напротив, будет иметь 101 вариант размера и единственный вариант формы. Многообразия Калаби-Яу могут иметь дырки различной размерности – как нечетной, так и четной. Грину и Плессеру удалось обнаружить любопытное взаимоотношение между зеркальными парами: число дырок нечетной размерности в многообразии равно числу дырок четной размерности в его зеркальном партнере, и наоборот. «Это означает, что общее число дырок... в обоих многообразиях одинаково, даже несмотря на то, что замена дырок четной размерности на дырки нечетной размерности приводит к совершенно различным формам и геометрическим структурам», – замечает Грин.⁹⁴

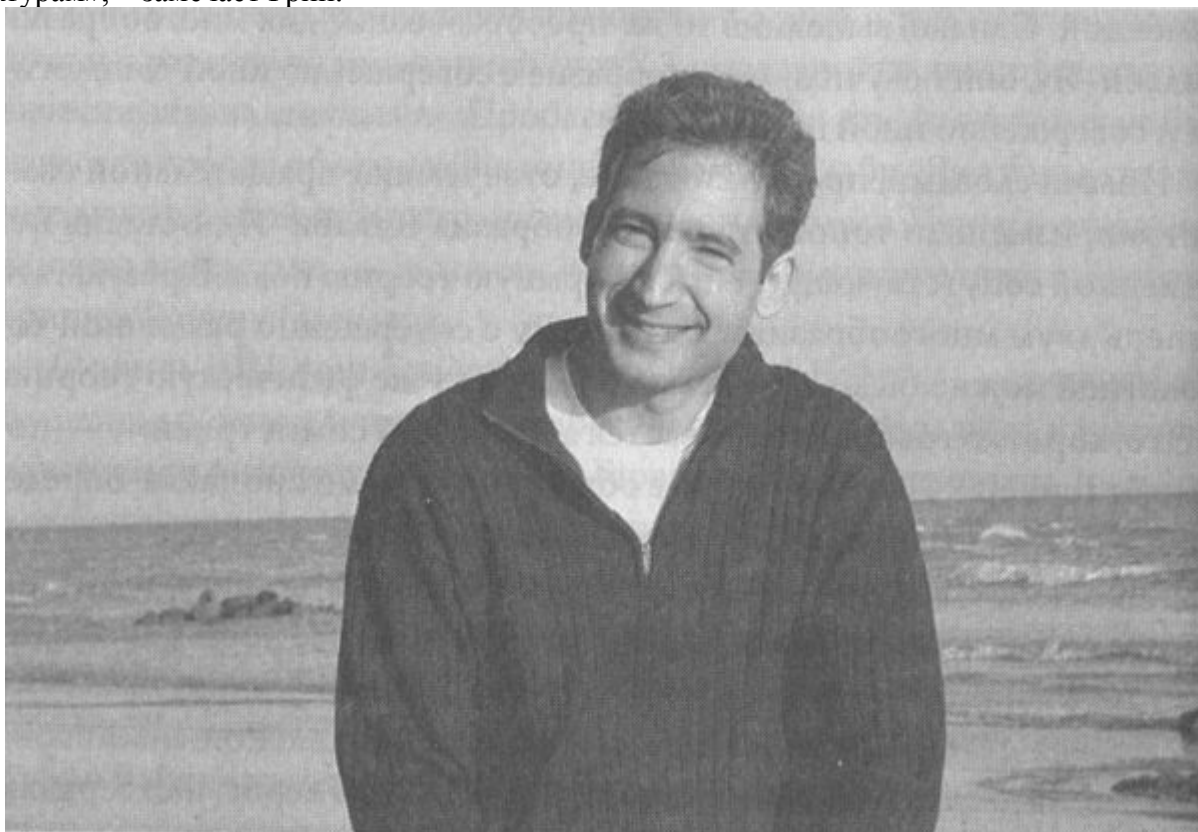


Рис. 7.1. Брайан Грин (© Андреа Кросса)

93 B. R. Greene and M. R. Plesser, “Duality in Calabi-Yau Moduli Space,” *Nuclear Physics B* 338 (1990): 15–37.

94 Brian Greene, *The Elegant Universe* (New York: Vintage Books, 2000), p. 258.

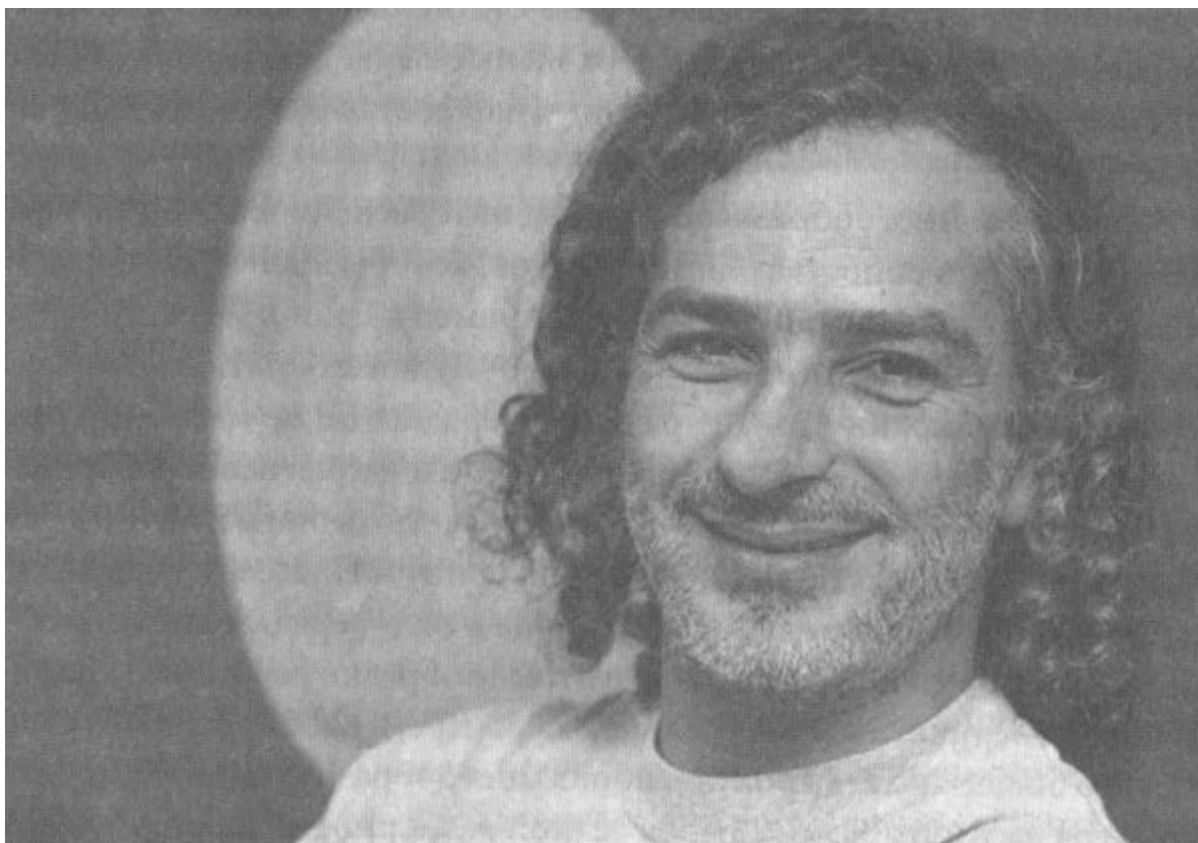


Рис. 7.2. Ронен Плессер (Duke Photography)

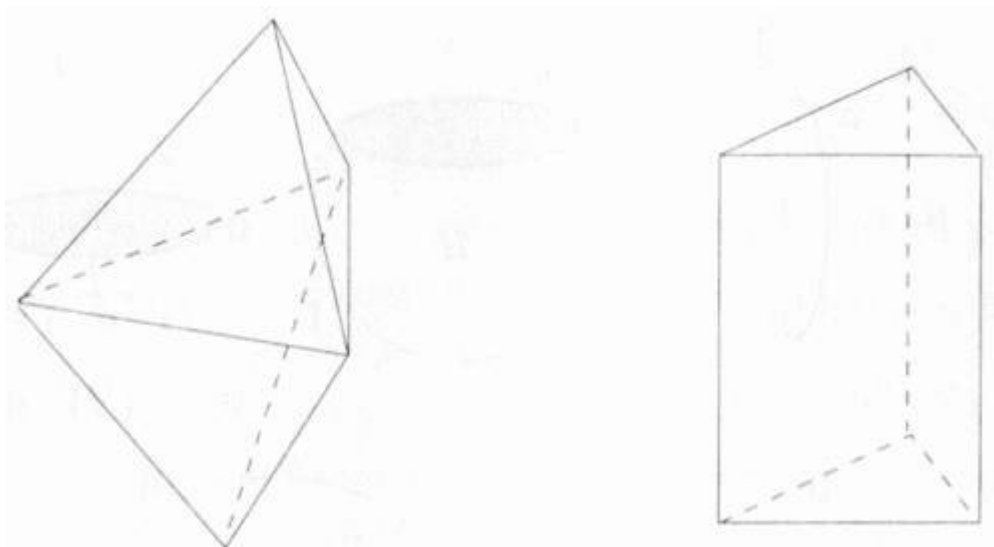


Рис. 7.3. Двойной тетраэдр, имеющий пять вершин и шесть граней, и треугольная призма, имеющая шесть вершин и пять граней, являются простыми примерами зеркальных многообразий. Эти привычные всем многогранники, в свою очередь, можно использовать для создания многообразия Калаби-Яу и его зеркальной пары, причем число вершин и граней многогранника будет определять внутреннюю структуру соответствующего многообразия Калаби-Яу. Подробности процедуры «конструирования» многообразия носят скорее технический характер, выходящий за рамки этого обсуждения

Это еще не объясняет «зеркальный» аспект обнаруженной симметрии, который проще проиллюстрировать при помощи топологии. Было установлено, например, что многообразия Калаби-Яу и их зеркальные партнеры имеют эйлеровы характеристики противоположных знаков, что говорит о существенном различии в их топологиях, хотя и несколько опосредованно, поскольку эти числа сами по себе дают только незначительную часть

информации о пространстве и, как уже было показано ранее, многие пространства, заметно отличающиеся друг от друга, такие как куб, тетраэдр и сфера, могут иметь одинаковые эйлеровы характеристики. Можно показать это и более строго, представив эйлеровы характеристики в виде сумм и разностей целых чисел, называемых *числами Бетти*, которые содержат более полную информацию о внутренней структуре пространства.

Любой объект имеет $n + 1$ чисел Бетти, где n – размерность объекта. Таким образом, нульмерная точка имеет одно число Бетти; одномерная окружность – два числа Бетти; двумерная поверхность, например сфера, – три числа Бетти и т. д. Первое число Бетти обозначается как b_1 , второе – как b_2 и последнее – как b_k , где k -е число Бетти представляет собой количество независимых k -мерных циклов, или петель, которые могут быть обернуты вокруг пространства или многообразия или пропущены через рассматриваемое пространство или многообразие. Подробнее о циклах будет рассказано далее.

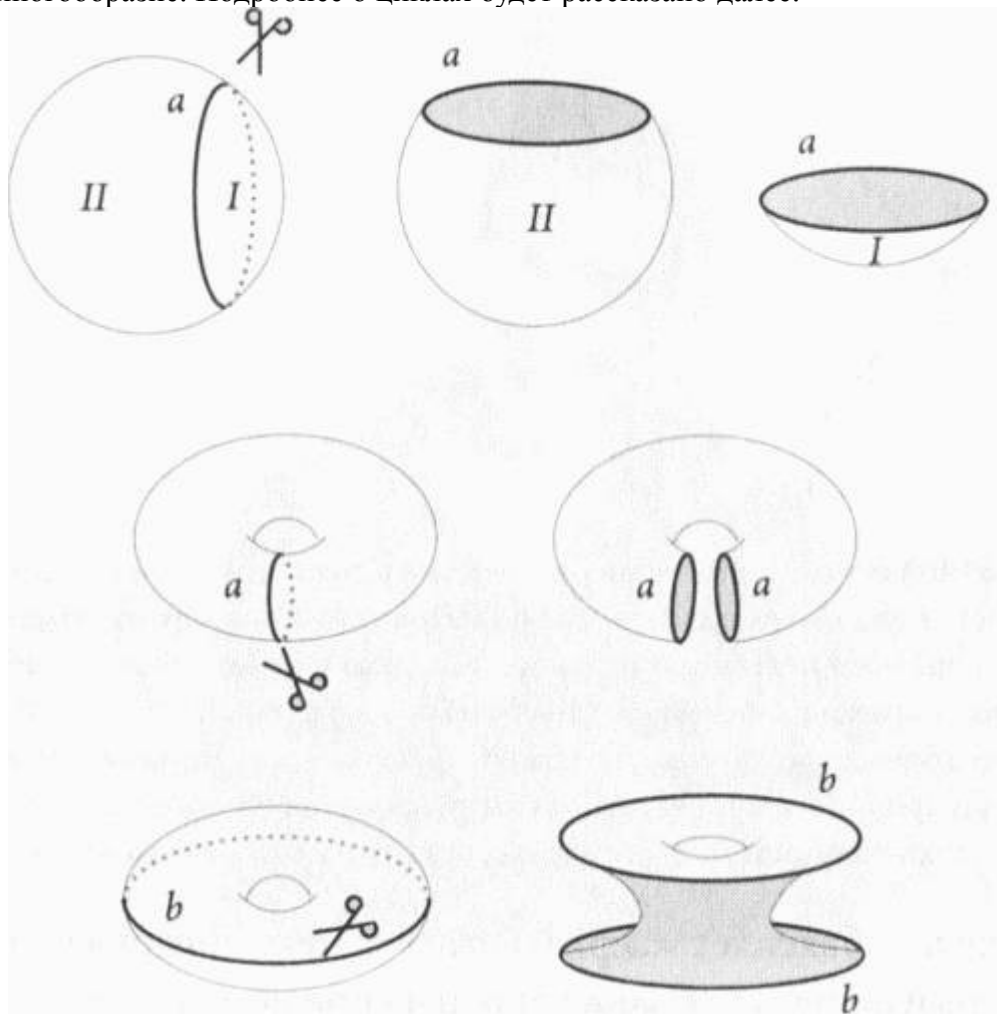


Рис. 7.4. Поверхности (речь идет об ориентируемых или двухсторонних поверхностях) можно различать топологически, сравнивая их числа Бетти. В целом число Бетти означает число способов, которыми можно провести разрез на двумерной поверхности, не приводящих к образованию двух отдельных частей. Для сферы подобный разрез невозможен, поэтому ее число Бетти равно нулю. С другой стороны, бублик возможно разрезать двумя различными способами, не разделив его на две отдельные части, как показано на рисунке. Поэтому его число Бетти равно двум

В случае двумерных поверхностей первое число Бетти описывает число возможных разрезов, которые не приводят к разделению объекта на два. Если взять поверхность сферы, являющуюся двумерным пространством, то очевидно, что разрезать ее, не разделив на две части, невозможно. Это равносильно утверждению о том, что для сферы первое число Бетти равно нулю.

Рассмотрим теперь полый бублик. Проведя разрез вокруг бублика вдоль его «экватора», вы все равно получите цельный объект, хотя и вывернутый наизнанку. Аналогично, если разрез пройдет через дырку бублика, его цельность снова останется неприкосновенной, хотя внешний вид сильно пострадает. Поскольку существует только два способа разрезать бублик и ни один из них не приводит к образованию двух частей, можно утверждать, что его первое число Бетти равно двум.

$$\begin{array}{cccc}
 & & 1 & \\
 & & 0 & 0 \\
 & 0 & h^{1^1}(V) & 0 \\
 1 & h^{2^1}(V) & h^{2^1}(V) & 1 \\
 & 0 & h^{1^1}(V) & 0 \\
 & & 0 & 0 \\
 & & 1 & \\
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{cccc}
 & & 1 & \\
 & & 0 & 0 \\
 & 0 & h^{2^1}(V) & 0 \\
 1 & h^{1^1}(V) & h^{1^1}(V) & 1 \\
 & 0 & h^{2^1}(V) & 0 \\
 & & 0 & 0 \\
 & & 1 & \\
 \end{array}$$

Рис. 7.5. Матрица чисел размером 4×4 , известная как ромб Ходжа, содержит в себе подробную топологическую информацию о многообразии Калаби-Яу, имеющем три комплексных измерения. Хотя многообразие Калаби-Яу нельзя однозначно охарактеризовать ромбом Ходжа, многообразия с различными ромбами Ходжа топологически различны. Ромбы Ходжа, приведенные на рисунке, являются зеркальными отображениями друг друга и соответствуют многообразию Калаби-Яу и его зеркальному партнеру

Теперь рассмотрим крендель с двумя дырками. Можно провести замкнутый разрез по внутренней поверхности каждой из его дырок или провести разрез по перемычке, соединяющей дырки, или же сделать разрез вдоль его внешнего края – крендель все равно останется объектом. Таким образом, существуют четыре способа разрезать крендель с двумя дырками, ни один из которых не приведет к возникновению двух отдельных частей, следовательно, его первое число Бетти равно четырем. А для кренделя с 18 дырками первое число Бетти равно 36.

Можно, однако, получить и более точное описание топологии различных многообразий. Каждое из чисел Бетти представляет собой сумму чисел, называемых *числами Ходжа*, открытыми шотландским математиком В. В. Д. Ходжом. Эти числа позволяют более пристально взглянуть на подструктуру пространства. Информация о ней содержится в так называемом ромбе Ходжа.

Ромбы Ходжа позволяют нам представить себе «зеркало» в зеркальной симметрии. Таблица из шестнадцати чисел соответствует определенному шестимерному многообразию Калаби-Яу, которое мы обозначим как M . Чтобы получить ромб Ходжа для зеркального многообразия M' , нужно нарисовать прямую, проходящую через середины левой нижней и правой верхней сторон. После этого необходимо перевернуть числа Ходжа относительно этой прямой. Модифицированный ромб Ходжа, характеризующий многообразие, является зеркальным партнером исходного, буквально отражением или зеркальным отображением оригинала.

Тот факт, что числа Ходжа для многообразия и его зеркального партнера симметричны относительно диагонали, является следствием, а не объяснением зеркальной симметрии, поскольку это возможно и для двух многообразий, не являющихся зеркальными парами. Взаимосвязь между числами Ходжа для различных многообразий, обнаруженная Грином и Плессером, была не доказательством, а лишь намеком на то, что им удалось обнаружить новое проявление симметрии. Намного более убедительным, по словам Плессера, стало то, что им удалось обнаружить «полную идентичность» физики (или конформных теорий поля)

многообразий, являющихся зеркальными парами.⁹⁵

Независимое подтверждение идей Грина и Плессера появилось в том же 1989-м, через несколько дней после того, как они отправили свою статью в печать. Как сообщил Грину Канделас, ему и двум его студентам удалось, перебрав большое количество рассчитанных на компьютере многообразий Калаби-Яу, обнаружить весьма интересную особенность. Они заметили, что эти многообразия образуют пары, в которых число дырок четной размерности для одного многообразия совпадало с числом дырок нечетной размерности для второго. Обнаруженный обмен числом дырок, количеством возможных форм и размеров и числами Ходжа между двумя многообразиями весьма заинтриговал исследователей, хотя и мог быть просто математическим совпадением. По словам Грина, «вполне возможно, что их связь имела такое же отношение к физике, как связь между магазином, в котором молоко продают по доллару, а сок – по два, и магазином, в котором сок стоит два доллара, а молоко – один. Точку в этом вопросе поставило доказательство, найденное мной и Плессером, которым мы показали, что различные пары многообразий Калаби-Яу приводят к одинаковой физике. Это и стало подлинным определением явления зеркальной симметрии – из которого уже проистекали все прочие следствия, – и это гораздо больше, чем простая перестановка двух чисел».⁹⁶

По словам Грина, эти два направления исследований были не только параллельными, но и «взаимодополняющими». В то время когда они с Плессером углубились в исследование физической природы указанных совпадений, Канделасу со своими студентами при помощи их компьютерной программы удалось обнаружить огромное количество многообразий Калаби-Яу, для которых числа Ходжа образовывали зеркальные пары. Когда эти статьи вышли в свет (обе в 1990 году), Грин объявил, что «зеркальная симметрия теории струн» окончательно установлена.⁹⁷

По словам Кумруна Вафы, он был счастлив, увидев доказательство, в которое он внес заметный вклад, – хотя и никогда не сомневался в существовании зеркальной симметрии. «Я иногда говорю, что если бы мы сформулировали эту теорию без каких-либо известных примеров, то это было бы намного более смелым шагом с нашей стороны», – иронизирует он.⁹⁸

Сначала я был настроен по отношению к исследовательской программе Вафы и Грина скептически, поскольку, как я неоднократно говорил им, все многообразия Калаби-Яу, обнаруженные на тот момент, имели отрицательные эйлеровы характеристики. Если их предположения имели под собой реальную основу и многообразия с противоположными знаками эйлеровых характеристик действительно образовывали пары, то число многообразий с положительными эйлеровыми характеристиками должно было быть примерно таким же, как и число многообразий с отрицательными эйлеровыми характеристиками, поскольку эйлеровы характеристики многообразия и его зеркального партнера имеют противоположные знаки. К счастью, эти рассуждения не заставили Вафу, Грина, Плессера и других отказаться от исследований, посвященных поиску нового типа симметрии. Мораль этой истории заключается в том, что, вместо того чтобы заранее делать ставки на возможность или невозможность чего-либо, лучше просто взять и проверить. Вскоре после этого нами было обнаружено огромное количество многообразий Калаби-Яу с положительными эйлеровыми характеристиками – достаточно большое, для того чтобы я мог отбросить свои первоначальные сомнения.

Вскоре я попросил Грина выступить перед собранием математиков с докладом по вопросу зеркальной симметрии; этот доклад собирался посетить, в том числе, и такой авторитет, как И. М. Зингер из Массачусетского технологического института. Будучи физиком по образованию, Грин весьма переживал по поводу выступления перед таким

95 Plesser, interview with author, September 19, 2008.

96 Greene, interview with author, March 11, 2010.

97 Greene, *The Elegant Universe*, p. 259.

98 Cumrun Vafa (Harvard University), interview with author, September 19, 2008.

большим скоплением людей. Я же посоветовал ему как можно чаще в своей лекции использовать слово «квантовый», зная, какое впечатление оно производит на математиков. Так, зеркальную симметрию я предложил ему описать в терминах «квантовой когомологии» – термина, пришедшего мне в голову в это время.

Объектом исследования когомологии являются циклы, или петли на многообразии, а также типы их пересечения. Циклы, в свою очередь, связаны с подповерхностями в пределах многообразия, также называемыми *подмногообразиями*, не имеющими границ. Чтобы лучше понять, что имеется в виду под понятием подмногообразия, представьте себе кусок швейцарского сыра в форме шара. Можно, рассматривая этот сырный шар как единое трехмерное пространство, попробовать завернуть его в полиэтиленовую пленку. Но и внутри этого шара можно также найти сотни дырок – подповерхностей в пределах большей поверхности, – которые тоже можно чем-то покрыть или что-то через них пропустить, например резиновую ленту. Подмногообразие представляет собой геометрический объект с четко определенными размером и формой. Для физика цикл – это просто менее строгое определение петли, основанное исключительно на ее топологии, тогда как большинство геометров не видят никакой разницы между циклом и подмногообразием. Тем не менее мы стремимся использовать циклы – подобные окружностям, проходящим через дырку бублика, – для того, чтобы получить информацию о топологии многообразия.

Физикам знаком метод, позволяющий связать квантовую теорию поля с заданным многообразием. Однако поскольку многообразие, как правило, имеет бесконечное число циклов, они обычно прибегают к аппроксимации, сводящей это бесконечное число к конечному, с которым уже можно свободно обращаться. Этот процесс носит название *квантования* – взяв величину, которая может принимать бесконечное число возможных значений, например частоты радиоволн в FM-диапазоне, только о некоторых из них говорят как о разрешенных. Подобный процесс приводит к введению квантовых поправок в исходное уравнение, которое описывает циклы и, следовательно, когомологию. По этой причине говорят именно о *квантовой когомологии*.

Как оказалось, существует не единственный способ введения квантовых поправок. Благодаря зеркальной симметрии для любого многообразия Калаби-Яу можно построить эквивалентный ему с физической точки зрения зеркальный партнер. Многообразия, являющиеся зеркальными партнерами, описываются двумя различными по виду, но эквивалентными по сути вариантами теории струн, типа IIA и типа IIB, которые описывают одну и ту же квантовую теорию поля. Мы можем сделать эти расчеты относительно легко для модели B, где квантовые поправки оказываются равными нулю. Расчет же для модели A, в которой квантовые поправки в нуль не обращаются, практически невозможен.

Примерно через год после выхода статьи Грина и Плессера, внимание математического сообщества привлекло новое открытие в области зеркальной симметрии. Канделасу, Ксении де ла Осса, Полу Грину и Линде Паркс удалось показать, что зеркальная симметрия может оказать помощь при разрешении математических задач, в частности в области алгебраической и нумеративной геометрии, в том числе некоторых из тех, что не поддавались математикам на протяжении десятилетий. Задача, которую рассмотрел Канделас со своими коллегами, носила название задачи трехмерной поверхности пятого порядка и в то время была у всех на слуху. Свое второе название – задача Шуберга – она получила в честь немецкого математика XIX века Германа Шуберга, решившего ее первую часть. Задача Шуберга имеет отношение к определению количества рациональных кривых – то есть кривых рода 0, не имеющих дырок, таких как сфера, – которые можно провести на многообразии Калаби-Яу пятого порядка (шестимерном).

Подобный расчет может показаться весьма странным занятием для того, кто не увлекается нумеративной геометрией, – для тех же, кто работает в этой области, подобная деятельность является вполне привычной. На самом деле задача весьма проста – это не сложнее, чем высыпать на стол конфеты из вазы и сосчитать их. Расчет числа определенных объектов на многообразии и очерчивание круга приложений, в которых полученное число

может оказаться полезным, на протяжении столетия или больше были важнейшими задачами для математиков. Число, которое необходимо найти, в конце этого процесса должно оказаться конечным, поэтому поиск нужно ограничить компактными пространствами, небесконечными плоскостями. Если, к примеру, необходимо рассчитать число точек пересечения между двумя кривыми, то в случае наличия точек соприкосновения между кривыми могут возникнуть затруднения. Впрочем, математики, занимающиеся нумеративной геометрией, уже разработали методики, позволяющие разобраться с этими сложностями и получить строго определенное число.

Одна из первых задач такого типа была сформулирована приблизительно в 200 году до нашей эры греческим математиком Аполлонием, которого интересовал следующий вопрос: если даны три окружности, то сколькими способами можно нарисовать четвертую так, чтобы она касалась всех трех одновременно? Ответ на этот вопрос (восемь) может быть получен с помощью линейки и циркуля. Для решения же задачи Шуберта необходимы более сложные вычисления.

В работе над этой задачей математики избрали поэтапный подход, рассматривая за раз только одну степень. Под степенью понимается наивысшая из степеней слагаемых, входящих в многочлен. К примеру, степень полинома $4x - 5y^{23}$ равна трем, $6x^3y^4 + 4x$ – семи (степени x^3 и y^4 складываются), а $2x + 3y - 4$ – единице (график этой функции – прямая линия). Итак, задача состояла в том, чтобы выбрать многообразие (в нашем случае речь идет о трехмерной поверхности пятого порядка) и степень (порядок) кривых, количество которых необходимо было подсчитать.

Шуберт решил эту задачу для кривых первого порядка, показав, что на поверхности пятого порядка можно провести ровно 2875 кривых. Почти через сто лет после этого, в 1986 году, Шелдон Кац, в настоящее время работающий в Университете штата Иллинойс, показал, что число кривых второго порядка, подобных окружностям, на той же поверхности равно 609 250. Канделас, де ла Осса, Грин и Паркс, в свою очередь, рассмотрели случай кривых третьего порядка, от которого легко перейти к задаче о числе сфер, которые можно разместить в определенном пространстве Калаби-Яу. В этом им помог прием, основанный на зеркальной симметрии. В то время как решение задачи для многообразия пятого порядка было чрезвычайно сложным, его зеркальный партнер, созданный Грином и Плессером, позволял найти намного более простой путь к решению.

Кроме того, в первой статье Грина и Плессера, посвященной зеркальной симметрии, была выдвинута ключевая идея о том, что взаимодействия Юкавы можно представить при помощи двух различных математических формул, одна из которых будет описывать исходное многообразие, а вторая – его зеркальную пару. Первая из этих формул, включающая в себя число рациональных кривых различных степеней, которые можно было обнаружить на многообразии, по словам Грина, была просто «кошмарной». Со второй формулой, зависящей от формы многообразия в более общем виде, работать было намного проще. Однако так как обе формулы описывали один и тот же физический объект, они должны быть эквивалентными – подобно словам «кот» и «cat», которые имеют различный вид, но описывают одно и то же пушистое существо. Статья Грина и Плессера содержала уравнение, из которого напрямую следовала эквивалентность этих двух столь различных формул.

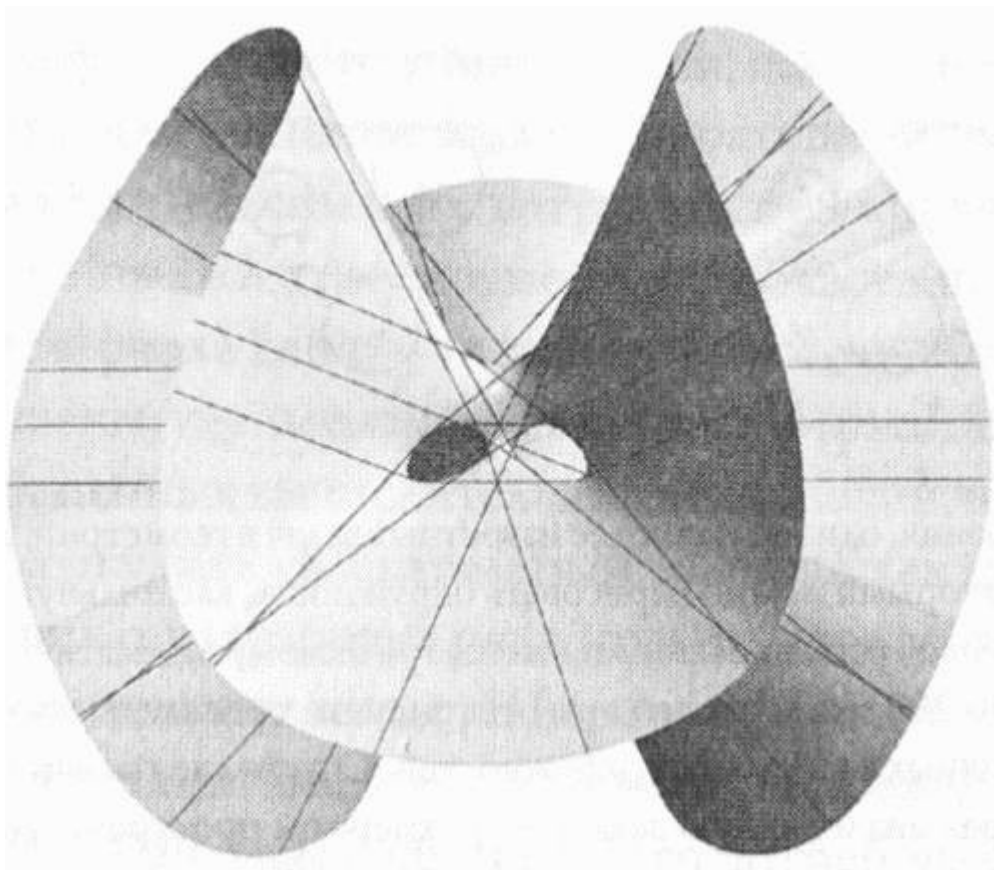


Рис. 7.6. Выдающимся достижением геометрии XIX века стало доказательство математиками Артуром Кэли и Джорджем Сэлмоном утверждения, что поверхность третьего порядка, приведенная на рисунке, содержит ровно 27 прямых. Герман Шуберт впоследствии обобщил этот результат, получивший название теоремы Кэли-Сэлмона (изображение предоставлено 3D-XplorMath Consortium)

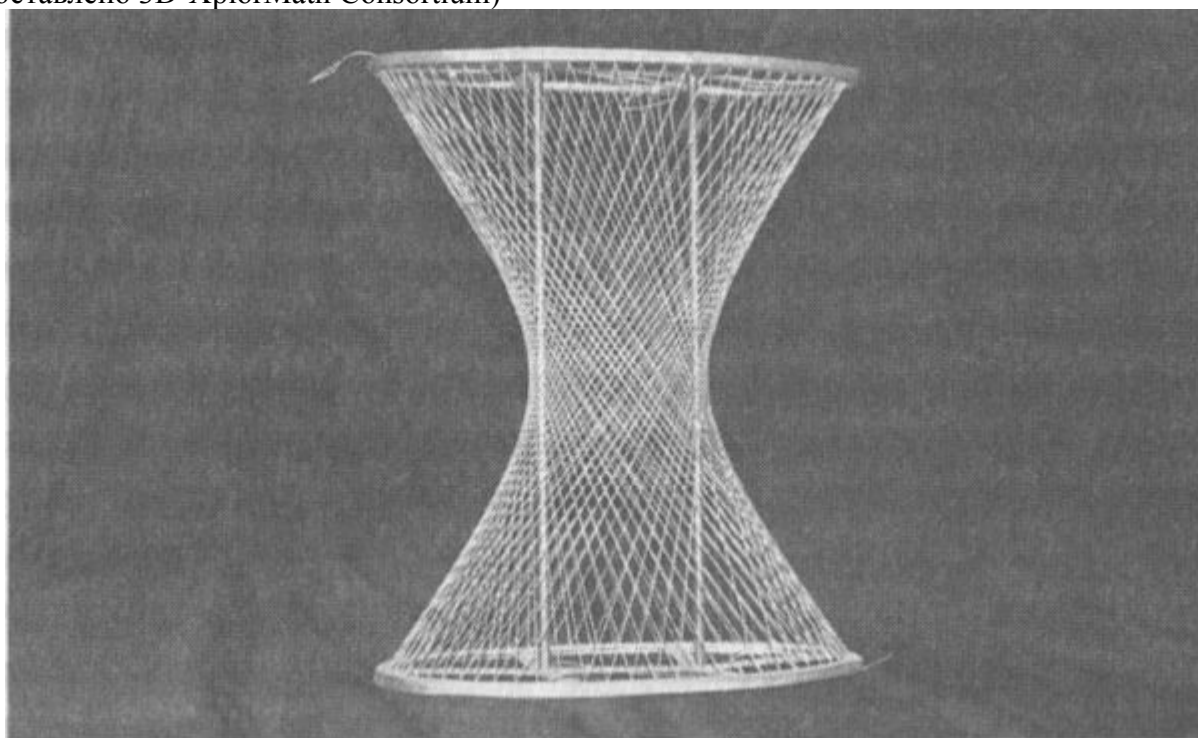


Рис. 7.7. Подсчет числа прямых или кривых на поверхности является обычной задачей алгебраической и нумеративной геометрии. Чтобы лучше понять, что подразумевается под числом прямых на поверхности, рассмотрим приведенный на рисунке дважды линейчатый гиперboloид как поверхность, полностью состоящую из прямых. Он называется дважды

линейчатым, поскольку через каждую его точку проходят две различные прямые линии. Подобная поверхность плохо подходит для нумеративной геометрии по причине бесконечного числа прямых, которые можно на ней провести (фотография Карена Шаффнера, математический отдел Аризонского университета)

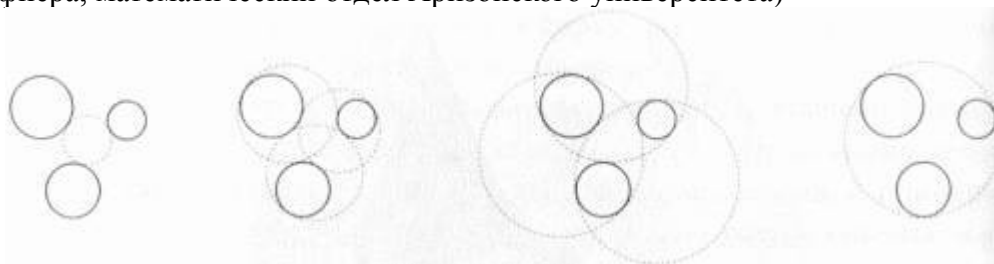


Рис. 7.8. Задача Аполлония, одна из наиболее известных задач в геометрии, посвящена вопросу о числе способов, которыми можно нарисовать окружность, касательную к трем заданным. Постановка задачи и первое решение приписывается греческому математику Аполлонию Пергскому (приблизительно 200 год до нашей эры). На рисунке приведены восемь решений этой задачи – восемь различных касательных окружностей. Спустя две тысячи лет математик Герман Шуберт рассмотрел аналогичную задачу в трехмерном пространстве, показав, что построить сферу, касательную к четырем заданным сферам, можно шестнадцатью способами.

«Даже если у тебя есть уравнение, в достоверности которого с формальной точки зрения ты не сомневаешься, решить его с достаточной точностью и получить ответ в виде числа может оказаться сложной задачей, – замечает Грин. – У нас было уравнение, но не было инструментов для получения определенного числа. Канделас и его сотрудники разработали эти инструменты, что стало крупнейшим достижением, оказавшим огромное влияние на геометрию».⁹⁹

Работа Грина и Плессера наглядно иллюстрирует всю мощь зеркальной симметрии. Теперь можно было не утруждать себя подсчетом числа кривых в пространстве Калаби-Яу, поскольку, проведя совершенно другое вычисление – с виду не имеющее ничего общего с работой по подсчету кривых, – можно было получить тот же ответ. Когда Канделас и его коллеги применили этот подход к расчету количества кривых третьего порядка на трехмерной поверхности пятого порядка, они получили число 317 206 375.

Наш интерес, однако, заключался не столько в определении количества рациональных кривых, сколько в исследовании многообразия как такового. Дело в том, что в процессе подсчета мы по сути дела перемещаемся по кривым, используя хорошо разработанные методики, до тех пор пока не пройдем все пространство. В ходе этой процедуры мы фактически определяем пространство – неважно, будет это трехмерная поверхность пятого порядка или какое-либо другое многообразие, – в терминах данных кривых.

Результатом всего вышесказанного стало второе рождение уже порядком подзабытой области геометрии. По словам Марка Гросса, математика из Калифорнийского университета, идея использования зеркальной симметрии для решения задач нумеративной геометрии, впервые предложенная Канделасом и его сотрудниками, привела к возрождению целой дисциплины. «К тому времени эта область исследований почти полностью исчерпала себя, – говорит Гросс. – Когда все старые задачи были решены, ученые занялись перепроверкой чисел Шуберта при помощи современных вычислительных технологий, но это занятие едва ли можно было назвать увлекательным. И вдруг, как гром с ясного неба, Канделас заявил о разработке ряда новых методов, выходящих далеко за пределы того, что мог представить себе Шуберт».¹⁰⁰ Физики многое заимствуют из математики, а вот математики, прежде чем заимствовать из физики метод Канделаса, прежде всего потребовали более детального обоснования его строгости.

⁹⁹ Greene, interview with author, March 13, 2010.

¹⁰⁰ Mark Gross (UCSD), interview with author, October 31, 2008.

Случайно, приблизительно в это же время – в мае 1991 года, если быть точным, – я организовал конференцию в Исследовательском институте математических наук Беркли, для того чтобы математики и физики получили возможность поговорить о зеркальной симметрии. И. М. Зингер, один из основателей института, изначально выбрал для конференции другую тему, но мне удалось его переубедить, упомянув некоторые из новых открытий в области зеркальной симметрии, которые представлялись мне особенно захватывающими. Зингер как раз незадолго до этого посетил лекцию Брайана Грина и потому легко согласился со мной и попросил возглавить это мероприятие.

Я возлагал большие надежды на то, что эта конференция позволит преодолеть барьеры между родственными областями исследований, возникающие из-за разницы в языке и накопленных знаниях. Во время конференции Канделас представил результаты, полученные им для проблемы Шуберта, но оказалось, что его число заметно отличалось от числа, полученного гораздо более строгим путем двумя норвежскими математиками Гейром Эллингсрудом и Штейном Арилдом Штремме (их ответ был – 2 682 549 425). В силу присущей им заносчивости, математики, работающие в области алгебраической геометрии, обвинили физиков в том, что те допустили ошибку. Прежде всего, по словам математика из Кайзерслаутернского университета Андреаса Газмана, «математики просто не понимали того, чем занимались физики, поскольку они [физики] использовали совершенно другие методы – не существующие в математике и далеко не всегда строго доказанные»¹⁰¹.

Канделас и Грин были весьма озабочены возможностью допущенной ими ошибки, но им никак не удавалось понять, где именно они встали на неверный путь. В то время я много общался с обоими, особенно с Грином, и меня также занимал вопрос, где именно в процессе интегрирования по бесконечномерному пространству, которое нужно было затем свести к конечной размерности, могла быть допущена какая-либо неточность. Конечно, в ходе математических преобразований неоднократно приходилось сталкиваться с проблемой выбора, причем ни один из вариантов нельзя было считать совершенным. Однако хотя все это ставило Канделаса и Грина в несколько неловкое положение, нам не удавалось обнаружить какую-либо погрешность в их рассуждении, основанном скорее на физических идеях, нежели на строгом математическом доказательстве. Более того, несмотря на критику со стороны математиков, они остались верны зеркальной симметрии.

Все прояснилось приблизительно через месяц, когда Эллингсруд и Штремме обнаружили ошибку в своей компьютерной программе. Исправив ее, они получили тот же ответ, что и Канделас с соавторами. Норвежские математики проявили высокую степень научной честности, запустив заново свою программу, перепроверив результаты и обнаружив свою ошибку. На их месте многие постарались бы скрывать найденную ошибку как можно дольше, но Эллингсруд и Штремме сделали противоположное, моментально проинформировав научное сообщество как об ошибке, так и о ее исправлении.

Для зеркальной симметрии заявление, сделанное Эллингсрудом и Штремме, стало настоящим моментом истины. Оно не только привело к дальнейшему развитию этой области, но и помогло изменить отношение к самой идее. Если до этого многие математики считали зеркальную симметрию полной чушью, то теперь пришлось признать, что им все же есть чему поучиться у физиков. Показательно, что математик Дэвид Моррисон, в то время работавший в Университете Дьюка, на встрече в Беркли был одним из наиболее ярких критиков. Однако после описанных событий его мнение полностью изменилось, и вскоре ему даже удалось внести существенный вклад в концепцию зеркальной симметрии, теорию струн и теорию переходов с изменением топологии для многообразий Калаби-Яу.

Разобравшись с проблемой Шуберта для кривых третьего порядка, Канделас и его коллеги применили разработанный ими метод зеркальной симметрии для нахождения решений в случае кривых со степенями от единицы до десяти. В результате они получили общую формулу, позволяющую для трехмерной поверхности пятого порядка найти число кривых любой необходимой степени. Проделав это, они встали на прямую дорогу, ведущую к

101 Andreas Gathmann (University of Kaiserslautern), interview with author, August 25, 2008.

решению задачи вековой давности, еще в 1900 году названной немецким математиком Дэвидом Гильбертом одной из двадцати трех важнейших математических задач современности, – речь идет о попытке построить «строгое основание исчислительной геометрии Шуберта», обеспечив таким образом «возможность заранее предсказать как степень полученных уравнений, так и число их решений».¹⁰² Формула, выведенная Канделасом, удивила многих из нас. Численные решения задачи Шуберта оказались обычными последовательностями чисел, не имеющими ни общих особенностей поведения, ни видимых связей между собой. Впрочем, работа Канделаса и его коллег показала, что эти числа не являются случайными, а представляют собой важную часть завершенной структуры.

Существование данной структуры, установленное Канделасом и его сотрудниками, позволило получить формулу, необходимую для дальнейшей работы. Эта формула была проверена при помощи большого числа математических вычислений для полиномов со степенями от одного до четырех. О первых трех задачах уже шла речь ранее, а для кривых четвертого порядка решение было получено в 1995 году математиком Максимом Концевичем (в настоящее время работает в Институте высших научных исследований) – он получил число 242 467 530 000. Хотя формула, полученная группой Канделаса, полностью согласовывалась со всеми известными данными, вопрос о строгом доказательстве все еще был открыт. Многие математики, включая Концевича, предприняли немало усилий для представления уравнений Канделаса в форме полноценной гипотезы – в основном, за счет определения слагаемых, входящих в уравнения. Полученное в результате утверждение, известное как *гипотеза о зеркальной симметрии*, уже можно было подвергнуть окончательной проверке – математическому доказательству. Доказательство гипотезы о зеркальной симметрии стало обоснованием идеи зеркальной симметрии самой по себе.

Здесь я вынужден упомянуть одну из конфликтных ситуаций, которые время от времени возникают в математике. Как мне кажется, подобные ситуации неизбежны, поскольку мы живем в несовершенном мире, населенном несовершенными существами, а математика, несмотря на устоявшееся мнение о ней, совсем не является чистой интеллектуальной деятельностью, огражденной от политики, честолюбия, конкуренции и эмоций. Часто оказывается, что в подобных вопросах чем мельче причина для спора, тем большие она вызывает разногласия.

Мы с моими коллегами занимались исследованием гипотезы о зеркальной симметрии и ее обобщениями с 1991 года – со времени объявления Канделасом своих результатов. В статье, выложенной на сайт arXiv.org в марте 1996 года, Александр Гивенталь из Калифорнийского университета заявил, что ему удалось доказать гипотезу о зеркальной симметрии. Мы тщательно проработали эту статью и сочли ее – и в этом мы были не одиноки – крайне неясной. В том же году я лично пригласил моего коллегу из Массачусетского технологического института, считавшегося экспертом в этой области (который пожелал, чтобы его имя в этой книге осталось неназванным), прочитать на моем семинаре лекцию, посвященную доказательству Гивенталю. Он вежливо отказался, упомянув о своих серьезных сомнениях в убедительности аргументов, приведенных в статье. Точно так же и мне с моими коллегами не удалось шаг за шагом воспроизвести доказательство Гивенталю, несмотря на все наши попытки связаться с ним и соединить воедино те фрагменты, которые нам казались наиболее запутанными. Тогда мы приняли решение оставить эти бесплодные усилия и год спустя опубликовали наше собственное доказательство гипотезы о зеркальной симметрии.

Некоторые эксперты, в том числе Газман, назвали нашу статью «первым полным и строгим доказательством» гипотезы, аргументируя это тем, что доказательство Гивенталю «было весьма тяжелым для понимания, а в ряде мест – неполным»¹⁰³. Дэвид Кокс, математик

102 David Hilbert, “Mathematical Problems,” lecture, International Congress of Mathematicians, Paris, 1900, <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/hilbert/problems.html> (html version prepared by David Joyce, Mathematics Department, Clark University, Worcester, Mass.).

103 Andreas Gathmann, “Mirror Principle I,” *Mathematical Reviews*, MR1621573, 1999.

из колледжа Амхерст, являвшийся соавтором (вместе с Кацом) книги «Зеркальная симметрия и алгебраическая геометрия», также заявил о том, что мы представили «первое полное доказательство гипотезы».¹⁰⁴ С другой стороны, многие придерживались иного мнения, утверждая, что доказательство Гивенталя, опубликованное за год до нашего, было абсолютно полным и не содержало в себе каких-либо серьезных пробелов. Оставляя другим возможность продолжать дискуссию по этому поводу, сам я полагаю наилучшим объявить, что эти две статьи, сведенные вместе, представляют собой доказательство гипотезы о зеркальной симметрии, и оставить этот вопрос. Дальнейшее продолжение спора не имеет смысла, особенно в свете того, что в математике все еще полно нерешенных проблем, являющихся куда более достойным объектом для приложения усилий.

Итак, отбросив противоречия, зададимся вопросом: что же доказывают эти две статьи? Прежде всего, доказательство гипотезы о зеркальной симметрии подтвердило правильность формулы Канделаса для числа кривых определенного порядка. Но на самом деле наше доказательство было шире. Формула Канделаса была применима для подсчета числа кривых только на трехмерной поверхности пятого порядка, тогда как наши доказательства можно было использовать для гораздо более широкого класса многообразий Калаби-Яу, в том числе и для тех многообразий, к которым проявляют интерес физики, а также для других объектов, таких как векторные расслоения, о которых пойдет речь в девятой главе. Более того, наше обобщение позволяло использовать гипотезу о зеркальной симметрии не только для подсчета кривых, но и для получения других геометрических характеристик.

Как мне кажется, доказательство этой гипотезы позволило провести последовательную проверку некоторых идей из области теории струн с точки зрения строгой математики, что обеспечило данной теории крепкую математическую основу. Впрочем, теория струн не осталась в долгу перед математикой, поскольку зеркальная симметрия привела к созданию нового раздела алгебраической геометрии – нумеративной геометрии, – внося существенный вклад в решение давних проблем в этой области. В самом деле, многие из моих коллег, занимающихся алгебраической геометрией, рассказывали мне, что единственной работой за последние пятнадцать лет, которая вызвала у них интерес, стала работа, вдохновленная идеями о зеркальной симметрии. Огромный вклад в математику со стороны теории струн вынудил меня признать, что физическая интуиция определенно должна чего-то стоить. Это означало, что даже если природа и не работает строго по законам теории струн, эта теория, тем не менее, должна содержать в себе немалую долю истины, поскольку ее применение открывало путь к решению многих классических проблем, которые математики были не в состоянии решить самостоятельно. Даже сейчас, много лет спустя, невозможно представить себе независимый путь вывода формулы Канделаса, в котором не использовались бы идеи теории струн.

По иронии, единственным вопросом, который доказательство гипотезы о зеркальной симметрии так и оставило открытым, стал вопрос об определении самого понятия зеркальной симметрии. Во многих отношениях это явление, открытое физиками и впоследствии нашедшее заметное применение в математике, так и осталось загадкой, хотя в настоящее время уже определены два основных подхода, которые могут привести к ответу, – один из них известен как *гомологическая зеркальная симметрия*, другой же носит название *гипотезы SYZ*. Если гипотеза SYZ представляет собой попытку интерпретации зеркальной симметрии с геометрической точки зрения, то гомологическая зеркальная симметрия основана на алгебраическом подходе.

Для начала рассмотрим тот из двух подходов, в который мне удалось внести более заметный вклад, а именно гипотезу SYZ, название которой представляет собой аббревиатуру, образованную из первых букв фамилий авторов ключевой статьи по этой теме, вышедшей в 1996 году: Эндрю Строминджер – это S, Эрик Заслоу из Северо-Западного университета – это Z, а я – это Y. Подобные взаимодействия между учеными редко имеют формальную отправную точку – это, например, началось с моих случайных разговоров со Строминджером

104 David Cox (Amherst College), interview with author, June 13, 2008.

на конференции 1995 года в Триесте. Строминджер рассказывал о статье, написанной им незадолго до этого совместно с Кэтрин и Мелани Беккер, сестрами, в настоящее время занимающимися физикой в Техасском университете A&M. Так как D-браны в то время уже произвели немало шума в теории струн, целью статьи стало исследование того, как эти браны вписываются в геометрию Калаби-Яу. Идея авторов заключалась в том, что браны могут оборачиваться вокруг подмногообразий, находящихся внутри пространств Калаби-Яу. Сестры Беккер и Строминджер исследовали класс подмногообразий, сохраняющих суперсимметрию, что привело к открытию ряда весьма интересных свойств. Меня и Строминджера заинтересовал вопрос о той роли, которую эти подмногообразия могут играть в зеркальной симметрии.

Я вернулся в Гарвард, вдохновленный открывшейся возможностью, и сразу же обсудил ее с Заслоу, физиком, перешедшим в математику, который в то время был моим постдоком. Вскоре Строминджер приехал из Санта-Барбары в Гарвардский университет, руководство которого развернуло активную кампанию по переманиванию его в свои ряды. Впрочем, для того чтобы Строминджер принял окончательное решение о переходе, понадобился еще год. Итак, мы втроем смогли встретиться, соединив тем самым буквы S, Y и Z в одном и том же месте, в одно и то же время – и, впоследствии, на одной и той же странице статьи, поданной нами в печать в июне 1996 года.

Окажись гипотеза SYZ верной, это стало бы аргументом в пользу существования подструктуры многообразий Калаби-Яу, что привело бы к более глубокому пониманию их геометрии. Согласно этой гипотезе, многообразию Калаби-Яу можно представить в виде двух трехмерных многообразий, переплетенных друг с другом. Одним из этих пространств является трехмерный тор. Отделив этот тор от другой части, «обратив» его (заменяв радиус r обратной величиной $1/r$) и вновь соединив части в одно целое, вы получите многообразие, являющееся зеркальным по отношению к исходному. Как утверждает Строминджер, SYZ «позволяет получить простую физическую и геометрическую картину того, чему соответствует зеркальная симметрия»¹⁰⁵.

Согласно гипотезе SYZ, ключ к пониманию зеркальной симметрии лежит в подмногообразиях пространств Калаби-Яу и в способе их организации. Вы, наверное, помните приведенное ранее сравнение поверхности, содержащей в себе множество подповерхностей или подмногообразий, с куском швейцарского сыра. Подмногообразия в данном случае являются не участками поверхности, а отдельными объектами с размерностью меньше размерности многообразия, представляющими собой отдельные дырки в «сыре», каждую из которых можно по отдельности покрыть чем-либо или пропустить что-либо сквозь нее. Точно так же, согласно гипотезе SYZ, и подмногообразия в пространствах Калаби-Яу обернуты D-бранами. Не хотелось бы вносить в дальнейший рассказ путаницу, но не могу не упомянуть, что существует и другое мнение, согласно которому D-браны сами являются подмногообразиями, а не просто их «упаковками». Физики предпочитают рассуждать в терминах бран, тогда как математикам удобнее пользоваться собственной терминологией. Подпространства такого типа, удовлетворяющие условию суперсимметрии, носят название *лагранжевых подмногообразий* и, как следует из их названия, обладают особыми свойствами: их размерность ровно вдвое меньше размерности пространств, в которых они находятся, а их мера (то есть длина, площадь, объем и т. д. – в зависимости от размерности) является минимальной.

Рассмотрим в качестве примера простейшее из возможных пространств Калаби-Яу – двумерный тор, или бублик. В роли лагранжева подмногообразия в данном случае будет выступать одномерное пространство – объект, представляющий собой петлю, пропущенную через дырку бублика. Поскольку длина петли должна быть минимальна, петля должна точно совпадать с наименьшей из окружностей, проходящих через дырку, – варианты с петлями произвольного размера, а также с волнистыми и искривленными петлями не подходят. «Все многообразие Калаби-Яу в этом случае представляет собой объединение окружностей, –

105 Andrew Strominger (Harvard University), interview with author, February 7, 2007.

объясняет Марк Гросс, человек, сделавший больше всех остальных для развития гипотезы SYZ с того момента, как она была сформулирована. – Пусть существует некое вспомогательное пространство, назовем его B , несущее в себе информацию обо всех этих окружностях и само по себе являющееся окружностью». ¹⁰⁶ Говорят, что B параметризует этот набор окружностей, то есть каждой точке на B соответствует определенная окружность, а каждой окружности, проходящей через дырку бублика, – определенная точка пространства B . Можно представить это и по-другому, сказав, что пространство B , называемое *пространством модулей*, является в определенном смысле каталогом подпространств, из которых состоит многообразие. При этом B – не просто список: помимо «перечня подпространств» оно содержит и информацию об их расположении. По словам Гросса, пространство модулей B может стать ключом ко всей гипотезе SYZ. Поэтому стоит потратить еще немного времени, чтобы разобраться поподробнее со вспомогательными пространствами.

Если добавить еще одно комплексное измерение, перейдя таким образом от двух вещественных измерений к четырем, многообразие Калаби-Яу превратится в КЗ-поверхность. Подмногообразия, в свою очередь, в этом случае являются уже не окружностями, а двухмерными торами, соединенными в единое целое в рамках многообразия. «Изобразить четырехмерное пространство мне не под силу, – говорит Гросс. – Но я могу описать пространство B , указывающее на то, в каком порядке расположены составляющие его подмногообразия (бублики)». ¹⁰⁷ В этом случае пространство B представляет собой просто двухмерную сферу. Каждая точка этой сферы соответствует отдельному бублику, за исключением двадцати четырех «плохих» точек, соответствующих «сжатым бубликам», имеющим сингулярности, смысл которых будет вкратце объяснен далее.

Добавим еще одно комплексное измерение, превратив рассматриваемое многообразие в трехмерное многообразие Калаби-Яу. Пространство B теперь превратится в трехмерную сферу (трехмерную поверхность мы изобразить не в состоянии), а ее подпространства – в трехмерные бублики. В этом случае набор «плохих» точек, соответствующих сингулярным бубликам, приходится на линейные сегменты, связанные друг с другом подобием сети. «Все точки линейного сегмента являются “плохими” [или сингулярными], однако те из них, которые лежат в вершинах сети, в местах пересечения сразу трех линейных сегментов, являются совсем плохими», – говорит Гросс. Эти точки, в свою очередь, соответствуют наиболее искаженным бубликам. ¹⁰⁸

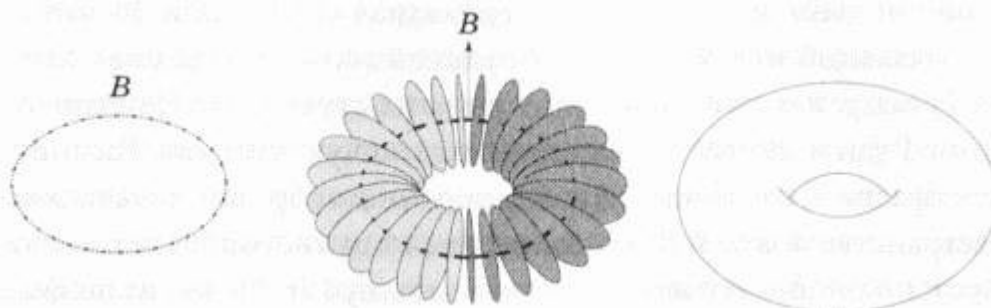


Рис. 7.9. Гипотеза SYZ, названная в честь ее авторов, Эндрю Строминджера, автора данной книги (Шинтана Яу) и Эрика Заслоу, предлагает способ разложения сложного пространства, такого как многообразие Калаби-Яу, на составные части, или подмногообразия. Хотя мы не в силах изобразить шестимерное многообразие Калаби-Яу, вместо этого мы можем нарисовать двухмерное (имеющее два вещественных измерения) пространство Калаби-Яу, представляющее собой бублик с плоской метрикой. Подмногообразия, образующие бублик, являются окружностями, и их порядок определяется вспомогательным пространством B , также представляющим собой окружность. Каждая точка на B соответствует определенной окружности; и все многообразие – или бублик –

¹⁰⁶ Gross, interview with author, September 19, 2008.

¹⁰⁷ Ibid.

¹⁰⁸ Gross, interview with author, September 24, 2008.

состоит из набора подобных окружностей

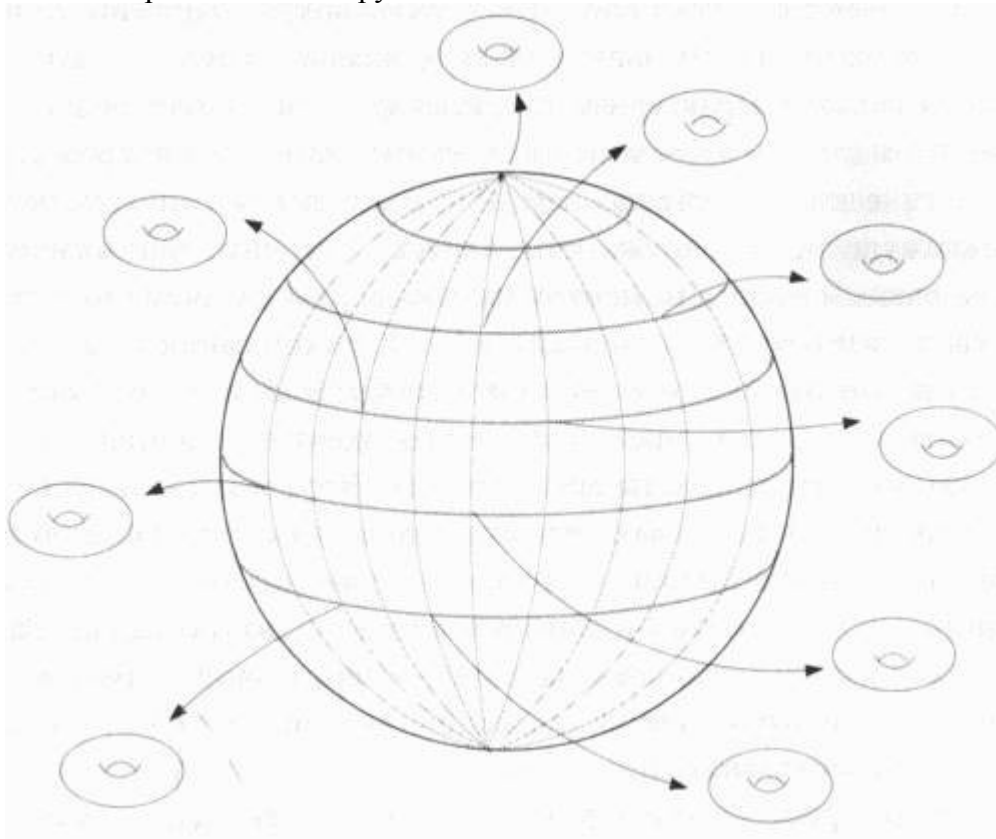


Рис. 7.10. Гипотеза SYZ предоставляет новый взгляд на КЗ-поверхности, являющиеся классом четырехмерных многообразий Калаби-Яу. Согласно гипотезе SYZ, мы можем создать КЗ-поверхность, взяв двухмерную сферу, являющуюся вспомогательным пространством в данном примере, и прикрепив к каждой ее точке двухмерный бублик

Именно здесь и проявляется зеркальная симметрия. Работая над первоначальной идеей SYZ, оксфордский геометр Найджел Хитчин, Марк Гросс и некоторые из моих бывших студентов (Найчанг Линг, Вейдонг Руан и другие) построили следующую картину. Рассмотрим многообразие X , состоящее из набора подмногообразий, перечисленных в пространстве модулей B . Теперь возьмем подмногообразия, имеющие радиус r , и заменим его на обратную величину $1/r$. Одной из неожиданных, хотя и прекрасных особенностей теории струн, не присущей классической механике, является возможность провести подобную замену, а именно перевернуть радиус цилиндра, сферы или пространства, не изменив при этом их физические характеристики. Движение точечной частицы по окружности радиуса r можно описать при помощи ее момента импульса, который при этом

квантуется – принимает строго определенные значения, кратные постоянной Планка – \hbar .

Струна, движущаяся по окружности, также обладает моментом импульса, но, в отличие от точечной частицы, она может наматываться на окружность один или более раз. Число оборотов струны вокруг окружности называется ее *топологическим числом*. Итак, движение струны, в отличие от движения частицы, характеризуется двумя квантующимися величинами: ее моментом импульса и ее топологическим числом. Рассмотрим струну с топологическим числом, равным двум, и моментом импульса, равным нулю, движущуюся по окружности радиуса r , и струну с топологическим числом, равным нулю, и моментом

импульса, равным двум (то есть $2\hbar$), движущуюся по окружности радиуса $1/r$. Хотя

описания этих двух случаев звучат по-разному и вызывают в воображении разные картины, с математической точки зрения оба случая идентичны и приводят к одним и тем же физическим характеристикам. Это свойство известно как *T-дуальность*. «Эта эквивалентность переходит с окружностей на их [декартовы] произведения – торы», – говорит Заслоу.¹⁰⁹ Буква T в названии «T-дуальность» и означает «торы». Строминджер, Заслоу и я сочли эту дуальность столь важной для зеркальной симметрии, что назвали нашу первую статью, посвященную гипотезе SYZ, «T-дуальность – это зеркальная симметрия».

Приведу простой пример, показывающий тесную взаимосвязь T-дуальности и зеркальной симметрии. Пусть многообразие M представляет собой тор – прямое произведение двух окружностей радиуса r . Многообразие, зеркальное к нему, M' , также является тором – произведением двух окружностей радиуса $1/r$. Представим себе теперь, что r чрезвычайно мало. Столь крошечный размер многообразия M приводит к тому, что для понимания связанной с ним физики нужно принимать во внимание квантовые эффекты. Таким образом, сложность расчетов многократно возрастает. Извлечь же физические характеристики из зеркального многообразия M' , намного легче, поскольку для очень малого r величина $1/r$ будет очень велика, и квантовые эффекты можно свободно проигнорировать. Итак, зеркальная симметрия под личиной T-дуальности может существенно упростить ваши расчеты и жизнь в целом.

Теперь попробуем собрать воедино все идеи, выдвинутые ранее, начиная с нашего двухмерного примера. Заменяя радиусы всех подмногообразий (окружностей) на $1/r$, вы обнаружите, что многообразие, состоящее из этих окружностей, изменит свой радиус, но все равно останется тором. Данный пример называют тривиальным, поскольку многообразие и его зеркальный партнер топологически идентичны. Четырехмерный пример с K3-поверхностями также является в некотором отношении тривиальным, поскольку все K3-поверхности топологически эквивалентны. Шестимерный пример с трехмерными многообразиями Калаби-Яу намного интереснее. Компонентами этого многообразия являются трехмерные торы. T-дуальность заменяет их радиусы на обратные. Для несингулярного тора изменение радиуса не приводит к изменению топологии. Однако по словам Гросса, «даже если все исходные подмногообразия принадлежали к числу “хороших” [несингулярных], изменение радиуса все же может повлечь за собой изменение топологии многообразия в целом, поскольку части... могут быть собраны вместе нетривиальным образом».¹¹⁰

Это утверждение проще всего понять при помощи аналогии. Взяв набор линейных сегментов или, например зубочисток, можно сделать из них цилиндр, втыкая их определенным образом в кружок из пробки. Вместо цилиндра, имеющего две стороны, из тех же зубочисток можно сделать и одностороннюю ленту Мёбиуса, втыкая их под небольшим углом друг к другу. Итак, из одних и тех же частей (подмногообразий) можно получить объекты с совершенно разной топологией.¹¹¹

Дело в том, что, проведя преобразование T-дуальности и используя различные методы сборки подмногообразий, мы получим два топологически различных многообразия, идентичных с точки зрения физики. Это часть того, что мы подразумеваем под зеркальной симметрией, но это далеко не все, поскольку другая важная особенность T-дуальности состоит в том, что зеркальные пары должны иметь эйлеровы характеристики противоположных знаков. Однако все многообразия, рассмотренные здесь – особые

109 Eric Zaslow (Northwestern University), interview with author, June 26, 2008.

110 Gross, interview with author, September 24, 2008.

111 Mark Gross, e-mail letter to author, September 29, 2008.

лагранжевы многообразия, – имеют эйлеровы характеристики, равные нулю, которые не изменяются при замене радиусов на $1/r$.

Все сказанное выше выполняется для «хороших» (несингулярных) подмногообразий, а для «плохих» (сингулярных) работать не будет. В таких подмногообразиях Т-дуальность приведет к изменению знака эйлеровой характеристики с +1 на -1 и наоборот. Предположим, что исходное многообразие включает тридцать пять плохих подмногообразий, двадцать пять из которых имеют эйлерову характеристику, равную +1, а десять – равную -1. Как показал Гросс, эйлерова характеристика многообразия является суммой эйлеровых характеристик входящих в него подмногообразий – в данном случае она будет равна +15. В зеркальном многообразии все будет наоборот: двадцать пять подмногообразий будут иметь эйлерову характеристику, равную -1, а десять – +1, что даст в результате -15 – величину, противоположную эйлеровой характеристике исходного многообразия – что как раз и было нам нужно.

Эти “плохие” подмногообразия, как уже обсуждалось выше, соответствуют “плохим” точкам в пространстве модулей B . Как объясняет Гросс: «Все самое интересное в зеркальной симметрии, все топологические изменения происходят в вершинах пространства B ». Итак, возникшая картина делает пространство B центральным объектом зеркальной симметрии. С самого начала это явление было покрыто мистическим туманом. «У нас были в наличии два многообразия, X и X' , неким образом связанные друг с другом, но что именно у них было общего – понять сложно», – добавляет Гросс. Этим «общим» оказалось пространство B , о существовании которого никто изначально не подозревал.

Гросс считает пространство B чем-то вроде кальки. Взглянув на кальку под одним углом, вы увидите одну структуру (многообразие), посмотрев под другим углом – другую. Эта разница обусловлена наличием сингулярных точек в пространстве B , в которых Т-дуальность перестает хорошо работать, что и приводит к изменениям.

Приблизительно такова современная картина зеркальной симметрии с точки зрения гипотезы SYZ. Одним из главных преимуществ этой гипотезы, по словам Строминджера, является то, что «происхождение зеркальной симметрии несколько прояснилось. Она пришлась по вкусу математикам, предоставив им геометрическую картину возникновения зеркальной симметрии – теперь они уже могли не ссылаться в своих исследованиях на теорию струн»¹¹². В дополнение к геометрическому объяснению зеркальной симметрии наша гипотеза, по словам Заслоу, «предложила метод создания зеркальных пар».¹¹³

Важно иметь в виду, что SYZ является всего лишь гипотезой, доказанной только в нескольких частных случаях, но не в общем виде. Несмотря на то что в своей первоначальной формулировке эта гипотеза, возможно, недоказуема, она была модифицирована в свете новых идей, соединив в себе, по словам Гросса, «все из области зеркальной симметрии».¹¹⁴

Последнее утверждение многим может показаться спорным – и, возможно, даже преувеличенным. Но гипотеза SYZ уже использовалась, в частности, Концевичем и Яковом Сойбельманом из Университета штата Канзас для доказательства частного случая гомологической зеркальной симметрии, являющейся еще одной попыткой дать фундаментальное математическое описание зеркальной симметрии.

Теория гомологической зеркальной симметрии была впервые предложена Концевичем в 1993 году и на сегодняшний день находится на стадии разработки, привлекая к себе интерес как физиков, так и математиков. Изначальная формулировка зеркальной симметрии была по большому счету бессмысленной с точки зрения математиков, поскольку предполагала наличие двух различных многообразий, порождающих одинаковую физику. Но как объясняет Сойбельман, «в математике действительно нет понятия физической теории, связанной с многообразиями X и X' . Концевич же попытался придать этому утверждению

112 Strominger, interview with author, August 1, 2007.

113 Zaslow, interview with author, June 26, 2008.

114 Gross, interview with author, September 19, 2008.

математическую строгость», представив ее в виде, не привязанном к физическим понятиям.¹¹⁵

Пожалуй, наиболее простым способом описания гомологической зеркальной симметрии является описание в терминах D-бран, хотя идея Концевича опередила их открытие на год или два. Физики представляют себе D-браны как подповерхности, к которым должны крепиться концы открытых струн. Теория гомологической зеркальной симметрии предсказывала существование D-бран, давая весьма детальное описание этих объектов, ставших одними из важнейших составляющих теории струн, точнее, M-теории, после второй струнной революции. В общем, это знакомая история, когда физическое открытие, в данном случае – зеркальная симметрия, дает толчок развитию математики, а математика, в свою очередь, сполна рассчитывается перед физикой.

Одной из главных идей, лежащих в основе гомологической зеркальной симметрии, является идея существовании двух различных типов D-бран – *A-бран* и *B-бран*. Эти термины введены Виттеном. Для зеркальной пары многообразий Калаби-Яу X и X' *A-брана* на многообразии X будет совпадать с *B-браной* на многообразии X' . Это краткое определение, по словам Эспинволла, «дало возможность математикам строго сформулировать понятие зеркальной симметрии. Из этой формулировки уже можно было получить все остальное»¹¹⁶.

Как говорит Майкл Дуглас, физик из Университета Стоуни-Брук, «представьте, что у вас есть два конструктора, детали которых имеют различную форму. Однако набор моделей, которые вы можете из них собрать, один и тот же»¹¹⁷. Это полностью аналогично соответствию между *A-бранами* и *B-бранами*, заявленному в теории гомологической зеркальной симметрии.

A-браны представляют собой объекты, описываемые в рамках так называемой *симплектической геометрии*, тогда как *B-браны* являются предметом исследования *алгебраической геометрии*. Мы уже слегка касались алгебраической геометрии, говоря о том, что она позволяет описывать геометрические кривые в алгебраических терминах и решать геометрические задачи при помощи алгебраических уравнений. Симплектическая геометрия содержит ключевое для многообразий Калаби-Яу (и не только для них) понятие *кэлеровой геометрии*. В то время как пространства в дифференциальной геометрии обычно описываются симметричным относительно диагонали метрическим тензором, в симплектической геометрии метрика симметричной не является – при переходе через диагональ знаки изменяются.

«Эти две области геометрии рассматривались как совершенно отдельные, поэтому стало большой неожиданностью, когда обнаружилось, что алгебраическая геометрия одного пространства эквивалентна симплектической геометрии другого, – говорит Эспинволл. – Соединение двух различных областей, установление того, что они в определенном смысле связаны через понятие зеркальной симметрии, можно считать одним из крупнейших событий в математике, потому что теперь методы, разработанные для одной области, можно применять и в другой. Обычно это в буквальном смысле устраняет все препятствия на пути, в конце которого вас ждет медаль Филдса».¹¹⁸

В настоящее время теория гомологической зеркальной симметрии установила тесную связь с другими областями математики, в том числе и с гипотезой SYZ. На сегодняшний день, однако, не существует «строгой математической эквивалентности между двумя теориями, [но] они поддерживают друг друга, – утверждает Гросс. – И, если они обе верны, мы рано или поздно обнаружим их эквивалентность на определенном уровне»¹¹⁹.

Эта история еще не закончена. Мы до сих пор пытаемся выяснить, что же представляет собой зеркальная симметрия, с помощью наших исследований гипотезы SYZ,

115 Yan Soibelman (Kansas State University), interview with author, September 26, 2008.

116 Aspinwall, interview with author, June 23, 2008.

117 Michael Douglas (Stony Brook University), interview with author, August 20, 2008.

118 Aspinwall, interview with author, June 23, 2008.

119 Gross, interview with author, September 24, 2008.

гомологической зеркальной симметрии и других подходов. Введение зеркальной симметрии привело к созданию новых направлений в математике, уже не имеющих ничего общего с самой зеркальной симметрией, и никто точно не знает, как далеко заведут нас эти исследования и где они в конечном итоге закончатся. Однако мы точно знаем, с чего они начались, – с открытия необычного свойства компактных кэлеровых многообразий, носящих название многообразий Калаби-Яу, – пространств, на которых более двух десятилетий назад был практически поставлен крест.

Восьмая глава

Петли в пространстве-времени

Зигмунд Фрейд считал, что, для того чтобы понять природу человеческого разума, необходимо изучать людей, чье поведение не укладывается в общепринятые нормы, то есть является аномальным, – людей, одержимых странными, навязчивыми идеями: например, в число его знаменитых пациентов входили «человек-крыса» (у которого были сумасшедшие фантазии, в которых дорогих ему людей привязывают ягодицами к горшку с крысами) и «человек-волк» (который часто видел сон, как его заживо съедают белые волки, сидящие на дереве перед окном его спальни). Фрейд считал, что больше всего мы узнаем о типичном поведении, изучая самые необычные, патологические случаи. С помощью таких исследований, по его словам, мы могли бы в конечном итоге прийти к пониманию как норм, так и отклонений от них.

Мы часто применяем аналогичный подход в математике и физике. «Мы ищем области пространства, в которых не работают классические описания, поскольку именно в этих областях, мы открываем что-то новое», – поясняет гарвардский астрофизик Ави Лёб. Рассуждаем ли мы об абстрактном пространстве в геометрии или о более материальном пространстве, которое мы называем Вселенной, области «где что-то ужасное происходит с пространством, где вещи разрушаются», как говорит Лёб, и являются теми областями, которые мы называем сингулярностями.¹²⁰

Вопреки тому, что вы могли бы подумать о сингулярностях, они широко распространены в природе. Они вокруг нас: капля воды, отрывающаяся и падающая из неисправного водопроводного крана, – самый распространенный пример (часто наблюдающийся в моем доме), место (хорошо известное серфингистам), где океанские волны разрываются и дробятся, сгибы в газете (которые показывают, является статья важной или просто «водой») или места скруток на воздушном шарике, свернутом в виде французского пуделя. «Без сингулярностей вы не можете говорить о формах», – замечает геометр Хэйсукэ Хиронака, заслуженный профессор Гарвардского университета. Он приводит в качестве примера собственную подпись: «Если здесь нет пересекающихся линий, острых углов, то это просто каракули. Сингулярность представляла бы собой пересекающиеся или внезапно меняющие направление линии. В мире можно встретить много подобных вещей, и они делают мир интереснее».¹²¹

В физике и космологии два вида сингулярностей стоят особняком среди прочих бесчисленных возможностей. Один вид – это сингулярность во времени, известная как Большой взрыв. Я как геометр не знаю, как представить себе Большой взрыв, потому что никто, включая физиков, в действительности не знает, что это такое. Даже Алан Гут, создатель концепции космической инфляции, понятия, которое, по его словам, «помещает взрыв в Большой взрыв», допускает, что термин *Большой взрыв* всегда страдал от неопределенности, вероятно, потому, что «мы до сих пор не знаем (и, может быть, никогда не

¹²⁰ Avi Loeb (Harvard University), interview with author, September 25, 2008.

¹²¹ American Mathematical Society, “Interview with Heisuke Hironaka,” *Notices of the AMS* 52, no. 9 (October 2005): 1,015.

узнаем), что в действительности произошло». ¹²² Я полагаю, что в этом случае скромность нам не помешает.

И хотя мы довольно невежественны, когда дело доходит до применения геометрии к точному моменту рождения Вселенной, мы, геометры, достигли некоторых успехов в борьбе с черными дырами. Черная дыра – это, по существу, участок пространства, сжатый в точку под действием силы тяжести. Вся эта масса, упакованная в крошечном пространстве, образует сверхплотный объект, вторая космическая скорость (мера его гравитационного притяжения) возле которого превышает скорость света, что приводит к захвату любой материи, включая свет.

Несмотря на то что существование черных дыр вытекает из общей теории относительности Эйнштейна, черные дыры все еще остаются странными объектами, и сам Эйнштейн отрицал их существование до 1930 года, то есть спустя 15 лет после того, как немецкий физик Карл Шварцшильд представил их в виде решений знаменитых уравнений Эйнштейна. Шварцшильд не верил в физическую реальность черных дыр, но сегодня существование таких объектов является общепризнанным фактом. «В настоящее время черные дыры открывают с удивительным постоянством каждый раз, когда кому-нибудь из НАСА понадобится очередной грант», – заявляет Эндрю Строминджер. ¹²³

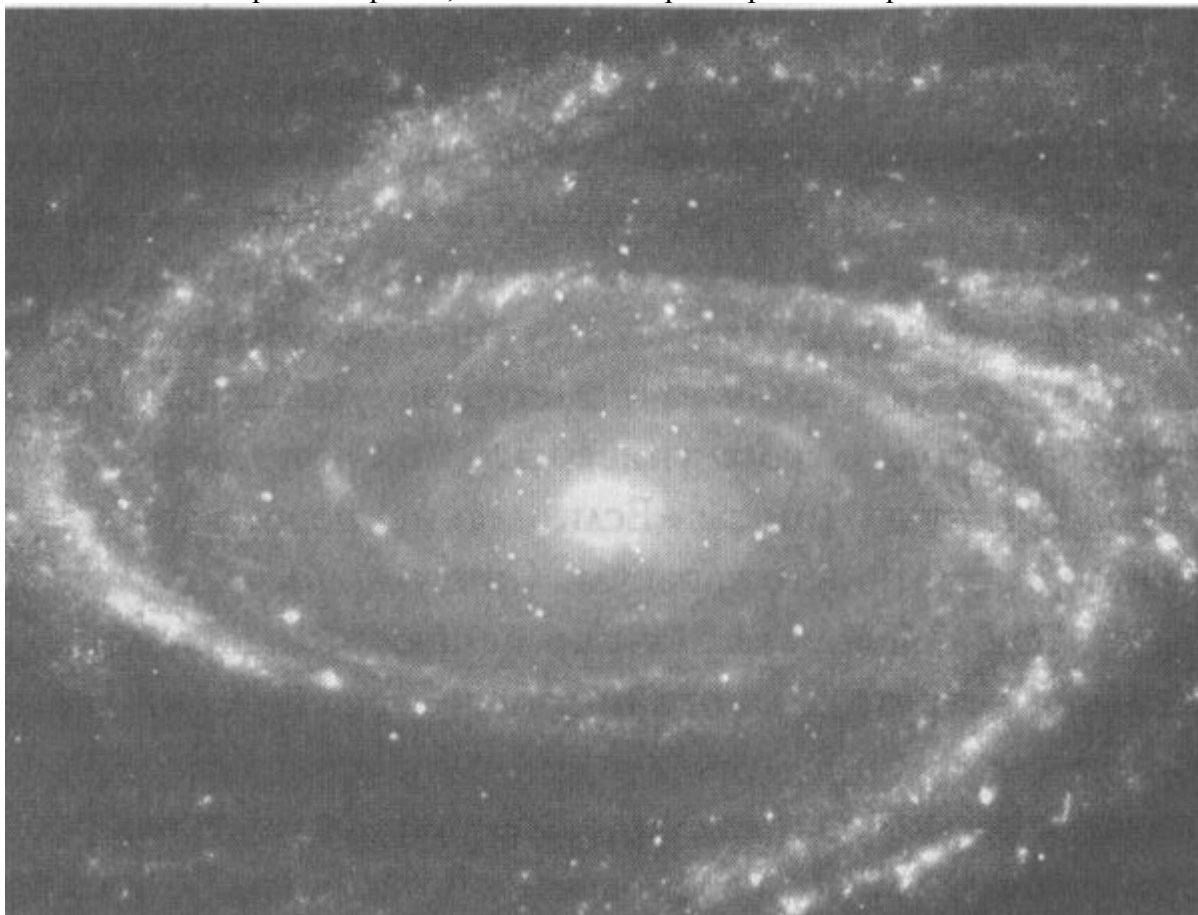


Рис. 8.1. Считается, что на расстоянии в двенадцать миллионов световых лет в центре спиральной галактики М81 находится супермассивная черная дыра, которая примерно в семьдесят миллионов раз тяжелее нашего Солнца (фото любезно предоставлено НАСА)

И хотя астрономы обнаружили большое число кандидатов в черные дыры и накопили массу наблюдательных данных, подтверждающих этот тезис, черные дыры все еще окутаны тайной.

¹²² Steve Nadis, “Cosmic Inflation Comes of Age,” *Astronomy* (April 2002).

¹²³ Andrew Strominger, “String Theory, Black Holes, and the Fundamental Laws of Nature,” lecture, Harvard University, Cambridge, Mass., April 4, 2007.

Общая теория относительности дает совершенное и адекватное описание больших черных дыр, но картина рушится, когда мы двигаемся к центру вихря и рассматриваем исчезающе малую сингулярную точку бесконечной кривизны. Общая теория относительности не может бороться с крошечными черными дырами, размер которых меньше пылинки, – здесь вступает в игру квантовая механика. Неадекватность общей теории относительности становится явно очевидной в случае таких миниатюрных черных дыр, когда массы являются огромными, расстояния – крошечными, а кривизна пространства-времени поддается изображению. В этом случае выручает теория струн и пространства Калаби-Яу, которые приветствуются физиками с момента создания теории, в частности потому, что они могут разрешить конфликт между приверженцами общей теории относительности и сторонниками квантовой механики.

Один из самых горячих споров между сторонниками этих выдающихся разделов физики вращается вокруг вопроса о разрушении информации черной дырой. В 1997 году Стивен Хокинг из Кембриджского университета и Кип Торн из Калтеха заключили пари с Джоном Прескиллом, также из Калтеха. Предметом спора было следствие теоретического открытия Хокинга, сделанного в начале 1970-х годов, заключающееся в том, что черные дыры не являются полностью «черными». Хокинг показал, что эти объекты имеют очень низкую, но не нулевую температуру, а это означает, что они должны удерживать некоторое количество тепловой энергии. Как любое другое «горячее» тело, черная дыра будет излучать энергию во внешнюю среду до полного исчерпания всей энергии и испарения черной дыры. Если излучение, испускаемое черной дырой, является строго тепловым и, следовательно, лишено информационного содержания, то информация, первоначально сохраняемая в пределах черной дыры, скажем, если в случае поглощения ею звезды с определенным составом, структурой и историей, – исчезнет, когда черная дыра испарится. Этот вывод нарушает фундаментальный принцип квантовой теории, утверждающий, что информация системы всегда сохраняется. Хокинг доказывал, что, вопреки квантовой механике, в случае черных дыр информация может быть уничтожена, и Торн с ним соглашался. Прескилл отстаивал точку зрения, что информация выживет.

«Мы верим, что если вы бросите два ледяных кубика в кастрюлю с кипящей водой в понедельник и проверите атомы воды во вторник, то вы сможете определить, что днем раньше в воду были брошены два ледяных кубика, – объясняет Строминджер, – не практически, а в принципе»¹²⁴. Можно на этот вопрос ответить по-другому: возьмите книгу, например «451 градус по Фаренгейту», и бросьте ее в огонь. «Вы можете решить, что информация потеряна, но если у вас достаточно приборов и вычислительной техники и вы можете измерить все параметры огня, проанализировать пепел, а также прибегнуть к услугам “демона Максвелла” (или в этом случае “демона Лапласа”), то вы сможете воспроизвести оригинальное состояние книги», – замечает физик Хироси Огури из Калтеха.¹²⁵ «Однако если вы бросили бы ту же книгу в черную дыру, – возражает Хокинг, – то данные были бы потеряны». Прескилл, в свою очередь, как и Герард 'т Хоофт и Леонард Зюскинд до него, отстаивает позицию, что два случая не радикальным образом отличаются друг от друга и что излучение черной дыры каким-то неуловимым способом обязано содержать в себе информацию классики Рэя Брэдбери, которая, теоретически, может быть восстановлена.

Ставки были высокими, поскольку на кону стоял один из краеугольных камней науки – принцип научного детерминизма. Идея *детерминизма* заключается в том, что если у вас есть все возможные данные, описывающие систему в конкретный период времени, и вы знаете законы физики, то, в принципе, вы можете определить, что произойдет с системой в будущем, а также сделать вывод о том, что происходило с ней в прошлом. Но если информация может теряться или уничтожаться, то принцип детерминизма теряет силу. Вы не можете предсказывать будущее, вы не можете делать выводы о прошлом. Другими словами, если информация теряется, то вы также теряетесь. Таким образом, сцена была подготовлена

124 Ibid.

125 Hiroshi Ooguri (California Institute of Technology), interview with author, October 8, 2008.

для решающего сражения с классикой. «Наступил момент истины для теории струн, которая заявила, что она могла бы соответствующим образом примирить квантовую механику и гравитацию, – говорит Строминджер. – Но могла ли она объяснить парадокс Хокинга?»¹²⁶ Строминджер обсудил этот вопрос с Кумруном Вафой в революционной статье в 1996 году.¹²⁷ Для решения задачи они использовали понятие энтропии черной дыры. Энтропия представляет собой меру случайности или беспорядка системы, но также служит характеристикой количества содержащейся в системе информации. Например, представьте спальню, где находится много полок, выдвижных ящичков и конторок, а также различные произведения искусства, размещенные на стенах и свисающие с потолка. Под энтропией понимают число различных способов, с помощью которых вы можете организовать или дезорганизовать все ваши вещи – мебель, одежду, книги, картины и различные безделушки в этой комнате. В определенной степени число возможных способов организации одних и тех же элементов в данном пространстве зависит от размера комнаты или ее объема – произведения длины, ширины и высоты. Энтропия большинства систем связана с их объемом. Однако в начале 1970-х годов физик Якоб Бекенштайн, тогда аспирант в Принстоне, предположил, что энтропия черной дыры пропорциональна площади горизонта событий, окружающего черную дыру, а не объему, заключенному внутри горизонта. Горизонт событий часто называют точкой невозврата, и любой объект, пересекающий эту невидимую линию в пространстве, станет жертвой гравитационного притяжения и неизбежно упадет в черную дыру. Но, вероятно, лучше говорить о поверхности невозврата, так как в действительности горизонт – это двухмерная поверхность, а не точка. Для невращающейся (или «шварцшильдовой») черной дыры площадь этой поверхности зависит исключительно от массы черной дыры: чем больше масса, тем больше площадь. Положение о том, что энтропия черной дыры – отражение всех возможных конфигураций данного объекта – зависит единственно от площади горизонта событий, подразумевало, что все конфигурации расположены на поверхности и что вся информация о черной дыре также хранится на поверхности. (Можно провести параллель со спальней в нашем предыдущем примере, где все предметы расположены вдоль поверхностей – стен, потолка и пола, а не плавают в центре комнаты во внутреннем пространстве.)

Работа Бекенштайна вкупе с идеями Хокинга об излучении черной дыры дала миру уравнение для вычисления энтропии черной дыры. Энтропия в соответствии с формулой Бекенштайна-Хокинга пропорциональна площади горизонта событий. Или, точнее, энтропия черной дыры пропорциональна площади горизонта, деленной на четыре ньютоновские гравитационные постоянные (G). Эта формула показывает, что черная дыра, которая в три раза массивнее Солнца, обладает поразительно высокой энтропией, порядка 10 джоулей на градус Кельвина. Другими словами, черная дыра чрезвычайно неупорядоченна.

Тот факт, что черная дыра имеет такую ошеломляюще высокую энтропию, шокировал ученых, учитывая, что в общей теории относительности черная дыра полностью описывается всего тремя параметрами: массой, зарядом и спином.

С другой стороны, гигантская энтропия предполагает огромную изменчивость внутренней структуры черной дыры, которая должна задаваться далеко не тремя параметрами.

Возникает вопрос: откуда взялась эта изменчивость? Какие еще вещи внутри черной дыры могут так же сильно изменяться? Разгадка, видимо, лежит в разбиении черной дыры на микроскопические составляющие подобно тому, как это сделал австрийский физик Людвиг Больцман с газами в 1870-е годы. Больцман показал, что можно вывести термодинамические свойства газов из свойств составляющих отдельных молекул. (Этих молекул в действительности очень много, например в одной бутылке идеального газа при нормальных условиях содержится примерно 10^{22} молекул.) Идея Больцмана оказалась замечательной по

¹²⁶ Strominger, lecture.

¹²⁷ Andrew Strominger and Cumrun Vafa, “Microscopic Origin of the Bekenstein-Hawking Entropy,” *Physics Letters B* 379 (June 27, 1996): 99-104.

многим причинам, включая тот факт, что он пришел к ней за десятилетия до подтверждения существования молекул. Учитывая огромное число молекул газа, Больцман утверждал, что средняя скорость движения, или среднее поведение отдельных молекул, определяют общие свойства газа – объем, температуру и давление, то есть свойства газа в целом. Таким образом, Больцман сформулировал более точное представление о системе, заявив, что газ представляет собой не сплошное тело, а состоит из множества частиц. Новый взгляд на систему позволил ему дать новое определение энтропии как *статистический вес* состояния – число возможных микросостояний (способов), с помощью которых можно перейти в данное макроскопическое состояние. Математически данное положение можно сформулировать следующим образом: энтропия (S) пропорциональна натуральному логарифму статистического веса. Или, что эквивалентно, статистический вес пропорционален e^S .

Подход, который впервые применил Больцман, называется *статистической механикой*, и примерно столетие спустя люди попытались интерпретировать черные дыры методами статистической механики. Через двадцать лет после того, как Бекенштайн и Хокинг поставили эту задачу, она все еще не была решена. Все, что необходимо было для ее решения, так это «микроскопическая теория черных дыр, вывод законов черных дыр из некоторых фундаментальных принципов – по аналогии с больцмановским выводом термодинамики газов», – говорит Строминджер. С XIX столетия было известно, что каждая система имеет связанную с ней энтропию, а из определения энтропии Больцмана следовало, что энтропия системы зависит от числа микросостояний компонентов системы. «Это была бы глубокая и огорчительная асимметрия, если бы связь между энтропией и числом микросостояний оказалась справедлива для любой системы в природе, за исключением черной дыры», – добавляет Строминджер.¹²⁸

Более того, эти микросостояния в соответствии с Огури являются «квантованными», потому что только так можно надеяться получить их счетное количество. Вы можете положить карандаш на стол бесконечным числом способов, так же как существует бесконечное число возможных настроек по всему спектру электромагнитного излучения. Но как мы уже упоминали в седьмой главе, радиочастоты квантуются в том смысле, что радиостанции ведут передачи на избранном числе дискретных частот. Энергетические уровни атома водорода аналогичным образом являются квантованными, так что вы не можете выбрать произвольное значение; разрешены только определенные значения энергии. «Отчасти причина, по которой Больцману было так тяжело убедить других ученых в правоте его теории, крылась в том, что он шел впереди своего времени, – говорит Огури. – Квантовая механика была разработана только через полстолетия».¹²⁹

Вот такой была проблема, за решение которой взялись Строминджер и Вафа. Это была действительно проверка теории струн, так как задача затрагивала квантовые состояния черных дыр, которые Строминджер назвал «квинтэссенцией гравитационных объектов». Он чувствовал, что его долг – разрешить эту проблему, вычислив энтропию, либо признать, что теория струн неверна.¹³⁰

План, который придумали Строминджер и Вафа, заключался в том, чтобы вычислить значение энтропии с помощью квантовых микросостояний и сравнить со значением, рассчитанным по формуле Бекенштайна-Хокинга, в основе которой лежала общая теория относительности. Хотя задача была не новой, Строминджер и Вафа использовали для ее решения новые инструменты, опираясь не только на теорию струн, но также на открытие Джозефом Полчинским *D-бран* и появление *M-теории* – оба события имели место в 1995 году, за год до выхода их статьи. «Полчинский указывал, что D-браны несут тот же тип заряда, что и черные дыры, и имеют ту же массу и натяжение, поэтому они выглядят и

128 Andrew Strominger, quoted in Gary Taubes, “Black Holes and Beyond,” *Science Watch*, May/June 1999, http://archive.sciencewatch.com/may-june99/sw_may-june99_page3.htm.

129 Hiroshi Ooguri, interview with author, October 8, 2008.

130 Strominger, quoted in Taubes, “Black Holes and Beyond.”

пахнут так же, – замечает гарвардский физик Хи Ин. – Но если вы можете использовать одно для того, чтобы рассчитать свойства другого, например энтропии, значит, здесь что-то большее, чем мимолетная схожесть».¹³¹ Именно этот подход выбрали Строминджер и Вафа, используя эти D-браны для построения новых видов черных дыр, руководствуясь теорией струн и M-теорией.

Возможность построения черных дыр из D-бран и струн (последние представляют собой одномерную версию D-бран) является результатом «дуального» описания D-бран. В моделях, где эффективность всех сил, действующих на браны и струны (включая гравитацию) является низкой (что называется слабой связью), браны можно рассматривать как тонкие, похожие на мембраны объекты, оказывающие слабое воздействие на пространство-время вокруг них и, следовательно, мало похожи на черные дыры. С другой стороны, при сильной связи и высокой силе взаимодействия браны могут стать плотными, массивными объектами с горизонтом событий и мощным гравитационным влиянием – другими словами, объектами, неотличимыми от черных дыр.

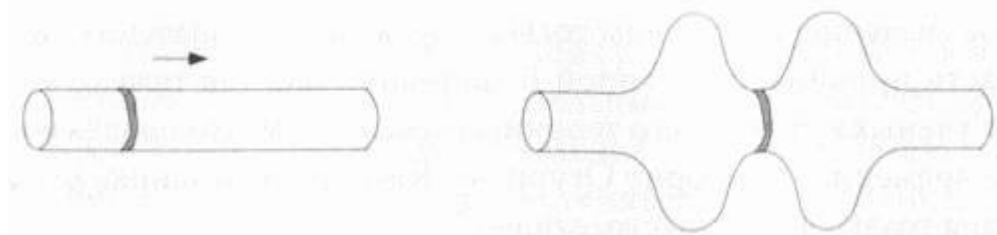


Рис. 8.2. Для того чтобы создать черную дыру путем обертывания браны вокруг объекта, последний должен быть стабильным. По аналогии можно рассмотреть обертывание резиновой ленты вокруг деревянного шеста. Из двух показанных здесь примеров, на рисунке справа представлен более стабильный объект, потому что в данном случае резиновую ленту обертывают вокруг области минимального диаметра, что удерживает ленту на месте и препятствует ее сползанию в стороны

Тем не менее требуется нечто большее, чем тяжелая брана или много тяжелых бран, чтобы создать черную дыру. Вам также необходимо каким-то способом стабилизировать ее, что проще всего сделать, по крайней мере теоретически, путем обертывания браны вокруг чего-то стабильного, что не сжимается. Проблема заключается в том, что объект, который имеет высокое *натяжение* (выражаемое как масса на единицу длины, площади или объема), может сокращаться до такого малого размера, что почти исчезает, не обладая соответствующей структурой, чтобы остановить этот процесс, подобно тому как ультратонкая резиновая лента сжимается в плотный комочек, если ее предоставить самой себе.

Ключевым ингредиентом была суперсимметрия, которая, как уже говорилось в шестой главе, обладает особенностью предохранять основное или вакуумное состояние системы от падения на все более низкие энергетические уровни. Суперсимметрия в теории струн часто подразумевает многообразия Калаби-Яу, потому что такие пространства автоматически включают в себя эту особенность. Так что задача состоит в нахождении стабильных субповерхностей в пределах многообразий Калаби-Яу, чтобы обернуть их в браны. Эти субповерхности, или субмногообразия, которые обладают меньшей размерностью, чем само пространство, иногда называют *циклами* (это понятие уже вводили в книге), которые иногда можно представить как несжимающуюся петлю вокруг или сквозь часть многообразия Калаби-Яу. Говоря техническим языком, петля является одномерным объектом, но циклы включают больше измерений, и их можно рассматривать как несжимающиеся «петли» более высокой размерности.

Физики склонны считать, что цикл зависит только от топологии объекта или дыры, вокруг которого вы можете осуществить обертывание, независимо от геометрии этого объекта или дыры. «Если вы измените форму, то цикл останется тем же, но вы получите

131 Xi Yin (Harvard University), interview with author, October 14, 2008.

другое субмногообразие, – объясняет Инь. Он добавляет, что поскольку это свойство топологии, то цикл сам по себе ничего не может сделать с черной дырой. – И только когда вы наворачиваете на цикл одну или несколько бран, вы можете начинать говорить о черной дыре».¹³² Для того чтобы обеспечить стабильность, объект, которым вы производите обертывание – будь то брана, струна или резиновая лента, должен быть тугим, без каких-либо складок. Цикл, вокруг которого вы осуществляете обертывание, должен быть минимально возможной длины или площади. Укладывание резиновой ленты вокруг однородного, цилиндрического шеста не является примером стабильной ситуации, потому что ленту легко можно переместить со стороны на сторону. В то же время, если шест имеет разную толщину, то стабильные циклы, которые в данном случае представляют собой круги, можно найти в точках локального минимума диаметра шеста, где резиновая лента не будет ползть из стороны в сторону.

Чтобы провести аналогию с многообразиями Калаби-Яу, лучше вместо гладкого шеста представить себе другой объект, который мы обертываем резиновой лентой, например рифленый шест или пончик переменной толщины, на котором минимальные циклы будут соответствовать местам, где диаметр имеет локальный минимум. Существуют разные виды циклов, вокруг которых можно обертывать брану внутри многообразий Калаби-Яу: это могут быть круги, сферы или торы разной размерности или римановы поверхности высокого рода. Поскольку браны несут массу и заряд, задача состоит в том, чтобы вычислить количество способов помещения их в стабильные конфигурации внутри многообразия Калаби-Яу так, чтобы их результирующие масса и заряд были равны массе и заряду самой черной дыры. «Хотя эти браны обертываются отдельно, они все равно прилипают все вместе к внутреннему пространству [Калаби-Яу] и могут рассматриваться как части большей по размеру черной дыры», – объясняет Инь.¹³³ Существует аналогия, которая, я признаю, выглядит весьма неаппетитно, но ее придумал не я. Я услышал ее от одного гарвардского физика, имени которого называть не буду, и уверен, что он тоже будет отнекиваться, сваливая авторство на кого-то еще. Ситуация, в которой отдельные оборачиваемые браны слипаются вместе, образуя больший по размеру объект, можно сравнить с мокрой занавеской для душа, к которой прилипли разные пряди волос. Каждая прядь волос подобна отдельной бране, которая привязывается к более крупному объекту, занавеске для душа, похожей на саму брану. Даже если каждый волос можно рассматривать как отдельную черную дыру, все они склеиваются вместе – приклеиваются к одному и тому же листу, что делает их частью одной большой черной дыры. Расчет числа циклов, то есть вычисление количества способов расположения D-бран, является задачей дифференциальной геометрии, поскольку число, которое вы получите путем такого расчета, соответствует числу решений дифференциального уравнения.

Строминджер и Вафа преобразовали задачу расчета микросостояний черной дыры и, соответственно, расчета энтропии в геометрическую задачу: сколько существует способов помещения D-бран в многообразия Калаби-Яу для получения желаемой массы и заряда? А эту задачу, в свою очередь, можно выразить через циклы: сколько сфер и объектов других форм минимального размера, вокруг которых можно обертывать брану, можно поместить внутрь многообразия Калаби-Яу? Ответ на оба этих вопроса, очевидно, зависит от геометрии данного многообразия Калаби-Яу. Если вы измените геометрию, то вы измените число возможных конфигураций, или число сфер.

Это общая картина, а сам расчет все еще оставался сложным, поэтому Строминджер и Вафа затратили много времени на поиск конкретного подхода к данной задаче, то есть способа, который действительно позволил бы ее решить.

Они взялись за слишком специфический случай и для своей первой попытки выбрали пятимерное внутреннее пространство, построенное путем прямого произведения четырехмерной K3-поверхности и окружности. Они также построили пятимерную черную

132 Ibid.

133 Xi Yin, interview with author, October 22, 2008.

дыру, расположенную в плоском пятимерном пространстве, с которым они могли бы сравнить структуру, построенную из D-бран. Это была не обычная черная дыра. Она обладала особыми свойствами, которые были отобраны так, чтобы сделать задачу «управляемой»: эта черная дыра была как суперсимметричной, так и *экстремальной* – последний термин означает, что она имела минимально возможную для данного заряда массу. Мы уже касались суперсимметрии, но о суперсимметрии черной дыры имеет смысл говорить только в том случае, если основной вакуум, в котором она находится, также сохраняет суперсимметрию. Это не так в низкоэнергетической области, которую мы населяем и где мы не можем увидеть суперсимметрию в частицах вокруг нас. Не можем мы ее увидеть и в черных дырах, которые наблюдают астрономы.

Как только Строминджер и Вафа смоделировали черную дыру, они смогли применить формулу Бекенштайна-Хокинга для расчета энтропии на основании площади горизонта событий. Следующим шагом был расчет числа способов конфигурирования D-бран во внутреннем пространстве так, чтобы это число соответствовало конструкции черной дыры заданного результирующего заряда и массы. Затем энтропию, вычисленную таким способом, равную логарифму числа состояний, сравнили со значением энтропии, полученным исходя из площади горизонта событий, и значения энтропий совпали. «Они утерли всем нос, получив и четверку в знаменателе, и ньютоновскую константу, и все остальное», – говорит гарвардский физик Фредерик Денеф. Денеф добавляет, что после двадцати лет попыток «мы, наконец, получили первый расчет энтропии черной дыры методами статистической механики».¹³⁴

Это был главный успех Строминджера и Вафа, а также успех теории струн. Инь пояснил, что связь между D-бранами и черными дырами получила серьезный аргумент в свою пользу, и, кроме того, два физика показали, что само описание D-бран является фундаментальным. «Вас, вероятно, интересует, можно ли брану разложить на составляющие? Построена ли она из более мелких частиц? Сейчас мы уверены, что у браны не существует никаких дополнительных структур, потому что физики получили верное значение энтропии, а энтропия, по определению, пропорциональна числу всех состояний».¹³⁵ Если бы брана состояла из различных частиц, то она имела бы больше степеней свободы и, следовательно, больше комбинаций, которые необходимо было бы учитывать при расчете энтропии. Но результат, полученный в 1996 году, показывает, что это не так. Брана – это все, что есть. Хотя браны, имеющие различное число измерений, выглядят по-разному, ни одна из них не имеет субкомпоненты и не может быть разложена на составляющие. Аналогичным образом теория струн придерживается положения, что струна – одномерная брана в M-теории – это все, что есть, и она не может быть разделена на более мелкие части. Несмотря на то что соответствие между двумя очень разными методами расчета энтропии было встречено с энтузиазмом, оно вызвало удивление. «На первый взгляд кажется, что информационный парадокс черной дыры не имеет ничего общего с многообразиями Калаби-Яу, – заявляет физик Аарон Симонс из Брауновского университета. – Но ключом к ответу на этот вопрос оказался расчет математических объектов внутри многообразия Калаби-Яу».¹³⁶

134 Frederik Denef (Harvard University), interview with author, August 26, 2008.

135 Xi Yin, interview with author, October 14, 2008.

136 Aaron Simons, interview with author, February 9, 2007.

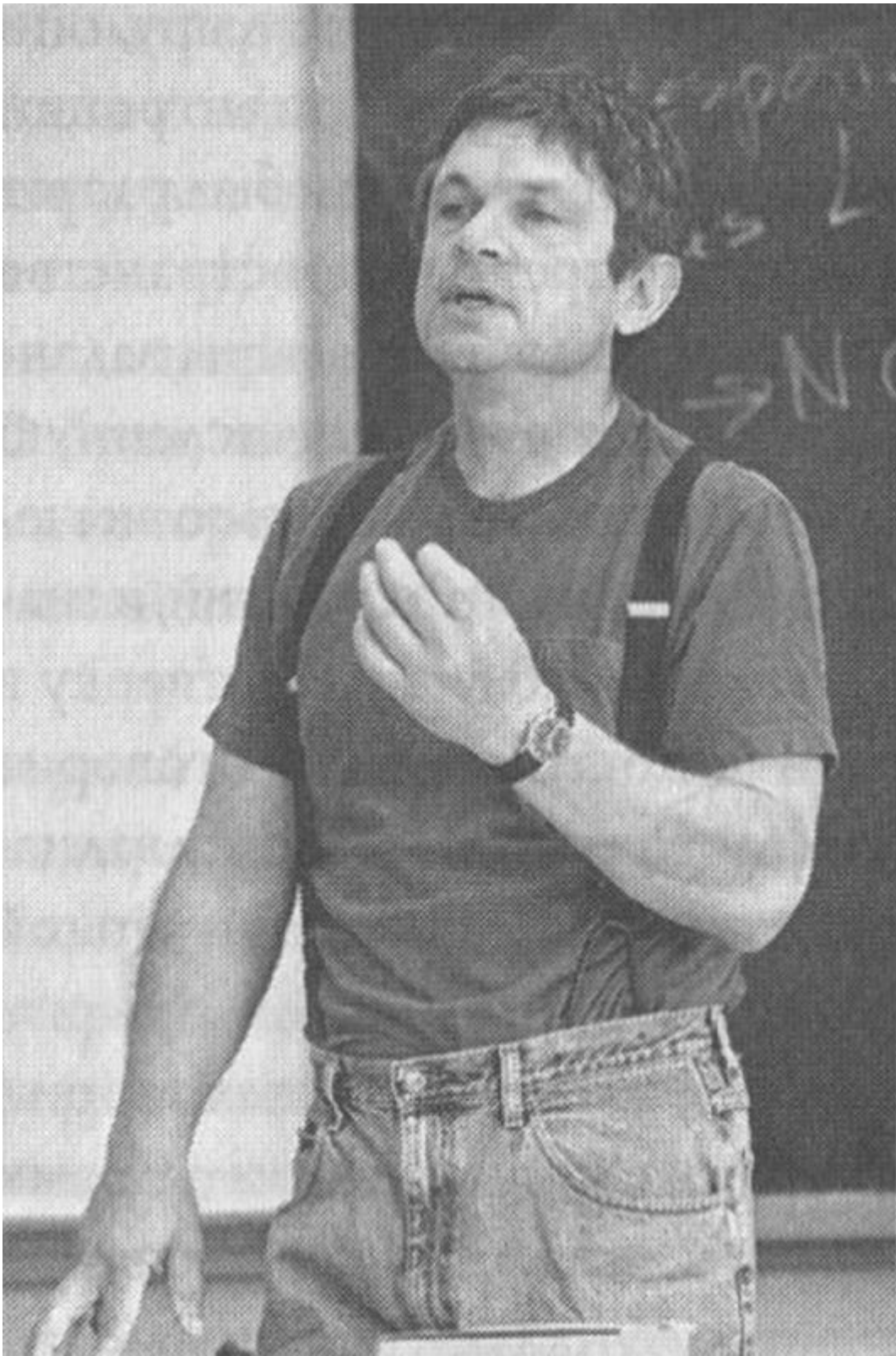


Рис. 8.3а. Гарвардский физик Эндрю Строминджер (фотография Криса Сниббе, Гарвардский университет)

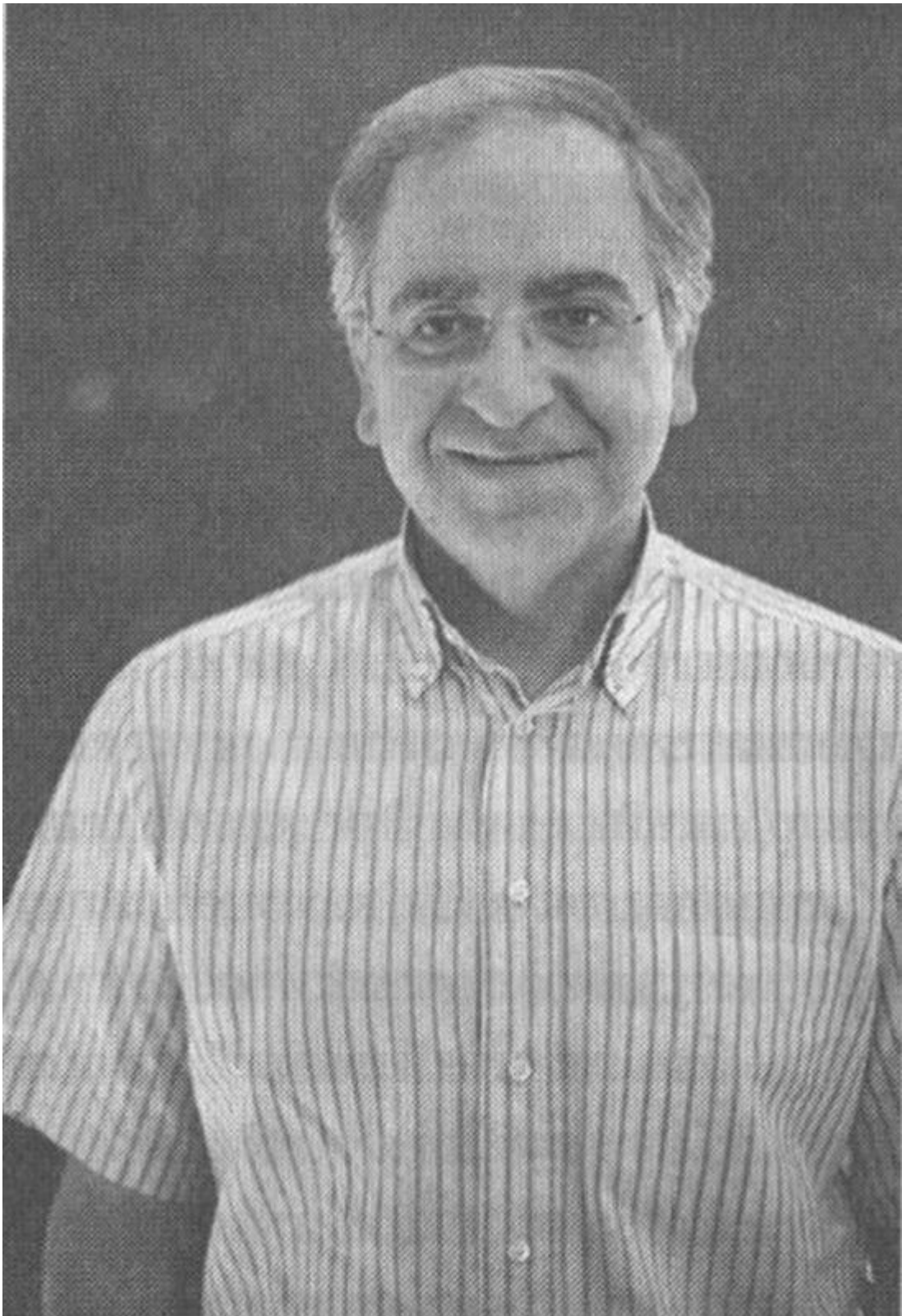


Рис. 8.3б. Гарвардский физик Кумрун Вафа (фотография Стефани Митчелл, Новый офис Гарвардского университета)

Строминджер и Вафа не разрешили до конца информационный парадокс, хотя детальное описание черной дыры, к которому они пришли через теорию струн, показало, как именно могла бы сохраняться информация. Огури заявил, что они выполнили самый важный первый этап исследования, «показав, что энтропия черной дыры такая же, как и энтропия других макроскопических систем», включая горящую книгу из нашего предыдущего примера. Обе содержат информацию, которая, по крайней мере потенциально, является

восстановимой.

Конечно, результаты 1996 года были только началом, поскольку первый расчет энтропии имел мало общего с реальными астрофизическими черными дырами. Черные дыры в модели Строминджера-Вафа, в отличие от тех, что мы наблюдаем в природе, были суперсимметричными – условие, необходимое для того, чтобы выполнить расчет. Тем не менее эти результаты можно распространить и на не суперсимметричные черные дыры. Как объясняет Симонс: «Независимо от суперсимметрии, все черные дыры содержат сингулярность. Это их главная определяющая черта, и по этой причине они являются “парадоксальными”. В случае суперсимметричных черных дыр теория струн помогла нам понять, что происходит вокруг этой сингулярности, и есть надежда, что результат не зависит от того, является объект суперсимметричным или нет».¹³⁷

Кроме того, в статье 1996 года описан искусственный случай компактного пятимерного внутреннего пространства и плоского некомпактного пятимерного внешнего пространства. Но обычно пространство-время в теории струн подобным способом не рассматривается. Вопрос в том, применима ли эта модель к более распространенной модели: шестимерному внутреннему пространству и черной дыре, находящейся в плоском, четырехмерном пространстве? Ответ был дан в 1997 году, когда Строминджер вместе с Хуаном Малдасеной – тогда гарвардским физиком, и Эдвардом Виттеном опубликовали статью о своей первой работе, в которой использовалось более знакомое устройство шестимерного внутреннего пространства (разумеется, Калаби-Яу) и расширенного четырехмерного пространства-времени.¹³⁸ Воспроизведя расчет энтропии для трехмерного многообразия Калаби-Яу, Малдасена сказал, что «пространства, в которое вы помещаете браны, имеет более слабую суперсимметрию», и поэтому они ближе к реальному миру, а «пространство, в которое вы помещаете черные дыры, имеет четыре измерения, что соответствует нашим предположениям».¹³⁹ Кроме того, совпадение с расчетом Бекенштайна-Хокинга оказалась даже более сильным, потому что, как объясняет Малдасена, вычисление энтропии на основании площади горизонта событий является точным, только когда горизонт событий очень большой, а кривизна – очень маленькая. Когда размер черных дыр сокращается, а вместе с ним сокращается и площадь поверхности, приближение в рамках теории общей относительности становится хуже и необходимо вводить «поправки на квантовую гравитацию» в теорию Эйнштейна. В то время как первоначальная статья рассматривала только «крупные» черные дыры – крупные по сравнению с планковским масштабом, – для которых было достаточно учета эффектов, следующих из общей теории относительности – так называемого *терма первого порядка*, расчет 1997 года дал также первый квантовый терм в дополнение к первому гравитационному. Другими словами, согласие между двумя разными способами расчета энтропии стало гораздо лучше. В 2004 году Огури, Строминджер и Вафа пошли еще дальше, обобщив результаты 1996 года на любой вид черной дыры, которую можно сконструировать обертыванием браны вокруг цикла в регулярном трехмерном многообразии Калаби-Яу, независимо от ее размера, и следовательно, независимо от вклада квантово-механических эффектов. Авторы статьи показали, как вычислить квантовые поправки к теории гравитации не только для первых нескольких термов, но и для всего ряда, содержащего бесконечное количество термов.¹⁴⁰ Вафа пояснил, что, добавив в разложение новые термы, «мы получили более точный способ расчета и более точный ответ и, к счастью, даже более сильное согласие, чем раньше».¹⁴¹ Это именно тот подход, который мы обычно пытаемся применить в математике и физике: если мы находим что-то, что работает в особых условиях, то пытаемся рассмотреть более общий случай, будет ли оно работать в менее

137 Ibid.

138 J. M. Maldacena, A. Strominger, and E. Witten, “Black Hole Entropy in M-Theory” *Journal of High Energy Physics* 9712 (1997), http://arxiv.org/PS_cache/hep-th/pdf/9711/9711053v1.pdf.

139 Juan Maldacena (IAS), interview with author, September 4, 2008.

140 Hiroshi Ooguri, Andrew Strominger, and Cumrun Vafa, “Black Hole Attractors and the Topological String,” *Physical Review D* 70 (2004).

141 Cumrun Vafa (Harvard University), interview with author, September 26, 2008.

жестких условиях, и, соответственно, определить, как далеко мы можем зайти.

Хочу рассмотреть еще одно обобщение оригинальной работы Строминджера-Вафа, которое носит даже более общий характер, чем то, что мы уже обсуждали. Идея под труднопроизносимым названием «соответствие пространства анти-де-Ситтера и конформной теории поля» или проще: «AdS/CFT-соответствие» была первоначально предложена Малдасеной в 1997 году и затем детально разработана Игорем Клебановым в Принстоне, Эдвардом Виттеном и другими. Чтобы понять идею Малдасены, воспользуемся аналогией. Например, можно посмотреть один и тот же фильм на DVD и на 70-миллиметровой бобине – это мы и называем соответствием. Гипотеза AdS/CFT-соответствия предполагает, что в некоторых случаях теория гравитации, такая как теория струн, может быть полностью эквивалентна стандартной квантовой теории поля, или конформной теории поля, если быть точным. Это удивительное соответствие, потому что оно связывает теорию квантовой гравитации с теорией, в которой гравитации нет вообще.

AdS/CFT является результатом дуальной картины D-бран, о чем мы уже говорили. При очень слабой связи сеть из D-бран, обертывающих циклы в многообразии Калаби-Яу, не влияет на оцениваемое гравитационное притяжение и лучше описывается квантовой теорией поля – теорией, в которой гравитации нет вообще. Однако при сильной связи этот конгломерат из бран лучше рассматривать как черную дыру – систему, которую можно описать только теорией, включающей гравитацию. Несмотря на существенную роль многообразия Калаби-Яу для работы, лежащей в основе гипотезы соответствия, идея Малдасены первоначально не включала эти многообразия. Однако последующие попытки более строго и развернуто определить это соответствие, например попытки Клебанова и других, а также небольшой вклад, который внесли в этот раздел физики я и Джеймс Спаркс, мой бывший гарвардский научный сотрудник, работающий сейчас в Оксфорде, уже непосредственно включали многообразия Калаби-Яу, в частности сингулярности Калаби-Яу. «Пространства Калаби-Яу – это среда, в которой соответствие было изучено полнее всего и понято лучше всего», – заявляет Спаркс.¹⁴²

Исходная формулировка гипотезы Малдасены, наряду с последующей работой по AdS/CFT, явилась вторым шагом на пути к решению информационного парадокса черной дыры. Не вдаваясь в детали, отметим, что суть аргументации заключается в следующем: если физика черной дыры может быть полностью описана квантовой теорией частиц, теорией, в которой нет ни самой черной дыры, ни ее беспорядочной сингулярности, то есть теорией, в которой, как мы знаем, информация не может быть потеряна, – то мы можем быть уверены в том, что и сама черная дыра не может терять информацию. Так что же происходит с информацией при испарении черной дыры? Идея заключается в том, что излучение Хокинга, которое возникает при испарении черной дыры, «не является случайным, но содержит полную информацию о веществе, упавшем в черную дыру», – говорит Малдасена.¹⁴³ Несмотря на эту гипотезу и признав свое поражение в пари с Прескиллом в 2004 году, Хокинг не связал причину изменения своей точки зрения с новыми идеями теории струн. Прескилл тем не менее признал идеи Строминджера, Вафу, Малдасены и других «строгим, но косвенным доказательством того, что черные дыры действительно хранят информацию», – заметив, что «Хокинг следил за этой работой струнных теоретиков с большим интересом».¹⁴⁴ Строминджер, со своей стороны, полагает, что эта работа «поможет повернуть мышление Хокинга в сторону теории струн и фактически повернет весь мир лицом к теории струн, потому что впервые теория струн решила проблему из другой области физики, которая была поставлена учеными, не имеющими отношения к теории струн».¹⁴⁵

Работа доказала, насколько полезными могут оказаться сумасшедшие идеи, включающие струны, браны и многообразия Калаби-Яу. Гипотеза Малдасены не

142 James Sparks (Harvard University), interview with author, February 6, 2007.

143 Amanda Geyer, “The Elephant and the Event Horizon,” *New Scientist* (October 26, 2006): 36–39.

144 John Preskill, “On Hawking’s Concession,” July 24, 2004, http://www.theory.caltech.edu/~preskill/jp_24jul04.html.

145 Andrew Strominger (Harvard University), interview with author, February 7, 2007.

ограничивается парадоксом черной дыры. Призвав к фундаментальному пересмотру гравитации, гипотеза о соответствии постепенно захватила умы значительной доли ученых в сообществе струнных теоретиков. Причина такого сильного влияния AdS/CFT на физиков кроется, вероятно, в ее прагматизме: «Расчет, который может быть очень сложным в одной области, оказывается относительно простым в другой, таким образом, превращая часть проблем физики в легко решаемые задачи, – поясняет Малдасена. – Если все верно, то соответствие означает, что мы можем использовать квантовую теорию частиц, в которой все относительно понятно, для описания квантовой теории гравитации, в которой ничего непонятно».¹⁴⁶ Другими словами, AdS/CFT-соответствие позволяет нам использовать глубокое знание теории частиц без гравитации для улучшения нашего понимания теорий гравитации. Дуальность работает и в другом направлении: в то время как расчет сильного взаимодействия частиц в квантовой теории поля чрезвычайно сложен, решение уравнений гравитации может оказаться значительно более простым. «Если одно из описаний становится трудным, то другое – легким, и наоборот», – говорит Малдасена.¹⁴⁷

Действительно ли тот факт, что теория струн, согласно AdS/CFT, может быть эквивалентной квантовой теории поля – теории, для которой мы получили чрезвычайно точные экспериментальные подтверждения, – делает теорию струн верной? Малдасена так не считает, хотя некоторые струнные теоретики пытались доказать справедливость этого утверждения. Строминджер тоже так не считает, но работы по черным дырам и AdS/CFT, выросшие из этой идеи, заставляют его думать, что теория струн находится на верном пути. Строминджер говорит, что идеи, появившиеся благодаря парадоксу черной дыры и гипотезе Малдасены, – кажутся доводами в пользу неотвратимости теории струн. Вы не можете от нее убежать. Она ударяет вам в голову, где бы вы ни остановились.¹⁴⁸

Девятая глава

Добро пожаловать в реальный мир

В книге «Удивительный волшебник из Страны Оз» при встрече с волшебницей Глиндой Дороти подробно рассказывает историю о том, «как ураган перенес ее в страну Оз, как она нашла друзей и какие удивительные приключения выпали на ее долю. «Но сейчас, – добавляет она, – мое самое большое желание – вернуться в Канзас».¹⁴⁹

Когда вы будете слушать этот рассказ, в котором часто будут появляться «Добрый доктор» Виттен и другие и из которого вы узнаете об удивительных приключениях в Стране Калаби-Яу – с ее скрытыми измерениями, зеркальными партнерами, суперсимметрией и исчезающими первыми классами Черна, то некоторым из вас, как Дороти, вероятно, захочется вернуться к более привычной обстановке. Вопрос, как всегда, заключается в следующем: можем ли мы получить одно из другого? Может ли сочетание теории струн и многообразий Калаби-Яу раскрыть секреты скрытой и многомерной области – теоретического эквивалента страны Оз, которую можно только представить, но нельзя пощупать, и в то же время рассказать нам нечто новое о более конкретной физической реальности, так сказать, Канзасе?

«Можно создавать физические теории, которые интересны математикам, но в конечном счете, мне хотелось бы понять реальный мир», – говорит Фолкер Браун, физик из Дублинского института перспективных исследований.¹⁵⁰ В нашей попытке связать теорию струн и многообразия Калаби-Яу с реальным миром очевидной точкой сравнения является

146 Juan Maldacena, “The Illusion of Gravity,” *Scientific American*, November 2005, pp. 57–58, 61.

147 Davide Castelvecchi, “Shadow World,” *Science News* 172 (November 17, 2007).

148 Taubes, “Black Holes and Beyond.”

149 L. Frank Baum, *The Wizard of Oz* (Whitefish, Mont.: Kessinger, 2004), p. 111.

150 Volker Braun (Dublin Institute for Advanced Studies), interview with author, November 4, 2008.

физика элементарных частиц.

Стандартная модель, которая описывает частицы материи и частицы – переносчики взаимодействий, движущиеся между ними, является одной из самых успешных теорий всех времен, но она не является учением о природе по ряду отношений. Во-первых, эта модель имеет около двадцати свободных параметров, таких как массы электронов и кварков, которые модель не способна предсказать. Эти величины необходимо вводить «вручную», что ставит многих ученых-теоретиков в тупик. Мы не знаем, откуда берутся эти числа, и ни одно из них, похоже, не находит логического математического обоснования. Струнные теоретики надеются найти математическое обоснование с единственным свободным параметром, кроме напряжения струн или линейной плотности энергии, который был бы связан с геометрией пространства. Силы и частицы при выборе геометрии должны быть полностью зафиксированы. Вышеупомянутая статья 1985 года Филиппа Канделаса, Гари Горовица, Эндрю Строминджера и Эдварда Виттена (см. шестую главу) «показывает, что можно свести все ключевые моменты воедино и получить мир, который выглядит, по крайней мере, в первом приближении, как Стандартная модель», – утверждает Канделас. – «Тот факт, что вы можете это сделать в теории, которая включает гравитацию, вызвал большой интерес к теории струн».¹⁵¹ Один из успехов модели Канделаса и других ученых заключается в том, что она вводит понятие хиральных фермионов – особенности Стандартной модели, в соответствии с которой каждая материальная частица обладает своего рода «доминированием одной из рук»: леворукая версия отличается от ее праворукого зеркального отображения. Как мы видели ранее, эта модель также подразделяет элементарные частицы на четыре семейства, или поколения, а не на три, как Стандартная модель. Хотя эти числа и отличаются на единицу, Канделас утверждает, что «главное было показать, что можно получить различные поколения, то есть повторяемую структуру, наблюдаемую в Стандартной модели».¹⁵² Строминджер придерживался тех же оптимистических взглядов, называя новаторские компактификации Калаби-Яу «важным скачком от базовых принципов теории струн до чего-то близкого к миру, в котором мы живем. Это похоже на игру в баскетбол, когда мяч, брошенный игроком с противоположного конца поля, попадает в корзину, – отмечает он. – Мы вплотную приблизились к пространству всех явлений, которые, возможно, могли бы произойти во Вселенной. Но нам хочется большего: нам хочется найти нечто не просто более-менее верное, а безусловно верное».¹⁵³ Примерно через год Брайан Грин с коллегами сделали шаг вперед, создав модель, которая давала три поколения, так необходимые для наших теорий, хиральные фермионы, правильное значение суперсимметрии, которое мы обозначаем, как $N = 1$, нейтрино с некоторой массой (что хорошо), но не слишком большой (что еще лучше); в ней также получались поля, связанные с взаимодействиями Стандартной модели (сильным, слабым и электромагнитным). Возможно, самым большим недостатком этой модели являлось наличие некоторых нежелательных дополнительных частиц, которые не были частью Стандартной модели и от которых следовало избавиться тем или иным способом. Что касается плюсов, то я был поражен простотой метода: фактически все, что надо было сделать авторам модели, – это «выбрать» многообразие Калаби-Яу, причем именно то, которое подведет нас вплотную к получению Стандартной модели. Хотя за прошедшие десятилетия наблюдается значительный прогресс в ряде областей, теория струн и струнные теоретики все еще до конца не поняли Стандартную модель. Даже с высоты наших сегодняшних познаний мы не уверены, может ли теория струн воспроизвести Стандартную модель.

В настоящее время, несмотря на сложность задачи, ее приверженцы надеются, что теория струн не только впишется, но фактически выйдет за рамки Стандартной модели, которая находится там, куда, по их мнению, мы должны прийти. Мы уже знаем, что Стандартная модель не является последним словом в физике. За последнее десятилетие ее

151 Philip Candelas (Oxford University), interview with author, December 1, 2008.

152 Ibid.

153 Andrew Strominger (Harvard University), interview with author, February 7, 2007.

неоднократно изменяли или расширяли на основе экспериментальных данных, например, в 1998 году обнаружили, что нейтрино, которые считались безмассовыми, на самом деле обладают некоторой массой. Более того, мы столкнулись с темной материей и темной энергией – двумя таинственными формами, составляющими примерно 96% Вселенной, о которых Стандартная модель ничего не сообщает. Мы ожидаем новых открытий, объясняющих это: или будут обнаружены суперсимметричные частицы – возможные кандидаты на роль темной материи, или будет обнаружено что-то совершенно неожиданное, например с помощью Большого адронного коллайдера, разгоняющего встречные пучки протонов с высокими энергиями. И хотя Канделас с сотрудниками и Грин с сотрудниками не смогли воспроизвести Стандартную модель, их компактификации опередили ее, по крайней мере в одном аспекте, так как они открыли дорогу к достижению минимальной суперсимметричной Стандартной модели (МССМ). МССМ является расширенной версией традиционной модели, куда ввели суперсимметрию, что означает включение всех суперсимметричных партнеров, которые не включены в саму Стандартную модель. Последующие успехи реализации Стандартной модели на основе теории струн, которые мы обсудим позже, также включают суперсимметрию.

Тем, кто считает, что суперсимметрия должна стать частью теории о природе, а в этот список, вероятно, войдут (хотя он и не окончательный) большинство струнных теоретиков, конечно, одной Стандартной модели недостаточно. Существует другой крупный недостаток, который неоднократно будет упоминаться на страницах этой книги, а именно: Стандартная модель, теория физики элементарных частиц, ничего не говорит о гравитации, поэтому она никогда не сможет дать полное описание Вселенной. Гравитация выпадает из этой модели по двум причинам.

♦ Во-первых, она намного слабее, чем другие силы – сильные, слабые и электромагнитные, и является совершенно несущественной при изучении взаимодействий частиц при малых расстояниях. Сила гравитационного взаимодействия между двумя протонами примерно в 10 раз слабее, чем электромагнитное взаимодействие. Например, магнит размером с пуговицу способен за счет электромагнитного взаимодействия оторвать от земли канцелярскую скрепку, преодолевая при этом силу гравитации всей планеты Земля;

♦ Во-вторых, несмотря на широкое обсуждение, пока никто не знает, как связать гравитацию, которая описывается общей теорией относительности, и другие силы в одну цельную теорию. Если теории струн удастся воспроизвести Стандартную модель, введя в нее гравитацию, то мы будем намного ближе к полной теории природы. В таком случае мы получим не только Стандартную модель с гравитацией, но и суперсимметричную Стандартную модель с гравитацией.

Физики пытаются использовать различные методы для реализации такой Стандартной модели, включая орбифолды («орбитальные многообразия», похожие на многообразия в плоском пространстве), пересекающиеся браны, расположенные друг над другом браны и аналогичные вещи, достигнув значительного прогресса на многочисленных фронтах. Однако в нашей дискуссии будет сделан акцент только на одной области, а именно $E_8 \times E_8$ гетеротической теории струн, являющейся одной из пяти вариаций этой теории. Мы сделали такой выбор не потому, что считаем ее самой перспективной (я не могу об этом судить), но из-за того, что усилия, приложенные в этом направлении, тесно связаны с геометрией, то есть дисциплиной, которая, бесспорно, имеет наиболее длинную историю попыток перехода от геометрии Калаби-Яу к реальному миру.

Я не подыгрываю геометрии из-за того, что она является во многих отношениях главной темой этой книги. Она жизненно важна для попытки, о которой идет речь. Во-первых, мы не можем описать силы – важную часть Стандартной модели и любой предполагаемой теории природы – без геометрии. Как сказал Кумрун Вафа, «все четыре взаимодействия имеют под собой геометрическую основу, а три из них – электромагнитное, слабое и сильное – связаны между собой симметрией»³⁵. Стандартная модель объединяет

35 Cumrun Vafa, “The Geometry of Grand Unified Theories,” lecture, Harvard University, Cambridge, Mass.,

вместе три силы и связанные с ними группы (или калибровки) симметрии: специальную унитарную группу 3 или $SU(3)$, которая соответствует сильным взаимодействиям; специальную унитарную группу 2 или $SU(2)$, которая соответствует слабым взаимодействиям, и первую унитарную группу или $U(1)$, которая соответствует электромагнитным взаимодействиям. Симметричная группа состоит из множества всех операций, таких как вращение, которые можно выполнять с объектом, чтобы он при этом оставался неизменным. Вы берете объект и применяете к нему симметричную операцию один или столько раз, сколько хотите, и в конце объект будет выглядеть так же, как в начале. Фактически, вы не можете сказать, производились ли с этим объектом какие-либо манипуляции.

Возможно, самой простой группой для описания является группа $U(1)$, которая включает все вращения, которые вы совершаете с кругом на плоскости. Это одномерная симметричная группа, поскольку вращения происходят вокруг одной одномерной оси, перпендикулярной кругу и проходящей через его центр. $SU(2)$ связана с вращениями в трех измерениях, а более абстрактная $SU(3)$ включает вращения в восьми измерениях. В этом случае эмпирическое правило состоит в том, что любая группа $SU(n)$ обладает симметрией размерности $n-1$. Размерности трех подгрупп являются аддитивными, это означает, что общая симметрия Стандартной модели является двенадцатимерной ($1 + 3 + 8 = 12$).

В качестве решений уравнений Эйнштейна многообразия Калаби-Яу определенной геометрии могут помочь нам произвести расчет гравитационной части нашей модели. Но могут ли эти многообразия учитывать другие силы, входящие в Стандартную модель, и если да, то каким образом? Для ответа на этот вопрос, боюсь, нам придется выбрать окольный путь. На сегодняшний день физика элементарных частиц – это квантовая теория поля, что означает, что все силы, а также все частицы представлены полями. Зная поля, пронизывающие четырехмерное пространство, мы можем вывести связанные с ними силы. Эти силы, в свою очередь, могут быть представлены в виде векторов, обладающих направлением и длиной, это означает, что в каждой точке пространства объект будет испытывать притяжение и отталкивание в определенном направлении и с определенной силой. Например, в произвольной точке Солнечной системы сила тяготения, приложенная к такому объекту, как планета, вероятно, будет направлена к Солнцу, а величина этой силы будет зависеть от расстояния до Солнца. Электромагнитная сила, действующая на заряженную частицу, находящуюся в данной точке, точно так же будет зависеть от ее положения относительно других заряженных частиц.

Стандартная модель является не просто теорией поля, но специальным видом теории поля, называемой *калибровочной теорией* и получившей широкое распространение в 1950-е годы благодаря работе физиков Чжэньнин Янга и Роберта Миллса (впервые упомянутых в третьей главе). В основе этой теории лежит идея о том, что Стандартная модель объединяет различные симметрии в сложную группу симметрий, которую обозначают как $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Эти симметрии являются калибровочными, что делает их специфическими и непохожими на обычные симметрии. Можно взять одно из разрешенных преобразований симметрии, например вращение на плоскости, и применить его по-разному в различных точках пространства-времени, выполнив поворот, скажем, на 45° в одной точке, на 60° в другой и на 90° в третьей. Несмотря на неоднородность применения симметрии, «уравнения движения», которые управляют динамической эволюцией полей, не изменятся, как и вся остальная физика. Вообще ничего не изменится.

Симметрии, как правило, не работают таким образом, если они не являются калибровочными симметриями. Фактически Стандартная модель имеет четыре «глобальные» симметрии, связанные с частицами вещества и сохранением заряда, которые не являются калибровочными. Эти глобальные симметрии действуют на материальные поля Стандартной модели, которые мы обсудим позже. В Стандартной модели и вообще в теории поля существует еще одна глобальная симметрия, которая не является калибровочной. Эта

симметрия называется *симметрией Пуанкаре*. Она включает простые переносы, такие как перемещение всей Вселенной на один метр вправо или проведение одного и того же эксперимента в двух разных лабораториях, и вращения, когда конечный результат выглядит аналогично исходному.

Однако если требуется, чтобы некоторые симметрии были калибровочными, то из расчетов Янга и Миллса следует, что для этого необходимо ввести в теорию нечто дополнительное, некий внешний фактор. Этим «нечто» могут быть калибровочные поля. В Стандартной модели калибровочные поля соответствуют калибровочным симметриям $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, это означает по ассоциации, что калибровочные поля соответствуют трем взаимодействиям, которые включены в состав модели: сильному, слабому и электромагнитному. Между прочим, Янг и Миллс не были первыми, кто разработал калибровочную теорию $U(1)$, описывающую электромагнетизм, – это было сделано за десятилетие до них. Но они были первыми, кто разработал калибровочную теорию для $SU(2)$, которая показала путь разработки $SU(n)$ теорий, для любого n больше двух, включая $SU(3)$.

Введение калибровочных полей позволило получить теорию с калиброванными симметриями, что в свою очередь позволяет сохранять инвариантность физики, даже когда операции симметрии применяют отдельно. Физики создали Стандартную модель такой не потому, что она поразила их своей элегантностью и эстетической привлекательностью, а потому, что из экспериментов следовало, что так работает природа. Иными словами, Стандартная модель является калибровочной теорией по эмпирическим, а не эстетическим причинам.

Хотя физики обычно рассуждают в терминах калибровочных полей, математики часто выражают те же идеи в терминах расслоений, что является математическим способом представления полей, связанных с тремя взаимодействиями. Струнные теоретики стирают границу между физикой и математикой, а расслоения играют роль гетеротических конструкций, которых мы кратко коснемся.



Рис. 9.1. Чжэньнин Янг и Роберт Миллс, авторы теории Янга-Миллса (Правила Янга)

Перед тем как перейти к ним, необходимо объяснить, каким образом многообразия Калаби-Яу связаны с калибровочными полями, которые математики называют расслоениями. Поля, которые мы видим, – четырехмерная гравитация и калибровочные поля $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, связанные с другими тремя силами, бесспорно, существуют в четырехмерной области, в которой, если верить нашим наблюдениям, обитаем и мы. Калибровочные поля фактически существуют в десяти измерениях, которые описывает теория струн. Компонент, лежащий в шести компактифицированных измерениях Калаби-Яу, дает начало четырехмерным калибровочным полям нашего мира и приводит к сильному, слабому и электромагнитному взаимодействиям. Правильнее было бы сказать, что внутренняя структура Калаби-Яу фактически рождает эти взаимодействия, – собственно, это и следует из теории струн.

До сих пор мы говорили о симметрии без упоминания проблемы, с которой столкнулись создатели модели, а именно с тем, что называют *нарушением симметрии*. В гетеротической версии теории струн мы обсуждали десятимерное пространство-время, с которого мы начинаем, содержащее нечто, что мы называем $E_8 \times E_8$ -симметрией. E_8 – это 248-мерная группа симметрии, которую можно считать, в свою очередь, калибровочным полем с 248 компонентами (подобно тому как вектор, указывающий некоторое произвольное направление в трехмерном пространстве, имеет три компоненты, обозначаемые x , y и z). $E_8 \times E_8$ – это более обширная группа из 496 компонентов ($248 + 248$), но для практических целей можно игнорировать второе E_8 . Конечно, даже 248 симметричных измерений составляют проблему для вывода Стандартной модели, которая имеет только двенадцать симметричных измерений. Значит, нам нужно каким-то способом «отломать» лишние измерения у 248-мерной E_8 -группы, уменьшив их количество до двенадцати.

Давайте вернемся к нашему примеру двумерной сферы, или шара, обладающей вращательной симметрией в трех измерениях и принадлежащей к симметричной группе $SO(3)$. Здесь термин « SO » – это сокращение от «special orthogonal group» (специальная ортогональная группа), поскольку она описывает вращение вокруг взаимно перпендикулярных осей. Можно взять сферу и начать вращать ее вокруг любой из трех осей – x , y и z , – и она всегда будет оставаться той же самой сферой. Но можно нарушить симметрию, если потребовать, чтобы одна точка всегда отображалась сама на себя. На нашей планете можно было бы в качестве такой точки выбрать Северный полюс. После этого у нас останется только один набор преобразований поворота, а именно повороты относительно оси, проходящей через Северный и Южный полюсы, которые оставляют точку Северного полюса неподвижной. В результате трехмерная симметрия шара нарушается и превращается в одномерную симметрию $U(1)$.²

Для того чтобы перейти к четырем измерениям и Стандартной модели с ее 12-мерной симметричной группой, следует найти аналогичный способ нарушения симметрии калибровочной группы E_8 . Например, можно нарушить симметрию путем выбора определенной конфигурации, включающей или выключающей отдельные компоненты 248-компонентного калибровочного поля. В конце концов, мы найдем способ оставить включенными только двенадцать полей, по аналогии с тем, как, зафиксировав Северный полюс, мы оставили только одно из трех направлений вращения на сфере. Но это не могут быть произвольные двенадцать полей: это должны быть правильные поля, чтобы вписаться в симметричные группы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Другими словами, когда вы закончите разрушать массивную группу E_8 , то оставите в четырех измерениях только калибровочные поля Стандартной модели.

² Chris Beasley (Stony Brook University), interview with author, November 13, 2008.

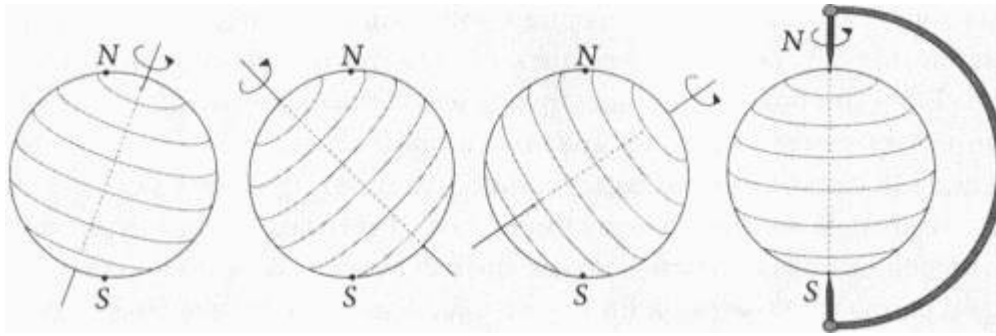


Рис. 9.2. Благодаря полной симметрии сфера остается без изменений при вращении вдоль любой оси, проходящей через ее центр. Однако можно нарушить симметрию, если потребовать, чтобы при повороте северный полюс оставался неподвижным. Теперь вращение разрешено только относительно одной оси, проходящей через северный и южный полюсы. Следование этому условию нарушает или ограничивает полную вращательную симметрию сферы

Остальные поля, соответствующие нарушенным симметриям, полностью не исчезают. Они будут проявлять себя только в области очень высоких энергий, что делает их недоступными для нас. Можно сказать, что дополнительные симметрии E8 спрятаны в Калаби-Яу.

Тем не менее одно лишь многообразие Калаби-Яу само по себе не способно породить Стандартную модель. Здесь и вступают в игру расслоения, которые являются в буквальном смысле расширениями многообразия. *Расслоениями* называют группы векторов, прикрепленные к каждой точке многообразия. Самый простой тип расслоения известен под названием *касательное расслоение*. Каждое многообразие Калаби-Яу имеет такое расслоение, но поскольку касательное расслоение Калаби-Яу является более сложным для представления, чем даже само многообразие, то давайте вместо него рассмотрим касательное расслоение обычной двухмерной сферы. Если выбрать точку на поверхности этой сферы и построить два вектора, касательных поверхности сферы в этой точке, то такие векторы определяют плоскость или диск в пределах плоскости, если ограничить векторы определенной длиной. Если сделать то же самое в каждой точке поверхности и объединить все эти плоскости или диски вместе, то таким коллективным объектом и будет расслоение. Следует отметить, что расслоение обязательно включает само многообразие, поскольку в расслоение входит, по определению, каждая отдельная точка на поверхности многообразия. По этой причине касательное расслоение двухмерной сферы является четырехмерным пространством, поскольку касательная к поверхности обладает двумя степенями свободы, или двумя независимыми направлениями движения, а также сама по себе сфера, будучи частью расслоения, добавляет еще две степени свободы, которые сами не зависят от касательного пространства.

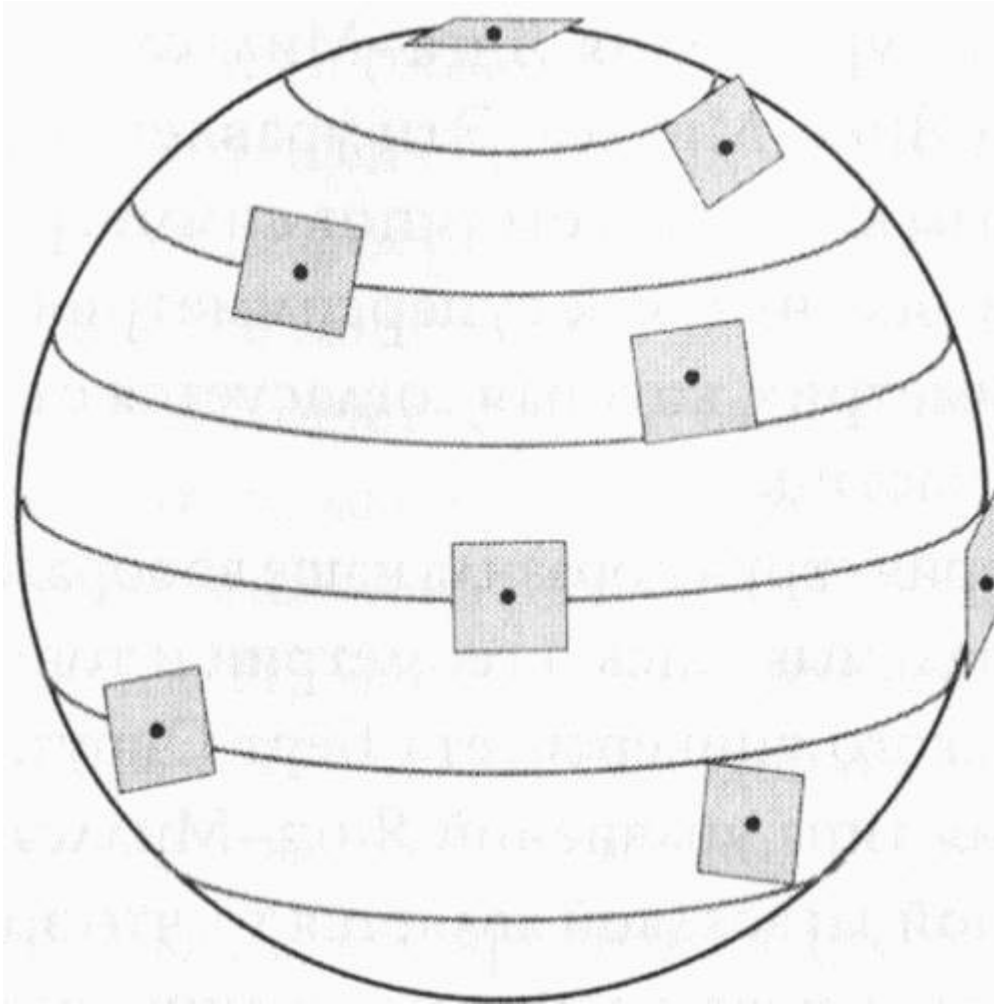


Рис. 9.3. В каждой точке поверхности сферы существует касательная плоскость, пересекающая сферу только в этой точке и больше нигде. *Касательное расслоение* для сферы состоит из плоскостей, касательных к каждой точке этой сферы. Поскольку, по определению, касательное расслоение включает каждую точку на сфере, оно также должно включать и саму сферу. Невозможно изобразить касательное расслоение с его бесконечным количеством касательных плоскостей, поэтому мы покажем сферу с кусками касательных плоскостей в нескольких показательных точках

Касательное расслоение шестимерного многообразия Калаби-Яу представляет собой соответственно 12-мерное пространство с шестью степенями свободы в касательном пространстве и шестью степенями свободы в самом многообразии.

Расслоения имеют решающее значение в попытках струнных теоретиков сформулировать физику элементарных частиц в терминах теории Янга-Миллса, где калибровочные поля описываются набором дифференциальных уравнений, называемых, как нетрудно догадаться, уравнениями Янга-Миллса.

Наш следующий шаг состоит, в частности, в поиске решений уравнений для калибровочных полей, живущих на трехмерном многообразии Калаби-Яу. Поскольку основной причиной появления многообразий Калаби-Яу в теории струн было удовлетворение требованиям суперсимметрии, калибровочные поля также должны подчиняться суперсимметрии. Это означает, что мы должны решать специальные суперсимметричные уравнения Янга-Миллса, называемые эрмитовыми уравнениями Янга-Миллса. Эти уравнения дают суперсимметрию с минимальным количеством типов симметрии, которое только можно получить, известную как суперсимметрия $N = 1$, и это единственная суперсимметрия, которая согласуется с современной физикой элементарных

частиц.

«До того как теория струн поразила наше воображение, большинство физиков особо не задумывались о геометрии и топологии, – говорит физик Пенсильванского университета Бёрт Оврут. – Мы просто записывали уравнения типа уравнений Янга-Миллса и пытались их решить». Единственной загвоздкой является то, что эрмитовы уравнения Янга-Миллса являются существенно нелинейными дифференциальными уравнениями, которые никто не может решить. «До сегодняшнего дня, – говорит Оврут, – нет ни одного известного [явного] решения эрмитовых уравнений Янга-Миллса в шестимерном многообразии Калаби-Яу. Следовательно, мы должны были бы остановиться на достигнутом, если бы не работа некоторых геометров, показавших нам иной путь».¹⁵⁴

Расслоения предлагают нам обходной путь для этого нелинейного дифференциального барьера, поскольку мы можем считать расслоение, прикрепленное к многообразиям Калаби-Яу, альтернативным описанием калибровочных полей, определяемых уравнениями Янга-Миллса. Как это сделать, описывает теорема DUY(ДУЯ), название которой составлено из первых букв фамилий Саймона Дональдсона (Simon Donaldson) (Королевский колледж), Карена Уленбека (Karen Uhlenbeck) (Техасский университет) и моей (Yau).

Идея, лежащая в основе теоремы, заключается в том, что эрмитовы уравнения Янга-Миллса определяют поле, которое может быть представлено векторным расслоением. Мы доказали, что если построить расслоение на Калаби-Яу, которое удовлетворяет конкретному топологическому условию, а именно является устойчивым или технически – с более устойчивым углом наклона (крутизной), то такое расслоение допускает существование уникального калибровочного поля, которое автоматически удовлетворяет этим уравнениям. «Это не имеет смысла, если вы меняете одну чрезвычайно сложную проблему на другую крайне трудную, – отмечает Оврут. – Но вторая проблема создания устойчивого расслоения намного проще, в результате не надо вообще решать эти ужасные дифференциальные уравнения».¹⁵⁵

Иными словами, мы нашли геометрическое решение проблемы, которую не могли решить другими способами. Мы показали, что не стоит волноваться о полях или дифференциальных уравнениях. Все, о чем следует беспокоиться, это о построении устойчивого расслоения. Что означает выражение «расслоение с устойчивым наклоном»? Когда мы говорили о наклоне кривой, мы отметили, что это число, связанное с кривизной, а устойчивость наклона расслоения в данном случае связана с кривизной расслоения. Проще говоря, «наклон выражает чувство равновесия, – объясняет математик Рон Донаги из Пенсильванского университета. – Он указывает, что кривизна в одном направлении не может быть намного больше, чем кривизна в другом направлении. Независимо от выбранного пути, ни одно направление не может быть слишком экстремальным относительно других направлений».¹⁵⁶ Любое расслоение можно разделить на более мелкие части или субрасслоения, а требование устойчивости означает, что наклон любого из этих субрасслоений не может быть больше наклона расслоения как единого целого. Если это требование выполняется, то такое расслоение является расслоением с устойчивым наклоном, а калибровочные поля удовлетворяют эрмитовым уравнениям Янга-Миллса. В результате условие суперсимметрии будет выполнено.

В некотором смысле идея устойчивости наклона, являющаяся центральной для теоремы DUY, представляет собой следствие теоремы Калаби-Яу, поскольку эта теорема выдвигает определенные требования кривизны к многообразию Калаби-Яу, гарантируя, что касательное расслоение будет обладать устойчивым наклоном. А тот факт, что уравнения Калаби-Яу и эрмитовы уравнения Янга-Миллса одинаковы для касательного расслоения, когда в основе лежит метрика Калаби-Яу, является еще одним следствием доказательства гипотезы Калаби, которое заставило меня подумать о взаимосвязи между устойчивостью наклона и

154 Burt Ovrut (University of Pennsylvania), interview with author, July 20, 2008.

155 Ovrut, interview with author, February 2, 2007.

156 Ron Donagi (University of Pennsylvania), interview with author, November 14, 2008.

эрмитовыми уравнениями Янга-Миллса. Возникшая у меня идея заключалась в том, что расслоение будет удовлетворять этим уравнениям *тогда и только тогда*, когда оно устойчивое.

По сути, Дональдсон доказал это в своей части теоремы DUY, опубликованной им в 1985 году, конкретно относящейся к особому случаю двух комплексных размерностей. Уленбек и я работали независимо от Дональдсона, и в работе, вышедшей в свет через год, мы доказали, что аналогичный результат применим к любой комплексной размерности и соответственно к любому пространству с четным количеством реальных размерностей. Я считаю DUY одной из самых сложных теорем, которые я когда-либо доказывал или – в данном случае – доказал совместно с другим ученым. В настоящее время наш труд вместе с работой Дональдсона называется DUY.

Эта теорема очень похожа на доказательство гипотезы Калаби, поскольку в обоих случаях мы стремились свести задачу, включающую систему неприятных нелинейных уравнений, с которыми мы не умеем работать, к геометрической задаче, которую мы умеем решать. В случае Калаби я никогда не решал соответствующие дифференциальные уравнения в явном виде. Я только показал, что если многообразие удовлетворяет определенным условиям (компактное, кэлерово, с исчезающим первым классом Черна), то можно проверить с помощью стандартных процедур алгебраической геометрии, то должно существовать решение таких уравнений в форме риччи-плоской метрики. DUY работает аналогичным образом, предполагая наличие такого расслоения, точнее, устойчивости наклона, чтобы решения эрмитовых уравнений Янга-Миллса всегда существовали. В алгебраической геометрии также разработаны методы для оценки устойчивости расслоения, хотя это оказалось намного сложнее, чем проверить, является ли первый класс Черна для многообразия исчезающим или нет.

Некоторые люди, в том числе и физики, не знакомые с этой областью математики, находят DUY удивительным, поскольку на первый взгляд условия расслоения не имеют ничего общего с дифференциальными уравнениями, которые вы надеетесь решить.

Но для меня эта теорема не была удивительной, поскольку, если уж на то пошло, она казалась мне естественным продолжением гипотезы Калаби. Все доказательство теоремы Калаби посвящено многообразию Калаби-Яу, тогда как теорема DUY вся посвящена расслоению. Вы ищете метрику расслоения, но метрика многообразия уже дана вам как часть исходной информации. По желанию можно выбрать любую лежащую в основе метрику, включая метрику Калаби-Яу.

Пункт пересечения между гипотезой Калаби и теоремой DUY представляет собой касательное расслоение. И вот почему: когда вы докажете существование многообразий Калаби-Яу, то получите не только эти многообразия, но также их касательные расслоения, так как каждое многообразие имеет расслоение. Поскольку касательное расслоение определяется многообразием Калаби-Яу, оно наследует свою метрику от родительского многообразия – в данном случае от многообразия Калаби-Яу. Другими словами, метрика касательного расслоения должна удовлетворять уравнениям Калаби-Яу. При этом оказывается, что для касательного расслоения эрмитовы уравнения Янга-Миллса те же, что и для уравнений Калаби-Яу, при условии, что фоновая метрика, выбранная вами, является метрикой Калаби-Яу. Следовательно, если касательное расслоение удовлетворяет уравнениям Калаби-Яу, оно также автоматически удовлетворяет эрмитовым уравнениям Янга-Миллса. В результате получается, что касательное расслоение фактически является первым частным случаем теоремы DUY – первым решением, несмотря на то что доказательство гипотезы Калаби было получено за десять лет до теоремы DUY.

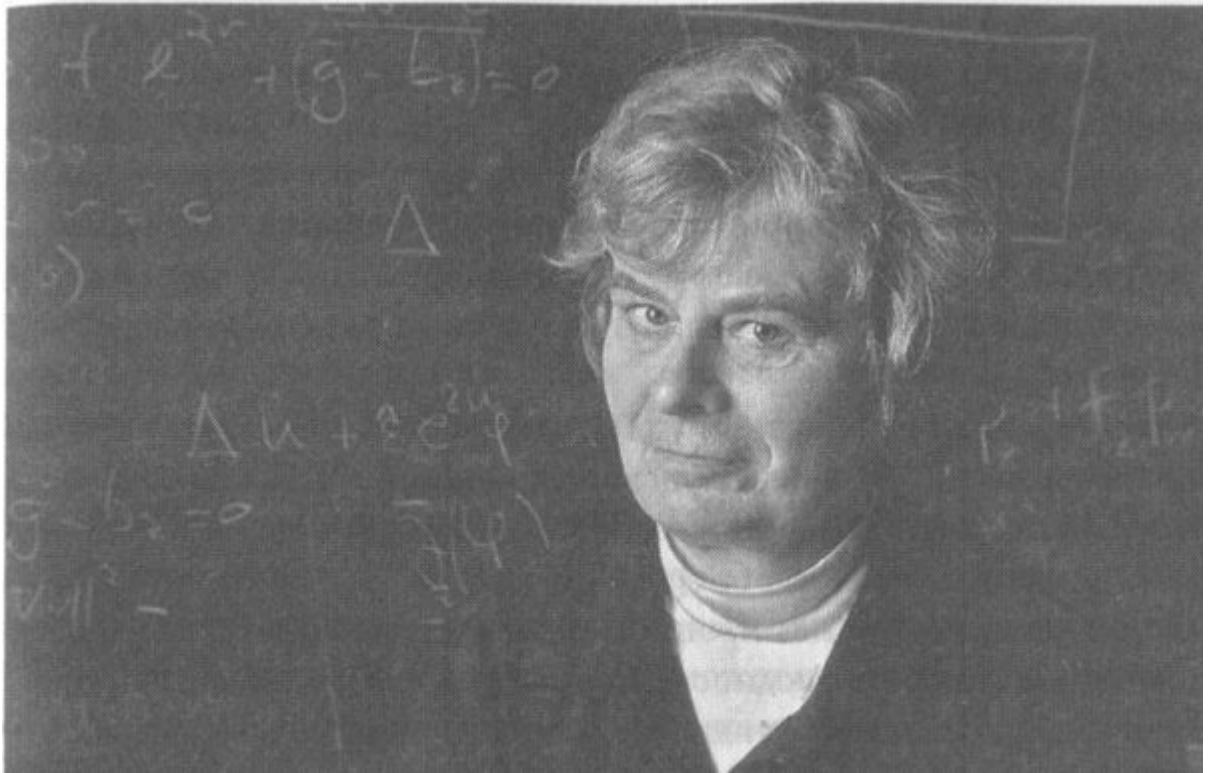


Рис. 9.4. Карен Уленбек (фото любезно предоставлено Техасским университетом в Остине)

Однако это не самое интересное в DUY. Истинная сила DUY состоит в предписании условий (снова в отношении устойчивости), которым должны удовлетворять *другие* расслоения (а не только касательное расслоение), чтобы решения эрмитовых уравнений Янга-Миллса существовали.

Еще до выхода нашего труда в 1986 году я говорил Эдварду Виттену, что теория Янга-Миллса, похоже, естественным образом согласуется с многообразиями Калаби-Яу и поэтому должна быть важна для физиков. Виттен вначале не понял актуальности теоремы, но примерно через год, продолжив работу, он пошел еще дальше, показав, как этот подход можно использовать в компактификациях Калаби-Яу. Когда вышел труд Виттена, то благодаря его авторитету в этой области применением DUY к теории струн стали интересоваться и другие исследователи, что служит еще одним примером того, как геометрия взяла инициативу в свои руки, несмотря на то что она не всегда шла этим путем.

Теперь давайте посмотрим, как можно использовать эту геометрию и топологию для получения физики элементарных частиц из теории струн. Первый шаг заключается в выборе многообразия Калаби-Яу, но подходит не всякое многообразие. Если мы хотим использовать определенные методы, которые в прошлом доказали свою эффективность, нам необходимо выбрать неодносвязное многообразие, то есть многообразие с нетривиальной фундаментальной группой. Я надеюсь, вы помните, – это означает, что вы можете найти в таком пространстве петлю, которую нельзя стянуть в точку. Другими словами, многообразие должно быть больше похоже на тор, а не на сферу, и иметь, по крайней мере, одну дырку. Наличие дырки, цикла или петли, бесспорно, оказывает влияние на геометрию и топологию самого расслоения, что, в свою очередь, влияет на физику.

Второй шаг заключается в построении расслоения, которое даст не только калибровочные поля Стандартной модели, но также устранил аномалии – отрицательные вероятности, нежелательные бесконечности и другие раздражающие свойства, которые были присущи самым первым версиям теории струн. Когда Майкл Грин и Джон Шварц проиллюстрировали способ устранения аномалий в своей знаменитой работе 1984 года, их аргумент был сформулирован в терминах калибровочных полей. Выражая аналогичную идею

в геометрических и топологических терминах, можно сказать, что расслоение будет удовлетворять требованию устранения аномалий, если его второй класс Черна равен второму классу Черна касательного расслоения.

Мы уже обсуждали понятие класса Черна – метода классификации топологических пространств и грубого определения различия между ними (см. четвертую главу). Как уже указывалось, первый класс Черна исчезает (или равен нулю), если можно ориентировать все касательные векторы на многообразии в одном и том же направлении. Это похоже на задачу расчесать густые волосы, не оставив торчащего чуба. Это невозможно на двухмерной сфере, но можно избежать чуба на поверхности двухмерного тора. Поэтому мы говорим, что тор обладает исчезающим первым классом Черна, тогда как первый класс Черна для сферы является неисчезающим.

Второй класс Черна можно на пальцах определить аналогичным образом, за исключением того, что нам необходимо рассмотреть на некотором многообразии два векторных поля, а не одно. Векторные поля, о которых мы здесь говорим, являются комплексными, то есть координаты отдельного вектора описываются комплексными числами. Если принять, что эти два векторных поля являются независимыми, то в большинстве точек на многообразии векторы, вероятно, будут иметь различные направления. Но в определенных точках векторы из каждого поля могут иметь одно и то же комплексное направление или оба стремиться к нулю. На самом деле, может существовать целый набор точек, где это условие будет выполняться. Такой набор точек образует замкнутую двухмерную поверхность в пределах нашего шестимерного многообразия, а вместе эти точки представляют второй класс Черна.

Каким образом это связано с устранением аномалий? Грин и Шварц показал, что независимо от того, насколько плохими могут оказаться аномалии, если удастся заставить их компенсировать друг друга и тем самым устранить, то, возможно, в конце концов, получится жизнеспособная теория. Один из способов избавления от таких надоедливых аномалий заключается в том, чтобы убедиться, что выбранное вами расслоение имеет тот же второй класс Черна, что и касательное расслоение.

Что касается вопроса, почему это должно работать, мы должны помнить, что расслоения, о которых идет речь, являются, в некотором смысле, эрзацами фоновых полей – гравитационных и калибровочных, из которых можно вывести реальные силы, существующие в природе. Например, касательное расслоение Калаби-Яу является хорошим слепком гравитационного поля, так как Калаби-Яу, характеризуемое специальной метрикой, позволяет решить уравнения гравитационного поля Эйнштейна. Другими словами, гравитация в некотором роде зашифрована в его метрике. Но метрика также связана с касательным расслоением, потому что метрика, как говорилось ранее, предоставляет нам функцию для вычисления расстояния между любыми двумя точками А и В на многообразии. Мы берем все возможные пути между А и В и разбиваем каждый путь на много крошечных касательных векторов; объединенные вместе касательные векторы образуют касательное расслоение. Вот почему в случае попытки удаления аномалий можно использовать касательное расслоение Калаби-Яу, чтобы построить гравитационную часть теории.

Затем мы выбираем дополнительное векторное расслоение с целью воспроизведения калибровочных полей Стандартной модели. Теперь у нас есть два расслоения, одно дает нам гравитационное поле, второе – калибровочные поля. К сожалению, каждое поле неизбежно будет иметь аномалии, которых невозможно избежать, но Грин и Шварц показали, что нет причины для отчаяния. По мнению Донаги, они продемонстрировали, «что аномалия, являющаяся результатом гравитационного взаимодействия, обладает противоположным знаком по отношению к аномалии калибровочного поля. Поэтому если удастся сделать так, чтобы они имели одинаковые абсолютные значения, то они уничтожат друг друга».¹⁵⁷

Чтобы выяснить, работает ли наша теория, мы возьмем второй класс Черна как касательного расслоения Калаби-Яу, так и расслоения калибровочного поля. Ответ, который

мы получаем для каждого расслоения, зависит от тех особых точек, где векторные поля совпадают или исчезают. Однако невозможно просто вычислить количество таких точек, поскольку на самом деле их количество бесконечно. Вместо этого можно сравнить кривые (единичной комплексной размерности), которые вычерчивают эти точки. Кривые, которые относятся к каждому из этих расслоений, не должны быть одинаковыми, чтобы не соответствовать второму классу Черна, но они должны быть гомологичными.

Гомология является тонким понятием, которое лучше всего объяснить на примере, я постараюсь подобрать наиболее простой пример – крендель. Каждая дырка вырезается по кругу, одномерному объекту, но каждый круг ограничивает дырку, которая является двухмерным объектом. В данном случае примером гомологии будут два круга нашего кренделя. Таким образом, мы называем две кривые, или два круга, гомологичными, если они имеют одну и ту же размерность и ограничивают поверхность или многообразие, имеющее на одно измерение больше. Мы используем термин *класс Черна*, чтобы указать на наличие целого класса кривых, которые связаны через гомологию. Мы ставим эту концепцию на первое место, потому что если кривые для наших двух расслоений являются гомологичными (касательное расслоение, представляющее гравитацию, и второе расслоение – калибровочные поля), то этим расслоениям будет соответствовать второй класс Черна. В результате, как ни странно, аномалии теории струн исчезнут, чего мы и добивались.

Когда ученые впервые начали проверку этих идей, как это сделали в своем труде Канделас, Горовиц, Строминджер и Виттен в 1985 году, они использовали касательное расслоение как единственное, известное на тот момент. Если использовать касательное расслоение, то второй класс Черна вашего расслоения не может не соответствовать второму классу Черна касательного расслоения. Таким образом, ваш выбор будет правильным, но касательное расслоение также будет удовлетворять условию стабильности, что, как уже указывалось ранее, является прямым следствием доказательства гипотезы Калаби. Тем не менее исследователи считали, что если другие расслоения соответствуют вышеуказанным требованиям, включая стабильность, то можно найти и более гибкие с точки зрения физики варианты. Канделас говорит, что даже в далеком 1985 году «мы уже поняли, что должны существовать более общие способы решения задач, а именно что существуют иные расслоения, кроме касательного, которое мы используем. Хотя мы знали, что это возможно, но еще не знали, как это сделать практически».¹⁵⁸

Тем временем с наступлением второй струнной революции в середине 1990-х годов исследователи поняли, что существует возможность смягчить ограничения по расслоениям, в связи с чем открывалось много новых возможностей. В М-теории существовала дополнительная размерность, что давало исследователю свободу и простор для размещения дополнительных полей, которые соответствовали бранам – важным новым компонентам, введенным М-теорией. После введения браны в общую картину второй класс Черна калибровочного поля уже больше не должен быть равным второму классу Черна касательного расслоения: он мог быть *меньше или равен*.

Все это стало возможным потому, что сама брана или кривая, вокруг которой она обернута, имеет свой собственный второй класс Черна, который можно сложить со вторым классом Черна калибровочного расслоения, чтобы соответствовать касательному расслоению и таким образом обеспечить устранение аномалии. В результате сегодня физики могут работать с более широким разнообразием калибровочных расслоений.

«Каждый раз, когда вы ослабляете условия (в данном случае меняя равенство на неравенство), у вас появляется больше примеров», – объясняет Донаги.¹⁵⁹ Обратившись снова к нашему примеру со сферой или к большому надувному мячу для игры на пляже, заметим, что вместо присоединения касательной плоскости или ее части к каждой точке на поверхности мяча можно присоединить обычное расслоение с векторами, направленными от поверхности. Существует много других расслоений, которые можно создать, присоединив

158 Candelas, interview with author, December 1, 2008.

159 Donagi, interview with author, May 3, 2008

определенное векторное пространство к различным точкам на многообразии и затем объединив все эти векторные пространства для получения расслоения.

Хотя новая степень свободы «от М-теории» позволила ученым исследовать широкий спектр расслоений, они до сих пор не придумали примеры, которые бы действительно работали. Первый шаг снова заключается в выборе расслоения, которое является устойчивым и избавленным от аномалий. Из теоремы DUY мы знаем, что такое расслоение может дать вам калибровочные поля или взаимодействия Стандартной модели.

Конечно, Стандартная модель посвящена не только взаимодействиям. Это теория физики элементарных частиц, поэтому ей есть что сказать и об элементарных частицах. Тогда поставим вопрос следующим образом: как элементарные частицы связаны с многообразиями Калаби-Яу? Существуют два вида элементарных частиц, о которых будет идти речь: частицы, которые мы можем потрогать (материальные частицы), и частицы-переносчики взаимодействий (полевые частицы), в число которых входят фотоны, переносящие свет, а также другие, невидимые для нас частицы – слабые бозоны и глюоны.

Частицы силовых полей в некотором смысле легче извлечь, поскольку если вы правильно получили все калибровочные поля на предыдущем этапе со всеми группами правильной симметрии, то вы уже имеете все эти частицы. Они являются в буквальном смысле частью силовых полей, а количество симметричных размерностей в каждом калибровочном поле соответствует количеству частиц, передающих взаимодействие. Например, сильное взаимодействие, связанное с восьмимерной симметрией SU(3), обеспечивается восемью глюонами; слабое взаимодействие, связанное с трехмерной симметрией SU(2), передается тремя бозонами: W , W^{+-} и Z ; а электромагнитное взаимодействие с одномерной симметрией U(1) передается одной частицей – фотоном.

Мы можем изобразить эти частицы в движении довольно легко. Представим, как два парня едут на роликах параллельно друг другу и один из них бросает волейбольный мяч другому. Парень, бросающий мяч, отклоняется в противоположном от летящего мяча направлении, а парень, ловящий мяч, отклоняется в том же направлении, в каком летит мяч. Если наблюдать это взаимодействие из самолета, летящего достаточно высоко, чтобы не был виден мяч, то может показаться, что на этих двух людей действует сила отталкивания. Но если посмотреть на действие отталкивающей силы с очень близкого расстояния, где эта сила «квантована», то можно увидеть, что движения роллеров вызваны дискретным объектом – волейбольным мячом, а не каким-то невидимым полем. Квантование полей, и материальных, и калибровочных, означает, что среди всех возможных флуктуаций или вибраций вы выбираете только определенные. Каждая специально выбранная флуктуация соответствует волне с конкретной величиной энергии и, следовательно, частотой.

«Именно это наблюдается в Стандартной модели, – говорит Оврут. – Материальные частицы похожи на парней на роликах, а силовые частицы – фотоны, глюоны и бозоны (W^{+} , W^{-} и Z) – на волейбольные мячи, которые они перекидывают». ¹⁶⁰

Поговорим еще немного о материальных частицах. Все обычные материальные частицы, такие как электроны и кварки, обладают спином $-1/2$. Спин – это внутренняя, квантованная механическая характеристика всех элементарных частиц, связанная с внутренним моментом импульса частицы. Эти частицы со спином $-1/2$ являются решениями уравнения Дирака, которое обсуждалось в шестой главе. В теории струн следует решать это уравнение в десяти измерениях. Но когда в качестве геометрии, лежащей в основе, выбирается многообразие Калаби-Яу, уравнение Дирака можно разбить на шести- и четырехмерные компоненты. Решения шестимерного уравнения Дирака делятся на две категории: тяжелые частицы, которые во много триллионов раз тяжелее всех частиц, наблюдаемых при экспериментах на ускорителях с высокими энергиями, и обычные частицы, масса которых настолько мала, что можно считать ее равной нулю.

Независимо от массы частицы чрезвычайно сложно найти решения для уравнений с такими компонентами. К счастью, геометрия и топология снова могут помочь нам избежать

решения сложнейших дифференциальных уравнений. В этом случае нам необходимо вычислить когомологию касательного расслоения, как это показали исследователи из Университета Пенсильвании, включая Брауна (ранее работал у Пенна), Донаги, Оврута и Тони Пантева. Когомология тесно связана с гомологией и, как гомология, имеет дело с возможностью трансформирования одного объекта в другой. Две концепции, как считает Донаги, представляют различные способы отслеживания одних и тех же свойств.¹⁶¹ Когда вы определяете когомологический класс расслоения, то можно использовать его для нахождения решений уравнения Дирака и получения материальных частиц. «Это отличный математический метод», – утверждает Оврут.¹⁶²

Используя этот и другие методы, Винсент Бушар из Университета Альберта и Донаги, а также Оврут с коллегами разработали модели, которые, как оказалось, дали много полезного. Обе группы ученых утверждают, что получили верную калибровочную группу симметрии, правильную суперсимметрию, хиральные фермионы и правильные спектры частиц – три поколения кварков и лептонов плюс отдельную частицу Хиггса, и никаких экзотических частиц типа экстра-кварков или лептонов, не входящих в Стандартную модель.

Но разгорелись серьезные дебаты о том, насколько близко эти научные группы подошли к Стандартной модели. Например, были подняты вопросы о методологиях и таких феноменологических деталях, как наличие модульных частиц, которые будут обсуждаться в следующей главе. Физики, с которыми я разговаривал, имеют различные точки зрения на этот вопрос. Лично я пока не в восторге от этой работы, а если быть откровенным, то и от любой попытки на сегодняшний день реализовать Стандартную модель. Шамит Качру из Стэнфорда считает, что последние шаги в этом направлении являются закреплением успехов Канделаса и Грина с коллегами. «Но пока еще никто, – говорит Качру, – не создал модель, которая попала бы в яблочко».¹⁶³ Майкл Дуглас из Центра Саймона по изучению геометрии и физики в Стоуни-Брук согласен, «что все эти модели являются еще сырыми, ни одна из них пока не может пройти всех испытаний на непротиворечивость реальному миру. Но хотя обе модели являются незавершенными, мы многое узнаем из этой работы».¹⁶⁴ Канделас доверяет моделям Бушара-Донаги и Оврута с коллегами, поскольку они показывают, как использовать другие расслоения помимо касательного. Он считает, что этот труд со временем укажет путь к другим моделям, отмечая, что «вероятно, существуют и другие возможности. Но пока мы их не реализуем, мы не будем знать, как они работают»¹⁶⁵. И работают ли они вообще.

Следующие шаги включают не только получение правильных частиц, но также попытки вычисления их масс, без которых невозможно провести значимые сравнения со Стандартной моделью. До того как мы сможем вычислить массу, мы должны определить значение того, что называется *константой взаимодействия Юкавы*, описывающей силу взаимодействия между частицами: взаимодействия между материальными частицами Стандартной модели и полем Хиггса, а также его частицей, бозоном Хиггса, являющейся чрезвычайно важной. Чем сильнее взаимодействие, тем больше масса частицы.

Давайте возьмем одну частицу, скажем, d-кварк. Как и в случае других материальных частиц, в описание поля d-кварка входят два компонента: один – соответствующий правосторонней форме этой частицы, а второй – левосторонней. Поскольку масса в квантовой теории поля является результатом взаимодействия с полем Хиггса, мы умножаем два поля для d-кварка (лево- и правосторонние формы) на само поле Хиггса. Результат умножения в этом случае соответствует этому взаимодействию, то есть величина произведения, а точнее величина *смешанного произведения*, показывает, насколько сильным или слабым является взаимодействие d-кварка и поля Хиггса.

Но это только первая часть сложной процедуры. Следующая сложность возникает из-за того, что величина смешанного произведения может меняться по мере перемещения по

161 Donagi, interview with author, November 20, 2008.

162 Ovrut, interview with author, November 20, 2008.

163 Shamit Kachru (Stanford University), interview with author, November 4, 2008.

164 Michael Douglas (Stony Brook University), interview with author, August 20, 2008.

165 Candelas, interview with author, December 1, 2008.

«поверхности» Калаби-Яу. С другой стороны, константа взаимодействия Юкавы не является переменной величиной, зависящей от месторасположения на многообразии. Это глобальная величина номер один, а способ вычисления этой величины состоит в интегрировании произведения d -кварка и полей Хиггса по всему многообразию.

Следует помнить, что интегрирование фактически является процессом усреднения. У вас есть некоторая функция (в нашем случае произведение трех полей), которая принимает различные значения в разных точках на многообразии, а вам необходимо получить ее среднее значение. Это необходимо сделать, поскольку константа взаимодействия Юкавы является числом, а не функцией, тогда как масса частицы также является числом. Поэтому следует разбить многообразие на мелкие участки и определить значение функции на каждом участке. Затем сложить все значения и разделить на количество участков, получив среднее значение.

Хотя этот метод может показаться довольно простым, он не даст точного правильного ответа. Проблема состоит в том, что многообразие Калаби-Яу, с которым мы работаем, обладает кривизной, и если взять крошечную «прямоугольную» заплатку, допустив на мгновение, что мы находимся в двухмерном пространстве размером $dx \times dy$, то размер такого участка будет изменяться в зависимости от того, насколько велика его кривизна. Вместо этого следует взять значение функции в точке, где находится заплатка, и затем умножить это значение на весовой коэффициент, зависящий от размера заплатки. Другими словами, необходим способ измерения размера заплатки. А для этого необходима метрика, которая подробно описывала бы геометрию многообразия. Но здесь имеется одна загвоздка, о которой мы уже неоднократно упоминали: пока еще никто не смог предложить метод вычисления метрики Калаби-Яу явно, то есть точно.

Здесь вас может ждать ловушка: без метрики невозможно получить массу, а без массы невозможно узнать, насколько близка имеющаяся модель к Стандартной модели. Но существуют несколько математических методов, а именно численные методы, реализуемые с помощью компьютера, которые можно использовать для приближенного вычисления метрики. Затем возникает вопрос, достаточно ли хороша использованная аппроксимация для получения приемлемого ответа.

В настоящее время применяют два основных метода, и оба в некоторой степени опираются на гипотезу Калаби. Эта гипотеза гласит (как уже отмечалось неоднократно), что если многообразие удовлетворяет определенным топологическим условиям, то оно обладает риччи-плоской метрикой. Не создав саму метрику, я не мог бы доказать, что такая метрика существует. При доказательстве был применен так называемый аргумент деформации, это означает, что если начать с чего-то, скажем, с некой метрики, и деформировать ее определенным образом, то этот процесс в конце концов сойдется к необходимой метрике. Если вы можете доказать, что такой процесс деформации стремится к нужному решению, то существует хороший шанс, что можно найти численную модель, которая также будет сходиться.

Недавно два физика, Мэтт Хедрик из Университета Брандейса и Тоби Вайсман из Королевского колледжа, произвели численные расчеты в соответствии с этими принципами, разработав аппроксимированную метрику для поверхности $K3$, четырехмерного многообразия Калаби-Яу, с которым мы часто имеем дело. Они использовали общую стратегию под названием *дискретизация*, заключающуюся в том, чтобы взять объект с бесконечным числом точек, например точки, составляющие непрерывную кривую, и представить ее конечным (дискретным) числом точек, надеясь, что этот процесс, в конце концов, сойдется непосредственно на этой кривой. Хедрик и Вайсман считают, что этот процесс сходится, и хотя полученные ими результаты выглядят обнадеживающе, пока они не смогли доказать наличие сходимости.

Один из недостатков описанного метода, не имеющий отношения к анализу Хедрика и Вайсмана, связан с ограничениями современной техники: нынешним компьютерам просто не хватает мощности, чтобы рассчитать подробную метрику для шестимерных многообразий Калаби-Яу. Вычисление в шести измерениях требуют неимоверно больше операций, чем

решение четырехмерной задачи. Несомненно, компьютеры продолжают совершенствоваться, и, возможно, они вскоре станут достаточно мощными, чтобы выполнять вычисления и для шести измерений.

Между тем, существует другой метод, который меньше зависит от вычислительных ограничений. Его начало было положено еще в 1980-е годы, когда я предположил, что риччи-плоскую метрику всегда можно аппроксимировать, поместив (или, говоря техническим языком, – «вложив») многообразие Калаби-Яу в опорное пространство очень высокой размерности. Такое опорное пространство называется *проективным пространством*, и оно напоминает комплексный вариант плоского евклидова пространства, за исключением того, что оно компактно. При размещении, например, многообразия в большем пространстве, подпространство автоматически наследует метрику (которая называется *индуцированной метрикой*) из опорного пространства. Аналогичная ситуация наблюдается, если поместить сферу в обычное евклидово пространство – сфера примет метрику опорного пространства. Если следовать похожей аналогии, то можно также считать, что дырка в швейцарском сыре встроена в более крупное пространство.

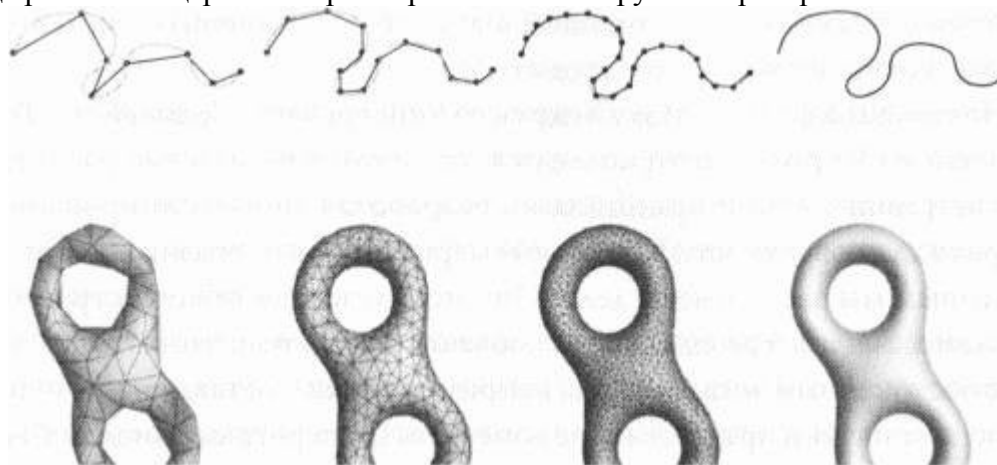


Рис. 9.5. С помощью процесса *дискретизации* можно аппроксимировать одномерную кривую и двумерную поверхность конечным числом точек. Такая аппроксимация, естественно, будет точнее при увеличении количества точек

Если мы знаем, как измерить расстояние в более крупном пространстве (большом сыре), то мы также будем знать, как измерить размер дырки. В этом смысле вложенное пространство, или дыра, наследует метрику из «сырного» опорного пространства, в котором она находится. В 1950-е годы Джон Нэш доказал, что если поместить римановы многообразия в пространство с достаточно большим количеством измерений, то можно получить любую желаемую индуцированную метрику. Но теорема Нэша о вложении, являющаяся одной из самых великих работ этого знаменитого математика, применима к действительным многообразиям, помещенным в действительное пространство. В общем случае, комплексный вариант теоремы Нэша неверен. Но я считал, что комплексная версия этой теоремы может быть верной при определенных обстоятельствах. Например, я аргументировал, что большой класс кэлеровых многообразий может быть вложен в проективное пространство высокой размерности таким образом, что индуцированная метрика будет сколь угодно близка к исходной метрике при условии, что индуцированная метрика соответствующим образом масштабирована или «нормализована», то есть все ее векторы умножены на константу. Будучи специальным случаем кэлеровых многообразий, многообразия Калаби-Яу с риччи-плоской метрикой удовлетворяют этому топологическому условию. Это означает, что можно всегда индуцировать риччи-плоскую метрику, и ее можно всегда аппроксимировать путем вложения многообразия в опорное или проективное пространство со значительно большей размерностью.

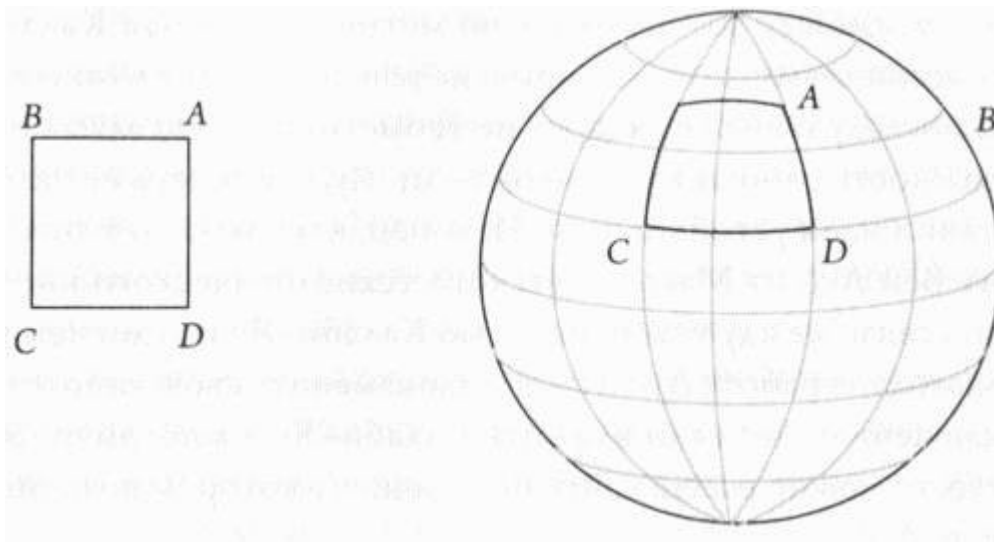


Рис. 9.6. В геометрии часто говорят о «вложении» объекта или пространства в «опорное пространство» высокой размерности. В данном случае мы вложили квадрат, то есть одномерный объект, поскольку он состоит из изогнутого несколько раз отрезка прямой, в двумерное опорное пространство – сферу

Ганг Тиан, будучи в то время моим аспирантом, доказал это в статье, вышедшей в 1990 году, которая фактически была его диссертационной работой. С тех пор к моему исходному утверждению было добавлено несколько важных уточнений, включая диссертацию еще одного моего аспиранта Вей-Донг Руана о том, что возможна более точная аппроксимация риччи-плоской метрики. Главное уточнение было посвящено способу вложения многообразия Калаби-Яу в опорное пространство. Нельзя сделать это бессистемно. Идея состоит в том, чтобы выбрать соответствующее вложение так, чтобы индуцированная метрика была наиболее близка к риччи-плоской метрике. Для этого следует поместить многообразие Калаби-Яу на возможно лучшее место, так называемую сбалансированную позицию, которая является той позицией среди всех возможных, где наследуемая метрика приближается вплотную к риччи-плоской.

Понятие сбалансированной позиции ввели в 1982 году Петер Ли и я для случая подмногообразия (или подповерхностей) на сфере, находящейся в действительном пространстве. Затем мы пошли дальше – к общему случаю подмногообразия в сложном опорном (или проективном) пространстве со множеством измерений. В те годы Жан-Пьер Бургиньон, являющийся в настоящее время директором Института высших научных исследований, начал с нами сотрудничество, которое вылилось в 1994 году в совместную статью по этой теме.

Ранее на конференции по геометрии в Калифорнийском университете в Лос-Анджелесе я предположил, что каждое кэлерово многообразие, допускающее риччи-плоскую метрику, включая Калаби-Яу, является устойчивым, но такое понятие *устойчивости* сложно определить. На последующих семинарах по геометрии я продолжал подчеркивать важность работы Бургиньона-Ли-Яу, как теперь ее называют, в отношении идеи устойчивости. Наконец, несколько лет спустя мой аспирант Вей Луо из Массачусетского технологического института установил связь между устойчивостью Калаби-Яу и условием равновесия. Благодаря работе Луо я смог видоизменить свою гипотезу, придя к заключению, что если вложить Калаби-Яу в многомерное пространство, то можно всегда найти положение, в котором позиция будет равновесной.

Саймон Дональдсон доказал, что эта гипотеза является верной. Его доказательство также подтвердило суть этой новой схемы аппроксимации: если вложить Калаби-Яу в высокоразмерное опорное пространство и выполнить условие равновесия, то метрика будет значительно ближе к риччи-плоской. Дональдсон доказал это, показав, что индуцированные метрики образуют последовательность в опорных пространствах увеличивающейся

размерности и что эта последовательность сходится, стремясь к идеальной риччи-плоской метрике при стремлении числа измерений к бесконечности. Однако это заявление справедливо лишь постольку, поскольку верна гипотеза Калаби: когда Дональдсон продемонстрировал, что эта метрика сходится к риччи-плоской метрике, его доказательство опиралось на существование риччи-плоской метрики.

Доказательство Дональдсона имело также и практические результаты, поскольку он показал, что существует лучший способ выполнения встраивания – равновесный метод. Разрешение проблемы таким способом дает средства ее решения и возможную стратегию для вычислений. В 2005 году Дональдсон применил этот метод, численно получив метрику для К3-поверхности, а также показав, что не существует фундаментальных препятствий для использования этого метода в случае увеличения числа измерений.¹⁶⁶ В 2008 году Майкл Дуглас с сотрудниками в своей статье, основанной на работе Дональдсона, получили численными методами метрику для семейства шестимерных многообразий Калаби-Яу – вышеупомянутой квинтики.

В настоящее время Дуглас сотрудничает с Брауном и Оврutom в вопросах вычисления метрики для многообразия Калаби-Яу в их модели. Пока никто не смог вычислить константы связи или массы. Но Оврута привлекает перспектива вычисления масс частиц. «Не существует способа выведения этих величин из самой Стандартной модели, – говорит он, – но теория струн, по крайней мере, предлагает возможность, которой никогда не было ранее». Не все физики согласны с тем, что эта цель достижима, однако Оврут считает, «что дьявол кроется в деталях. Нам еще предстоит вычислить константы взаимодействия Юкавы и массы, которые могут оказаться полностью неверными».¹⁶⁷

Канделас считает маловероятным, что современные модели окажутся конечной моделью Вселенной. Он придерживается мнения, что при попытке создать такую модель можно получить «много верных подтверждений. Но если углубиться в эти модели, то рано или поздно окажется, что в них что-то не работает».¹⁶⁸ Не стоит считать современные модели последним словом, лучше рассматривать их как часть общего процесса изучения природы, в ходе которого разрабатываются важные инструментальные средства. Все сказанное относится и к работам по реализации Стандартной модели, включающей браны, орбиобразия или торы, ни одна из которых не доведена до конца.

Но Строминджер считает, что прогресс налицо. «Люди находят все больше и больше моделей, а некоторые из этих моделей подходят все ближе к тому, что мы наблюдаем вокруг нас. Но мы еще не видели как “баскетбольный мяч летит через всю площадку”. Именно этого мы ждем с нетерпением».¹⁶⁹ Используя еще одну аналогию со спортом, Строминджер сравнил статью 1985 года о компактификации Калаби-Яу, написанную им совместно с Канделасом, Горовицом и Виттенем, с попаданием мяча для гольфа в лунку, находящуюся на расстоянии двух сотен ярдов. «Было чувство, что необходим еще только один удар, чтобы попасть в лунку. Но прошло уже два десятилетия, а физики все еще пытаются это сделать», – говорит он.¹⁷⁰

«Двадцать пять лет – это большой срок для теоретической физики, и только сейчас заметно явное продвижение вперед, – говорит Канделас. – Мы, наконец, достигли стадии, когда люди могут делать что-то практическое с этими новыми идеями».¹⁷¹

Прекрасно осознавая, что исследователи добились значительных успехов, Аллан Адамс (Массачусетский технологический институт) все же считает, что «неправильно предполагать, будто близость к Стандартной модели означает, что мы уже все сделали». «Наоборот, – утверждает он, – сложно понять, как далеко нам предстоит еще идти вперед. Хотя может показаться, что мы уже близки к нашей цели, но все еще существует “большая пропасть”

166 Simon Donaldson (Imperial College), interview with author, November 29, 2008.

167 Ovrut, interview with author, November 19, 2008.

168 Candelas, interview with author, December 1, 2008.

169 Strominger, interview with author, February 7, 2007.

170 Adrian Cho, “String Theory Gets Real – Sort Of,” *Science* 306 (November 26, 2004): 1,461.

171 Candelas, interview with author, December 1, 2008.

между Стандартной моделью и тем, где мы находимся сейчас».¹⁷²

В конце своих приключений в Стране Оз Дороти узнает, что у нее с самого начала была возможность вернуться домой. После нескольких десятилетий исследований Страны Калаби-Яу струнные теоретики и их коллеги-математики (даже те, кто вооружен разящей мощностью геометрического анализа) считают, что вернуться домой, к реалиям обычной физики, известной как Стандартная модель, а оттуда к физике, которая, как мы знаем, должна находиться еще дальше, все еще очень сложно. Если бы это можно было сделать так же легко, как закрыть глаза, щелкнуть каблуками башмачков и сказать: «Нет лучше места, чем дом»... Но тогда бы мы пропустили все самое интересное.

Десятая глава

Дальше за Калаби-Яу

Создание удачной теории похоже на бег с препятствиями. Как только вы преодолеваете один барьер, перепрыгнув его, обойдя вокруг или даже пробежав под ним, оказывается, что впереди еще много барьеров. И даже если вы успешно расчистили себе путь, оставив преграды позади, вы не знаете, как много их еще впереди и не остановит ли вас навсегда какой-либо высокий барьер. Вот так и с теорией струн и многообразиями Калаби-Яу, где нам известно по крайней мере одно препятствие, которое туманно маячит где-то впереди, но, будучи достаточно большим, может оказаться непреодолимым для блестяще выстроенной теории.

Я говорю о проблеме модулей, которая является предметом многих дискуссий и статей, а также источником неприятностей и разочарований. Как мы увидим, относительно простая на первый взгляд задача может увести нас очень далеко от стартовой точки, порой не оставляя никаких ориентиров в поле зрения.

Размер и форма любого многообразия с дырками определяются параметрами, которые называются *модулями*. Например, двухмерный тор во многих отношениях определяется двумя независимыми петлями, или окружностями, из которых одна обходит вокруг дырки, а вторая идет через нее. Модули, по определению, измеряют размер окружностей, которые, в свою очередь, управляют как размером, так и формой многообразия. Если окружность, проходящая через дырку, меньше второй окружности, то вы получаете тонкое кольцо; если больше, то вы получаете толстое кольцо с относительно маленькой дыркой в середине. Третий модуль описывает степень скрученности тора.

Так обстоят дела с тором. Многообразие Калаби-Яу, как мы уже отмечали, может иметь до пяти сотен дырок, множество многомерных окружностей и, следовательно, характеризуется большим числом модулей – от десятков до сотен. Обычно его представляют как поле в четырехмерном пространстве-времени. Поле для модуля размера присваивает число каждой точке в обычном пространстве, соответствующее размеру (или радиусу) невидимого многообразия Калаби-Яу. Поле такого сорта, которое полностью характеризуется единственным числом в каждой точке пространства, без направления, называется *скалярным полем*. Примеры скалярных полей вокруг нас: температура, влажность, атмосферное давление и т. д.

Ловушка состоит в том, что если ничто не ограничивает размер и форму многообразия, то вы полностью погружаетесь в вышеупомянутую проблему модулей, которая похоронит вашу надежду вытянуть реальную физику из геометрии. Мы столкнулись с этой проблемой, выяснив, что скалярные поля, связанные с размером и формой многообразия, являются безмассовыми полями, то есть для их изменения не требуется энергия. Другими словами, их можно беспрепятственно изменять. Попытка расчета Вселенной в этих постоянно

¹⁷² Allan Adams (MIT), interview with author, November 15, 2008.

меняющихся обстоятельствах напоминает «соревнования по бегу, где финишная черта все время движется в дюйме перед вами», – заметил физик Гэри Шуй из Висконсинского университета.¹⁷³

Но проблема еще серьезнее: мы знаем, что такие поля не могут существовать в природе. Поскольку если бы они существовали, то представляли бы собой все виды модульных безмассовых частиц, связанных со скалярными (модульными) полями, летающих вокруг со скоростью света. Эти модульные частицы взаимодействовали бы с другими частицами примерно с той же силой, как гравитоны (частицы, являющиеся переносчиками силы гравитации), и тем самым сеяли бы хаос в теории гравитации Эйнштейна. Но из того, что эта теория в том виде, в каком она описана в общей теории относительности, работает достаточно хорошо, мы можем сделать вывод, что этих безмассовых полей и частиц не существует. Помимо того что существование таких полей несовместимо с известными законами гравитации, оно еще и приводит к существованию пятой силы и, вероятно, других дополнительных сил, которые никто никогда не наблюдал.

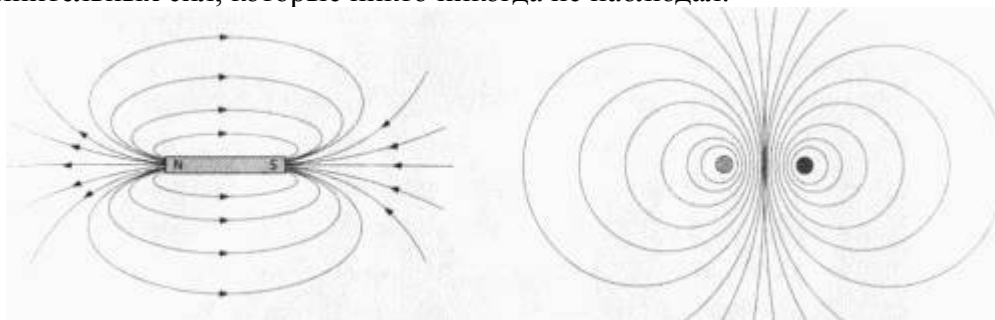


Рис. 10.1. Потоки можно рассматривать как силовые линии, не отличающиеся от показанных здесь линий магнитного поля, хотя теория струн включает и более экзотические поля, которые указывают на шесть компактных, невидимых для нас направлений

И это является камнем преткновения. Учитывая, что сегодня большая часть теории струн базируется на компактификации многообразий Калаби-Яу, содержащих эти модули со скалярными полями и безмассовыми частицами, которые, скорее всего, не существуют, не означает ли это, что теория струн сама по себе обречена?

Необязательно. Возможно, существует способ обойти указанную проблему, если учесть другие элементы теории, о которых мы уже знаем, но которые не принимали во внимание, чтобы упростить вычисления.

Если включить эти элементы в расчеты, то ситуация будет выглядеть совершенно по-другому. Эти дополнительные компоненты включают в себя элементы, называемые *потоками*, представляющими собой поля, подобные электрическим и магнитным, хотя новые поля из теории струн не имеют ничего общего ни с электронами, ни с фотонами.

Давайте снова рассмотрим двухмерный тор, и в частности текучее кольцо, форма которого постоянно меняется, и кольцо становится то тонким, то толстым. Мы можем стабилизировать этот тор, зафиксировав его форму путем оборачивания проволоки сквозь дырку и вокруг нее. Здесь существенную роль играет поток. Многие из нас видели аналогичный эффект, когда после включения магнитного поля железные опилки, рассеянные беспорядочным образом, образуют правильный узор. Поток удерживает опилки на месте до тех пор, пока приложенная к ним дополнительная энергия не заставит их двигаться. Точно так же наличие потоков в нашем случае означает, что для изменения формы многообразия требуется дополнительная энергия, поскольку скалярные безмассовые поля становятся скалярными полями с массой.

¹⁷³ Gary Shiu, quoted in Adrian Cho, “String Theory Gets Real – Sort Of” *Science* 306 (November 26, 2004): 1,461.

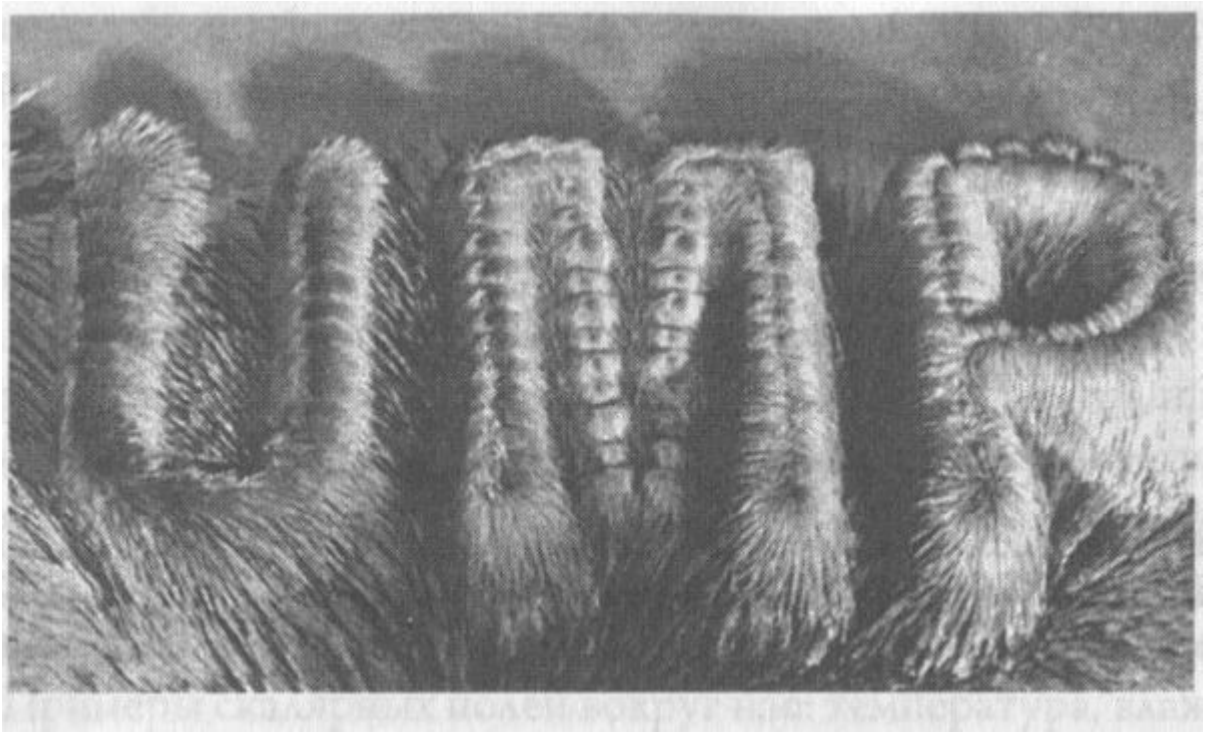


Рис. 10.2. Так же как мы можем фиксировать и стабилизировать расположение железных опилок путем приложения к ним магнитного потока, мы, в принципе, можем стабилизировать форму и размер многообразия Калаби-Яу, включив разные потоки в теорию струн (фото любезно предоставлено TechnoFrolics, www.technofrolics.com)

Конечно, шестимерные многообразия Калаби-Яу сложнее, так как они имеют намного больше «дырок», чем «бублик», и сами дырки могут иметь более высокую размерность (до шести измерений). Это означает, что здесь больше внутренних направлений, в которых может течь поток, что приводит к увеличению количества возможных путей прохождения линий поля через дырки. Теперь, когда у нас есть все потоки, проходящие через ваше многообразие, мы можем рассчитать, какое количество энергии запасено в сопутствующих полях. Стэнфордский физик Шамит Качру объяснил, что для расчета энергии необходимо взять интеграл от квадрата напряженности поля «по точной форме компактифицированных измерений», или по поверхности Калаби-Яу. Итак, вы делите пространство на бесконечно малые участки, определяете квадрат напряженности поля на каждом участке, складываете все значения, делите на число участков и получаете среднее значение, или интеграл. «Поскольку форма меняется, то изменяется и значение общей энергии поля, – говорит Качру, – многообразие выбирает такую форму, чтобы минимизировать энергию потока этого поля».¹⁷⁴ Вот так, путем включения потоков в картину можно стабилизировать форму модулей и таким образом стабилизировать форму самого многообразия.

Но это только часть истории, ведь мы забыли об одном важном аспекте процесса стабилизации. Подобно магнитному и электрическому полю, потоки в теории струн квантуются, то есть принимают только целые значения. Вы можете добавить одну единицу потока или две единицы потока, но не можете добавить 1,46 единицы потока. Когда мы говорим, что потоки стабилизируют модуль, мы подразумеваем, что они накладывают на значения модуля определенные ограничения. Вы не можете присвоить модулю любое выбранное значение, а только те значения, которые соответствуют дискретным потокам. В результате набор возможных форм многообразия Калаби-Яу оказывается дискретным.

В предыдущей главе мы уделили много времени гетеротической версии теории струн, но оказывается, что ввести потоки в гетеротические модели довольно сложно. К счастью, в теории струн типа II (категории, включающей оба типа – IIA и IIB), которая иногда является

¹⁷⁴ Shamit Kachru (Stanford University), e-mail letter to author, December 6, 2008.

дуальной по отношению к гетеротической теории, это сделать гораздо проще.

Я немного остановлюсь на анализе 2003 года, выполненном в теории струн типа IIB, который заметно выделяется из других типов.

Мы только что обсудили стабилизацию модуля формы для многообразия с потоками. Впервые последовательный способ стабилизации всех модулей Калаби-Яу, как модулей формы, так и модулей размера, был представлен в статье Шамита Качру, Ренаты Каллош, Андрея Линде (все из Стэнфорда) и Сандипа Триведи из Института фундаментальных исследований в Индии; предлагаемый подход авторы статьи назвали KKLT – по первым буквам своих фамилий. Стабилизация размера является решающим фактором для любого типа теории струн, основанной на многообразиях Калаби-Яу, потому что в противном случае нет ничего, способного удержать шесть скрытых измерений от разворачивания до бесконечно большого размера, то есть до того размера, который мы предполагаем для основных четырех измерений. Если маленькие, невидимые измерения неожиданно распрямятся и расширятся, то мы с вами будем жить в пространстве-времени из десяти больших измерений, с десятью независимыми направлениями для движения или для поиска наших потерянных ключей, а мы знаем, что наш мир не похож на десятимерный (что дает нам слабую надежду найти потерянные ключи). Что-то удерживает эти измерения от разворачивания и что-то, согласно авторам подхода KKLT, является D-бранами.¹⁷⁵

Стабилизацию шестимерного Калаби-Яу бранами можно сравнить с ограничением размера автомобильной камеры путем надевания на нее армированной стальным кордом шины. Подобно тому как шина удерживает камеру, когда вы закачиваете в нее воздух, так и браны удерживают многообразия от расширения.

«Говорят, что форма и размер объекта стабилизируются, если вы пытаетесь изменить его, но что-то противодействует вашим попыткам, – объясняет физик Раман Сандрам из Университета Джона Хопкинса. – Наша задача заключалась в создании компактного, стабильного пространства-времени, и подход KKLT показал нам, как это сделать, причем не одним, а множеством разных способов».¹⁷⁶

Стабильные объем и размер крайне важны для объяснения такого явления, как космическая инфляция, суть которой состоит в том, что все свойства наблюдаемой нами сегодня Вселенной являются результатом краткого, но ускоренного, экспоненциального расширения ее в начальный период Большого взрыва. Это ускоренное расширение в соответствии с теорией черпало энергию из так называемого инфляционного поля, которое снабжало Вселенную положительной энергией, приводившей в действие процессы расширения. «В теории струн мы предполагаем, что положительная энергия должна возникать из определенного вида десятимерных источников, обладающих тем свойством, что по мере того как компактное [Калаби-Яу] пространство становится больше, связанная с ним энергия становится меньше», – говорит Лиам Макаллистер из Корнеллского университета. Если предоставить природе самой себе, то все поля будут пытаться раздуться и стать разреженными. «По сути это означает, что система “счастливее”, когда внутреннее пространство больше, а энергия – меньше, – говорит он. – Система может уменьшить свою энергию путем расширения и свести ее к нулю, расширившись до бесконечности».¹⁷⁷ Если ничто не сдерживает внутреннее пространство от расширения, то так и будет.

Когда это происходит, то энергия, которая в иных обстоятельствах запускает инфляцию, рассеивается так быстро, что процесс расширения остановится раньше, чем начнется. По сценарию KKLT браны обеспечивают возможный механизм для образования Вселенной, которую мы видим, – Вселенной, на которую инфляция оказала достаточно сильное влияние.

В нашу задачу не входило воспроизведение Стандартной модели или подробное обсуждение физики элементарных частиц, но скорее широкое представление качественных

175 Shamit Kachru, Renata Kallosh, Andrei Linde, and Sandip Trivedi, “De Sitter Vacua in String Theory,” *Physical Review D* 68 (2003).

176 Raman Sundrum (Johns Hopkins University), interview with author, February 22, 2007.

177 Liam McAllister (Cornell University), interview with author, November 12, 2008.

характеристик нашей Вселенной, включая аспекты космологии, которая сейчас, вероятно, является самой всеобъемлющей дисциплиной из всех.

Дело в том, что в конце нашего обсуждения мы хотим получить теорию, которая работает на всех масштабах – и в физике элементарных частиц, и в космологии. В дополнение к предположениям ККЛТ относительно того, как инфляция может работать в теории струн, в 2002 году была опубликована статья Качру, Стива Гиддингса и Джозефа Полчински (последние двое из университета Калифорнии в Санта-Барбаре), в которой показано, как теория струн может объяснить очевидную слабость гравитации, которая в триллион триллионов триллионов раз слабее электромагнитных сил. Согласно теории струн это можно объяснить отчасти тем, что гравитация пронизывает все десять измерений, которые «разбавляют» ее силу. Но в сценарии Гиддингса-Качру-Полчински (Giddings-Kachru-Polchinski, GKP) этот эффект ослабления экспоненциально усилен за счет геометрического деформирования, которое мы позже обсудим в данной главе. Объяснение построено на искривленной геометрической модели, впервые описанной в теории поля Лайзой Рэндалл из Гарварда и Раманом Сандрамом и позже введенной в теорию струн GKP, а также в последующую работу ККЛТ.

Продолжив исследования, авторы ККЛТ показали в рамках теории струн, как наша Вселенная могла снабжаться положительной энергией вакуума, иногда называемой темной энергией, существование которой стало очевидным благодаря измерениям, проводимым с конца 1990-х годов. Мы не можем дать детальное описание технически сложного механизма передачи энергии, который подразумевает помещение объекта, называемого антибраной (антивещество, противоположное бране) в деформированную область Калаби-Яу, например, на вершину конифолда – некомпактного, конического по форме выступа, простирающегося от «тела» многообразия. Во всяком случае, точные детали не столь важны, так как их исследование никогда не предполагало нахождения окончательного ответа на любой из этих вопросов. Качру пояснил, что «цель ККЛТ заключалась в создании “игрушечной” модели, с помощью которой теоретики могли бы изучить явление, хотя здесь возможны и другие конструкции».¹⁷⁸

Суть в том, что если работа по стабилизации модулей и исследования в области физики элементарных частиц успешно продвигаются вперед, то потенциально, согласно Макаллистеру, физики могут «иметь все. Если вы возьмете многообразие Калаби-Яу и бросите в него D-браны и потоки, то вы можете получить все ингредиенты для получения Стандартной модели, инфляции, темной энергии и другие вещи, с помощью которых мы можем объяснить наш мир».¹⁷⁹

В конце концов, авторы статьи ККЛТ, объяснив, как можно стабилизировать модули, показали, как можно ограничить само многообразие Калаби-Яу до четкого набора стабильных или квазистабильных форм. Это означает, что вы можете выбрать многообразие Калаби-Яу конкретного топологического типа, найти способы снабдить его потоками и бранами и точно рассчитать возможные конфигурации. Беспокоит то, что, когда вы произведете все расчеты, результат может устроить не всех, потому что число возможных конфигураций будет абсурдно большим, до 10.

Эта цифра далеко не точная, она призвана обеспечить приблизительное представление о числе возможных вариантов, которые вы можете получить для многообразия Калаби-Яу со множеством дырок. Давайте снова рассмотрим тор с потоком, навитым сквозь дырку с целью его стабилизации. Поскольку поток квантуется, в дальнейшем мы будем предполагать, что он может принимать целые значения от 0 до 9, что эквивалентно существованию десяти стабильных форм для тора. Если бы у нас был тор с двумя дырками и через каждую из них мог проходить поток, то тор имел бы 10^{5002} , или 100 стабильных форм. Очевидно, что шестимерное многообразие Калаби-Яу предлагает намного больше вариантов. «Число 10^{500} получено путем математического расчета, где учитывали максимальное возможное число

178 Kachru, interview with author, September 8, 2007.

179 Liam McAllister (Princeton University), interview with author, February 20, 2007.

дырок в многообразии (порядка пятисот) и предполагали, что через каждую дырку можно провести поля или потоки, которые могут находиться в одном из десяти возможных состояний, – объясняет Полчински, один из тех, кому обязано появлением это число. – Расчет действительно грубый. Число может быть намного больше или намного меньше, но оно не бесконечно».¹⁸⁰

Что это за цифра и что она означает? Во-первых, это означает, что в силу топологической сложности многообразий Калаби-Яу уравнения теории струн имеют большое количество решений. Каждое из этих решений соответствует многообразию Калаби-Яу со своей геометрией, что, в свою очередь, подразумевает разные элементарные частицы, разные физические постоянные и т. д. Кроме того, поскольку многообразия Калаби-Яу по определению являются решениями уравнений Эйнштейна для вакуума, каждое из этих решений, которое включает различные способы введения потоков и бран, соответствует вселенной с разным вакуумным состоянием и, следовательно, различной энергией вакуума.

И вот парадокс: многие теоретики верят, что все эти вселенные действительно могут существовать.

Что же за картина вырисовывается? Представьте себе мяч, катящийся без трения по огромной ровной поверхности. Для мяча не существует предпочтительного положения – он может катиться в любом направлении без затрат энергии. Это похоже на ситуацию с нестабилизированным модулем и безмассовыми скалярными полями. А теперь давайте представим, что эта поверхность не совсем гладкая, а имеет несколько углублений, в которые мяч может попасть и застрять, не имея энергии, чтобы выбраться из ямки. Подобная ситуация имеет место, когда модули стабилизированы; каждое из углублений на поверхности соответствует различному решению теории струн – отдельному Калаби-Яу, занимающему отдельное вакуумное состояние. Поскольку мы имеем большое число возможных решений, такой «ландшафт», содержащий различные вакуумные состояния, огромен.

Конечно, это понятие, называемое *ландшафтом теории струн*, является чрезвычайно противоречивым. Одни ученые принимают картину с множеством вселенных, другие отрицают, а некоторые (включая меня) считают это понятие спекулятивным. Иногда возникает вопрос о практической ценности данной теории, которая предлагает больше решений, чем мы можем классифицировать. Следом возникает еще вопрос: а существует ли какой-либо способ обнаружить все эти возможные вселенные, разбросанные по всему ландшафту? Больше беспокоит то, что идея ландшафта становится тесно связанной с так называемыми антропными аргументами.

Космологическая константа для нашей Вселенной, рассчитанная из данных последних астрономических наблюдений, по-видимому, должна быть очень маленькой, примерно в 10 раз меньше, чем значение, предсказанное лучшими физическими теориями. Никто не может объяснить это расхождение или тот факт, что константа имеет чрезвычайно маленькое значение. Но что, если все 10^{120500} или примерно столько вакуумных состояний в ландшафте действительно где-то реализованы и каждое представляет собой отдельную вселенную или подвселенную со своей внутренней геометрией (или Калаби-Яу) и своей космологической константой? Среди всех этих вариантов, по крайней мере, одна из подвселенных обязательно имеет низкую космологическую постоянную, как у нас. И поскольку мы должны где-то жить, то это и есть там, где мы и обитаем. Но это не бессмысленная удача, потому что мы не можем жить во вселенной с большой космологической постоянной, так как в этом случае расширение происходило бы так быстро, что звезды, планеты и даже молекулы никогда не смогли бы образоваться. Вселенная с большой отрицательной космологической постоянной быстро сжалась бы в ничто или до сильной сингулярности. Другими словами, мы живем во вселенной такого вида, в которой мы можем жить.

180 Joe Polchinski (University of California, Santa Barbara), interview with author, February 6, 2006.

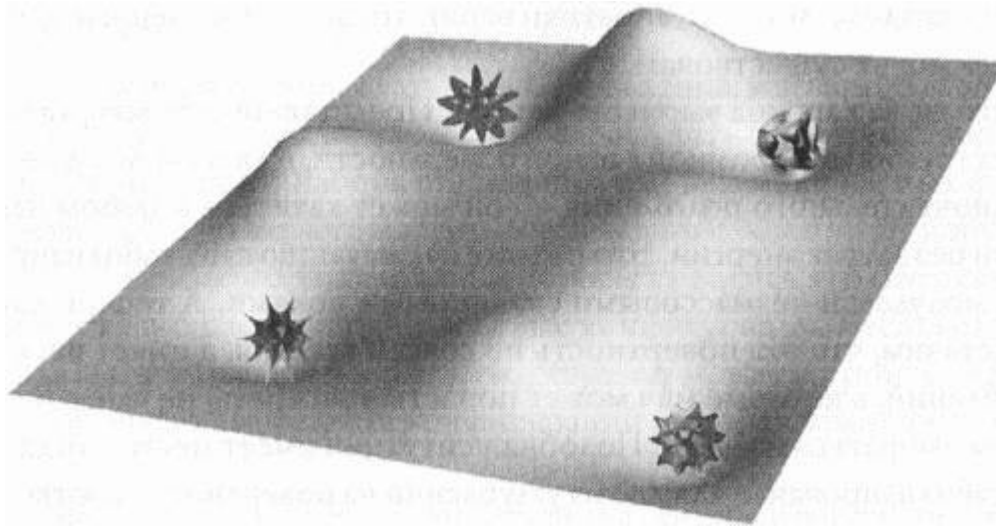


Рис. 10.3. Энергия пустого пространства, также называемая энергией вакуума, может принимать огромное число возможных значений, которые представляют стабильные или полустабильные решения уравнений теории струн. Понятие ландшафта теории струн было придумано, в частности, для того, чтобы наглядно показать, что теория имеет много возможных решений, соответствующих многим вакуумным состояниям, или *ложным вакуумом*, – каждое из которых может представлять другую вселенную. Стабильное состояние ложного вакуума на этом рисунке представлено впадинами, или долинами, куда могут попасть и остаться там шары, которые скатываются вниз с горы в разных направлениях. Высота этих впадин соответствует энергии вакуума, принятой для каждого участка ландшафта. Некоторые теории предполагают, что может быть порядка 10^{500} решений, каждое из которых соответствует своему многообразию Калаби-Яу и, следовательно, своей геометрии для компактных измерений. Пространства Калаби-Яу являются неотъемлемой частью этой картины, так как, по мнению ученых, суммарная вакуумная энергия поддерживает шесть дополнительных измерений теории струн, свернутых в таких пространствах, не позволяя им расширяться до бесконечности (изображения пространства Калаби-Яу любезно предоставлены Эндрю Дж. Хансоном (Andrew J. Hanson), Университет Индианы)

Физик Дэвид Гросс сравнил антропные аргументы такого рода с тараканами, которых необходимо уничтожать. «Если вас одолели тараканы, вы не можете избавиться от них», – пожаловался он на космологической конференции.¹⁸¹

Стэнфордский физик Бартон Рихтер говорит, что энтузиасты ландшафта, такие как его стэнфордский коллега Леонард Зюскинд «отказались от этой идеи. Для них путешествие, которое завело физиков так далеко, подошло к концу, – пишет Рихтер в *New York Times*. – Поскольку они верят в эту идею, я не могу понять, почему они не возьмутся еще за что-нибудь, например за макраме».¹⁸²

«Нам не удастся избавиться от множества решений теории струн, – замечает Зюскинд, – поэтому нравится вам это или нет, ландшафт остается». Поскольку это так, то лучше с ним заключить мир и проверить, есть ли что-нибудь полезное, что можно из него извлечь. «Дорога физики усеяна трупами упрямых стариков, которые не знали, когда пора сдаваться», – пишет он в своей книге «Космический ландшафт» (*The Cosmic Landscape*), осознавая, что он также может быть «упертым стариком, сражающимся до конца».¹⁸³

Справедливости ради следует сказать, что споры возникали постоянно. Я никогда не принимал участия в дискуссии, от которой, вероятно, получил бы удовольствие будучи

181 David Gross, quoted in Dennis Overbye, “Zillions of Universes? Or Did Ours Get Lucky?” *New York Times*, October 28, 2003.

182 Burton Richter, “Randall and Susskind,” letter to editor, *New York Times*, January 29, 2006.

183 Leonard Susskind, *The Cosmic Landscape* (New York: Little Brown, 2006), pp. 354–355.

математиком. Мне не приходится давать материал, который угрожает подорвать сообщество физиков. Вместо этого я имею возможность сидеть в стороне и задавать обычные вопросы типа: как математика может пролить свет на эту ситуацию?

Некоторые физики вначале надеялись на то, что только одно многообразие Калаби-Яу может характеризовать скрытые измерения теории струн, но скоро стало понятно, что существует большое число таких многообразий, каждое из которых имеет свою уникальную топологию. В рамках каждого топологического класса существует непрерывное, бесконечно большое семейство многообразий Калаби-Яу. Это положение, вероятно, легче всего проиллюстрировать с помощью торов. Тор представляет собой топологический эквивалент прямоугольника. Если скатать прямоугольный лист в цилиндр и соединить концы, то получится тор. Прямоугольник определяется высотой и шириной, которые могут принимать бесконечное число возможных значений. Все эти прямоугольники и соответствующие им торы являются топологически эквивалентными.

Они представляют собой часть одного и того же семейства, но их может быть бесконечное множество. То же справедливо для многообразий Калаби-Яу. Мы можем взять многообразие, модифицировать его «высоту», «ширину» и другие параметры и получить бесконечное семейство многообразий одного и того же топологического типа. Таким образом, KKLT и связанная с ним концепция ландшафта не меняет эту ситуацию. В лучшем случае, наложение ограничений из физики, то есть обязательное квантование потоков, привело к очень большому, но конечному, а не бесконечному, числу многообразий Калаби-Яу. Я полагаю, что это уже можно считать прогрессом.

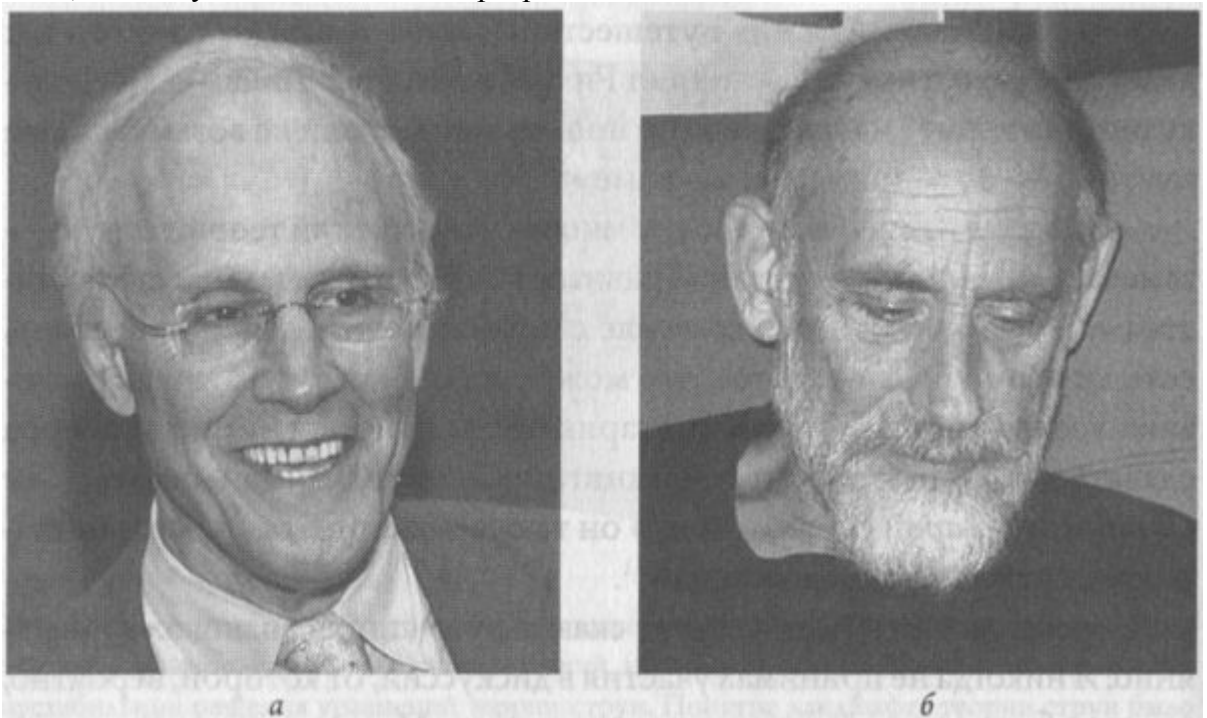


Рис. 10.4. Две стороны, представляющие спор о ландшафте: *a* – физик Дэвид Гросс из Санта-Барбары и *б* – физик Леонард Зюскинд из Стэнфорда (фото Зюскинда предоставила Анна Воррен (Anne Warren))

Лично я далек от мысли, что существует одно «данное богом» многообразие Калаби-Яу или только несколько. Я всегда допускал, что все гораздо сложнее. В конце концов, еще никто не говорил, что достичь дна Вселенной и наметить ее внутреннюю геометрию легко.

Итак, что мы можем сделать с идеей ландшафта, которая так тревожит некоторых ученых? Я полагаю, что можно просто проигнорировать ее, так как ничего нельзя установить и доказать. Одни физики считают концепцию полезной, в то время как другие не видят в ней никакой пользы. Поскольку само понятие ландшафта теории струн возникло из рассмотрения бесчисленного количества состояний, многие из которых, если не все, связаны с

многообразиями Калаби-Яу, то если мы вообще придаем какое-то значение этой идее с ландшафтом, нам необходимо лучше разобраться в многообразиях Калаби-Яу.

Я сознаю, что мое заявление звучит несколько наивно. Существует множество возможных решений для теории струн и множество возможных геометрий, исходя из которых можно компактифицировать дополнительные измерения, и многообразия Калаби-Яу представляют только верхушку айсберга. Я хорошо понимаю ситуацию и даже работаю над некоторыми из этих новых областей физики. Тем не менее большей части успехов, достигнутых в теории струн, и большей части гипотез мы обязаны использованием многообразий Калаби-Яу как модели. Кроме того, часть альтернативных геометрий, которые сейчас исследуются, такие как не-кэлеровы многообразия, получают путем деформирования или искривления многообразий Калаби-Яу. Не существует прямого и быстрого пути к не-кэлеровым геометриям, поэтому мы должны разобраться в многообразиях Калаби-Яу прежде, чем приступить к изучению таких вещей, как не-кэлеровы многообразия. Это обычная стратегия для всех областей исследования: вы ставите базовый лагерь, который служит знакомой точкой отправления, а затем отправляетесь в неизвестное.

Примечательно, что, несмотря на количество исследований в этой области с момента, как я доказал существование этих многообразий в 1976 году, появилось много простых, даже шокирующее простых вопросов, на которые мы не можем дать ответ, например сколько всего топологически различных многообразий Калаби-Яу? Их число конечно или бесконечно? И связаны ли между собой многообразия Калаби-Яу? Начнем с первого вопроса: сколько существует топологически различных видов или семейств многообразий и входит ли в них Калаби-Яу? Скажем кратко: мы не знаем, хотя попытки ответить на этот вопрос были. Более чем 470 миллионов трехмерных Калаби-Яу были созданы с помощью компьютера. Для них мы построили более чем 30 000 ромбов Ходжа, то есть по крайней мере 30 000 разных топологий. (Ромбы Ходжа, как вы помните из седьмой главы, представляют собой массивы размером 4×4 , которые суммируют основную топологическую информацию о трехмерном многообразии.) Однако число может быть значительно больше, чем 30 000, так как два многообразия могут иметь один и тот же ромб Ходжа, но отличаться по топологии.

«Никаких систематических попыток не было сделано для оценки количества топологических типов главным образом потому, что пока не удастся однозначно провести различия между такими трехмерными многообразиями, — объясняет физик Гарвардского университета Тристан Хабш. — Мы все еще не имеем четкого “идентификационного номера” для многообразия Калаби-Яу. Мы знаем, что ромб Ходжа является частью его, но он не определяет многообразие однозначно. Он больше похож на регистрационный номер автомобиля».¹⁸⁴

Мы не только не знаем, действительно ли число многообразий Калаби-Яу чуть больше или намного больше, чем 30 000, но мы даже не знаем, конечное это число или нет. В начале 1980-х годов я выдвинул гипотезу, что это число — конечное, но математик Майлз Рид из Университета Варвика придерживается противоположной точки зрения, утверждая, что оно бесконечно. Было бы неплохо узнать, кто из нас прав. «Я полагаю, что для физиков, которые надеются, что многообразий Калаби-Яу очень мало, обнаружение того факта, что это число является бесконечным, только усугубит ситуацию, — говорит Марк Гросс из Калифорнийского университета, Сан-Диего. — С математической точки зрения это не имеет значения. Мы же хотим знать ответ. Мы хотим осознать все количество многообразий Калаби-Яу. Предположение о том, что их число конечно, правильное оно или неправильное, служит своего рода мерилем нашего понимания».¹⁸⁵ А с чисто практической точки зрения, если набор многообразий является конечным, независимо от его величины, вы всегда можете взять среднее значение. Но мы не знаем, как взять среднее значение бесконечного числа объектов, и это усложняет характеристику этих объектов.

До сих пор не выдвинуто аргументов против моей гипотезы. Вероятно, все известные

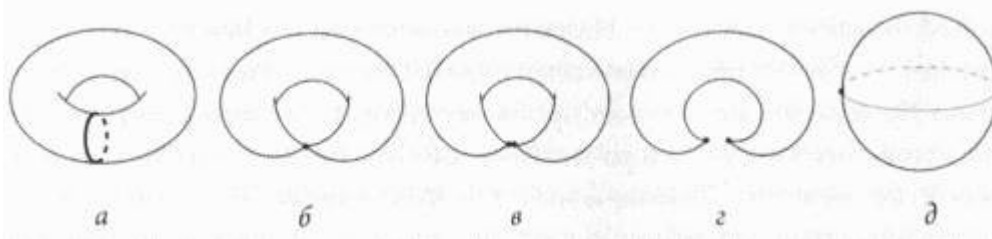
184 Tristan Hubsch (Howard University), interview with author, November 7, 2008.

185 Mark Gross (Stanford University), interview with author, October 31, 2008.

нам методы построения многообразий Калаби-Яу ведут только к конечному числу многообразий. Важно найти другие способы построения многообразий, но после двух десятков лет поисков никто не представил новый метод, ведущий к бесконечному набору многообразий. В 1993 году Марк Гросс ближе всех подошел к решению этой задачи. Он доказал, что если рассматривать Калаби-Яу как четырехмерную поверхность с двумерными бубликами, присоединенными к каждой из ее точек, то получается только конечное число поверхностей. «Подавляющее большинство известных многообразий Калаби-Яу попадают в эту категорию, которая оказывается конечным множеством», – говорит Гросс. Это главная причина, по которой он поддерживает «конечную» гипотезу. С другой стороны, Гросс отмечает, что множество многообразий не попадают в эту категорию, и мы безуспешно пытаемся доказать что-либо в отношении них.¹⁸⁶ Так что вопрос остается открытым.

Эта не разрешенная до конца проблема подводит нас ко второму, также нерешенному вопросу, впервые поставленному Ридом в 1987 году: существует ли способ, с помощью которого можно связать все многообразия Калаби-Яу? Или в постановке Рида: «Все эти разновидности Калаби-Яу обладают всеми видами топологических характеристик. Но если посмотреть на проблему шире, то можно заметить, что все это, возможно, одно и то же. Конечно, это безумная идея, которая, вероятно, неверна. Тем не менее...» Фактически, Рид считал идею настолько странной, что он никогда не называл ее гипотезой, предпочитая говорить вместо этого «фантазия». Но он все еще верит, что кто-то, может быть, докажет ее.¹⁸⁷

Рид допускал, что все многообразия Калаби-Яу можно связать посредством чего-то, названного им *кониформным переходом*. Идея, разработанная в 1980-е годы математиками Хербом Клеменсом из Университета Юты и Робертом Фридманом из Колумбийского университета, описывает, что происходит с многообразиями Калаби-Яу при перемещении их через особый вид сингулярности. Как всегда, концепцию легче показать на двумерном торе. Вспомним, что тор всегда можно представить как множество окружностей, присоединенных к окружности, представляющей дырку. Теперь возьмем одну из множества окружностей и сожмем ее в точку. Мы получим сингулярность, потому что любое другое место на поверхности является гладким. Итак, на этом крошечном участке, так называемой конифолдной сингулярности, два маленьких конуса сходятся вместе. Далее вы должны сделать операцию, которую математики называют хирургической и которая включает вырезание проблемной точки и замену ее двумя другими точками. Затем мы можем разделить эти две точки, разведя их так, чтобы получилась фигура, имеющая форму рогалика. Далее, мы изменим топологию рогалика, превратив его в топологический эквивалент – сферу. И на этом не будем останавливаться. Предположим, что на следующем этапе мы вытягиваем сферу так, что она снова становится похожей на рогалик. Затем мы соединяем концы рогалика с получением тора, но при этом дополнительно перекручиваем сферу. Таким образом, мы получаем тор с другой топологией и двумя дырками вместо одной. Если мы будем продолжать этот процесс неопределенно долгое время, включая дополнительные перекручивания или дырки, то мы, в конце концов, получим все возможные двумерные торы. Следовательно, конифолдный переход представляет собой способ связывания топологически разных торов через промежуточную форму (в нашем случае сферу) и эта общая процедура работает и для других нетривиальных видов многообразий Калаби-Яу.



¹⁸⁶ Gross, interview with author, September 19, 2008.

¹⁸⁷ Miles Reid (University of Warwick), interview with author, August 12, 2007.

Рис. 10.5. Конифолдный переход представляет собой процесс изменения топологии. В этом сильно упрощенном примере мы начинаем с бублика, сделанного из маленьких окружностей, и сжимаем одну из них в точку. Эта точка представляет собой вид сингулярности, где две формы, напоминающие конусы, сходятся вместе. Конусовидная сингулярность этого рода называется *конифолд*. Посредством математической версии хирургической операции мы заменяем эту сингулярную точку двумя точками и затем разводим их в стороны, чтобы бублик превратился в рогалик. Затем мы расширяем рогалик, чтобы получить объект, подобный сфере. Таким образом, мы перешли от бублика к топологически другому объекту – сфере

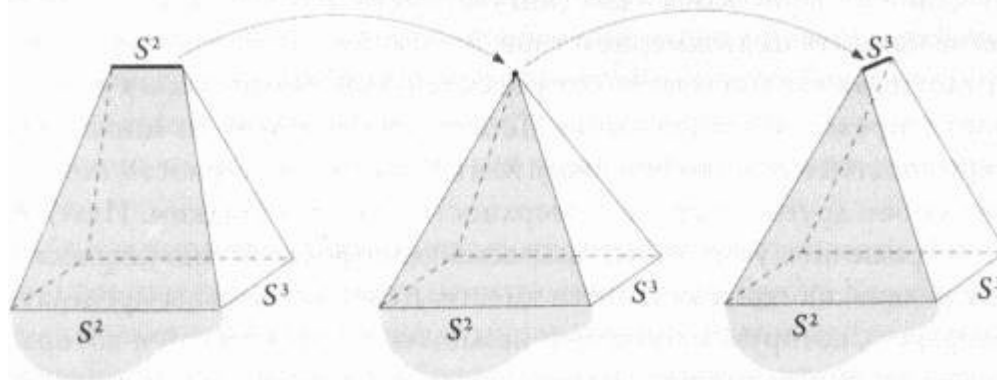


Рис. 10.6. Здесь представлен другой способ конифолдного перехода. Мы начинаем наши действия с многообразия Калаби-Яу, расположенного слева. Это шестимерный объект, потому что он имеет пятимерную основу, будучи декартовым произведением двухмерной сферы (S^2) и трехмерной сферы (S^3), плюс одно дополнительное измерение для высоты. Эта поверхность Калаби-Яу – элегантная и гладкая, потому что на вершине находится двухмерная сфера (S^2). Если сжать поверхность до точки, то мы получим промежуточное изображение – пирамиду. Точка на самом вершине пирамиды представляет собой сингулярность – конифолд. Если мы выровняем верхушку, раздув точку в трехмерную сферу (S^3), а не в двухмерную (S^2), с которой мы начали, то мы придем к третьей модели – многообразию М. Суть идеи в том, что конифолдная сингулярность служит своего рода мостиком от одного многообразия Калаби-Яу к другому (перенесено, с разрешения, с рисунка Тристана Хабша)

Шестимерные многообразия Калаби-Яу не так просты. На нашем рисунке конифолдного перехода, предложенного Клеменсом, вместо сжатия окружности до точки мы сжали двухмерную сферу. Мы допускаем, что каждое компактное многообразие Калаби-Яу имеет по крайней мере одну двухмерную сферу особого рода, расположенную внутри. Японский математик Сигефуми Мори доказал, что кэлеровы многообразия с положительной кривизной Риччи имеют, по крайней мере, одну такую подповерхность, и мы ожидаем, что это условие также применимо к многообразиям Калаби-Яу с риччи-плоской метрикой. Каждое известное нам многообразие Калаби-Яу имеет двухмерную сферу, так что наша интуиция нас не подвела. Но у нас все еще нет доказательства для многообразий Калаби-Яу с риччи-плоской метрикой. После сжатия нашей двухмерной сферы в точку мы можем заменить эту точку сжатой трехмерной сферой, которую затем можно снова расширить.

Если наше предыдущее допущение верно, то после такой операции многообразие больше не является кэлеровым, поскольку оно больше не имеет двухмерной сферы и, следовательно, не может быть многообразием Калаби-Яу. Это уже что-то другое – не-кэлерово многообразие. Продолжая конифолдный переход, мы можем взять не-кэлерово многообразие, вставить другую двухмерную сферу (где мы предварительно вставили трехмерную сферу) и получить другое многообразие Калаби-Яу.

Хотя не Рид придумал конифолдный переход, он первым увидел, как его можно использовать для установления связи между всеми многообразиями Калаби-Яу. Важно, что конифолдный переход состоит в получении из одной поверхности Калаби-Яу другой, причем

геометрия должна пройти через промежуточную стадию, на которой переходная форма представляет собой не-кэлерово многообразие. Неужели все не-кэлеровы многообразия связаны в том смысле, что из одного можно вылепить другое посредством сжатия, растяжения или вытягивания? Да, действительно, в этом и есть суть гипотезы Рида. Представьте себе гигантский кусок швейцарского сыра с бесчисленными крошечными дырками, или пузырьками. Алан Адамс говорит, что если вы живете в одном пузырьке, то вы не уйдете далеко, не столкнувшись с границей. «Но если вы не возражаете идти через сыр, то сможете попасть из одного пузырька в другой. Рид выдвинул гипотезу, что конифолдный переход может провести вас через сыр (не-кэлерову часть) в другой пузырек», кэлерову часть, которая и представляет собой многообразие Калаби-Яу.¹⁸⁸

Проведем еще одну аналогию с сыром, где основное пространство заполнено собственно сыром и немного места оставлено для крошечных пузырьков, разбросанных тут и там. Эти маленькие пузырьки похожи на маленькие кусочки кэлеровых пространств, рассеянных среди намного большего не-кэлерова пространства. В результате мы имеем огромное число не-кэлеровых пространств, где кэлеровы многообразия составляют крошечное подмножество.

Общая стратегия, лежащая в основе гипотезы Рида, придает смысл идеям Марка Гросса. Он говорит, что не-кэлеровы многообразия представляют значительно больший набор объектов и «если вы хотите видеть взаимосвязь вещей, то легче это сделать, согласившись, что они являются частью значительно большего не-кэлерова набора».¹⁸⁹

Ситуация напоминает игру «Шесть шагов до Кевина Бэйкона», участники которой должны не более чем за шесть переходов найти связь между загаданным актером и Кевином Бэйконом через актеров, вместе с которыми они снимались. Игра основана на теориях «тесного мира» и «шести рукопожатий». Адамс говорит, что аналогичную ситуацию мы наблюдаем с многообразиями Калаби-Яу. «Неужели они все соседи? Можно ли превратить одно в другое путем деформирования? Конечно, нет. Но гипотеза Рида говорит, что каждое многообразие Калаби-Яу можно деформировать во что-то еще (не-кэлерово многообразие), если знать все другие многообразия Калаби-Яу. Адамс добавляет, что можно провести аналогию с группой людей, между которыми вы пытаетесь найти что-то общее. «Нам только надо показать, что все они знают одного общительного парня и в таком случае все они являются частью одной группы – группы знакомых этого парня».¹⁹⁰

Согласуется ли предположение Рида о связанности многообразий Калаби-Яу с реальностью? В 1988 году Тристан Хабш и математик Мерилендского университета Пол Грин доказали, что гипотеза Рида применима к примерно 8000 многообразий Калаби-Яу, которые включали большую часть известных на тот момент многообразий. Последующее обобщение этой работы показало, что более чем 470 миллионов конструкций Калаби-Яу, почти все известные трехмерные многообразия, связаны между собой способом Рида.¹⁹¹

Конечно, мы не можем утверждать, что гипотеза справедлива во всех случаях, пока мы это не доказали. И более чем через двадцать лет после того, как Рид выдвинул свою гипотезу, ее доказательство представляет большую трудность. Я полагаю, что большая часть проблемы заключается в том, что не-кэлеровы многообразия не слишком понятны с точки зрения математических стандартов. Мы сможем получить шанс доказать гипотезу Рида, когда лучше поймем эти многообразия. Сейчас мы не можем с уверенностью сказать, что эти многообразия (не-кэлеровы) реально существуют или математически жизнеспособны. У нас нет четкого доказательства их связи со всеми многообразиями Калаби-Яу, а только с несколькими отдельными случаями.

Если мы намерены детально изучить многообразия, в связи с которыми возникла сложнейшая головоломка с ландшафтом и сопутствующий ей космологический пазл, то

188 Allan Adams (MIT), interview with author, October 31, 2008.

189 Gross, interview with author, October 31, 2008.

190 Adams, interview with author, October 31, 2008.

191 Tristan Hubsch, e-mail letter to author, December 15, 2008.

целесообразно установить, действительно ли все многообразия Калаби-Яу связаны между собой. Ключ к ответу на эти вопросы может лежать в новой пограничной области, касающейся не-кэлеровых многообразий. Эти многообразия вызывают интерес не только потому, что они могут пролить свет на многообразия Калаби-Яу, но и потому, что с их помощью может быть предложена компактификация геометрии, необходимая для расчета масс элементарных частиц в Стандартной модели, которую мы упустили из виду, пока физики увлекались стратегиями, опирающимися исключительно на многообразия Калаби-Яу.

Мой коллега Мелани Бекер, физик Техасского аграрно-технического университета, полагает, что не-кэлеров подход может дать ответ. «Получить структуру и массы элементарных частиц, – говорит Бекер, – можно только через компактификацию не-кэлеровых многообразий». Это может оказаться та геометрия, которая приведет нас к обетованной земле Стандартной модели. Чтобы понять точку зрения Бекера, вернемся в начало этой главы. Струнные теоретики ввели потоки, чтобы избавиться от безмассовых скалярных полей и таким образом стабилизировать размер и форму многообразия Калаби-Яу. Но включение этих мощных полей, или потоков, может исказить геометрию самого многообразия, изменив метрику так, что это уже будет не кэлерово многообразие. «Когда вы включаете поток, ваше многообразие становится не-кэлеровым – это совершенно другая игра в мяч, – говорит Бекер. – Проблема заключается в том, что это действительно целый новый раздел математики. Многие из математики, что применяют к многообразиям Калаби-Яу, неприменимо к не-кэлеровым многообразиям».¹⁹² С точки зрения теории струн многообразия, независимо от того, являются они многообразиями Калаби-Яу или не-кэлеровыми, важны возможностью компактификации, то есть редукцией десяти измерений теории струн до четырех измерений нашего мира.

Самый легкий способ разбиения пространства заключается в расщеплении его на четырехмерные и шестимерные компоненты. Это, по сути, подход Калаби-Яу. Мы обычно считаем эти два компонента полностью отдельными и не взаимодействующими между собой. Таким образом, десятимерное пространство-время является декартовым произведением его четырех- и шестимерных частей, и, как мы видим, вы можете визуализировать его с помощью модели Калуцы-Клейна, которую мы обсуждали в первой главе: в этой модели наше бесконечное четырехмерное пространство-время похоже на бесконечно длинную линию, за исключением того, что эта линия имеет толщину – крошечный круг, в котором находится дополнительное измерение. Поэтому все, что мы действительно имеем, так это декартово произведение круга и линии, другими словами – цилиндр. В случае не-кэлерова многообразия четырех- и шестимерные компоненты не являются независимыми.

В результате десятимерное пространство-время получается не прямым, а, скорее, кривым произведением, часто называемым в русскоязычной литературе *искривленным произведением*, означаящим, что эти два подпространства взаимодействуют.

Короче говоря, на расстояния в четырехмерном пространстве-времени, которые постоянно увеличиваются или искривляются, влияет шестимерная часть. Степень расширения или сжатия четырехмерного пространства-времени зависит от коэффициента искажения, и в некоторых моделях искажение представляет собой экспоненциальную функцию.

Обратимся к нашему примеру с цилиндром. Давайте представим шестимерное пространство при помощи круга. Четырехмерная часть представляет собой линию, перпендикулярную к этому кругу и мы изобразим ее отрезком линии, а не бесконечной линией, чтобы показать, как шестимерное пространство влияет на расстояния. Если искажение отсутствует, то, по мере того как вы перемещаете отрезок линии, проходя все точки круга, вы будете вычерчивать правильный сплошной цилиндр.

Однако из-за искажения длина отрезка может варьировать в процессе путешествия по кругу. В одной точке она может быть равна 1, в другой 1/2, еще в другой 1 1/2 и т. д. В

192 Melanie Becker (Texas A&M University), interview with author, February 1, 2007.

результате вы получите неровный, волнистый цилиндр, который деформирован искажением. В 1986 году физик Эндрю Строминджер выразил все это через набор уравнений.

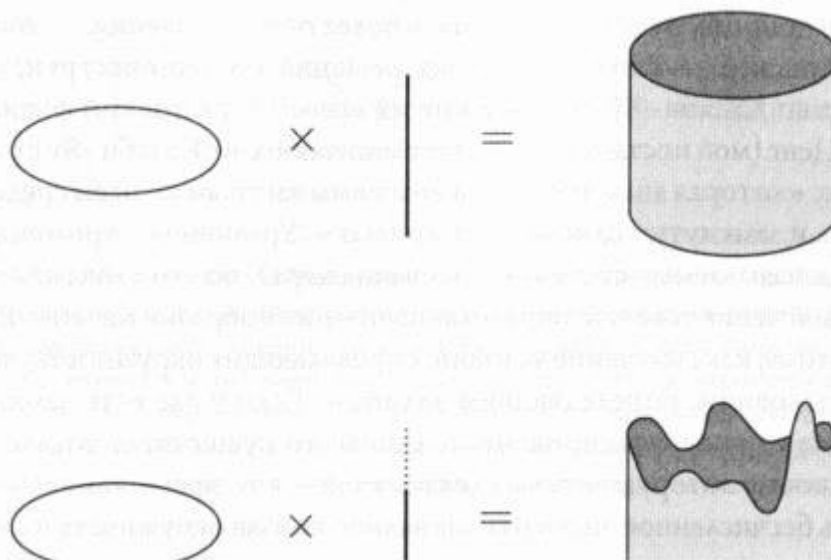


Рис. 10.7. Так называемое декартово произведение круга и отрезка линии аналогично присоединению этого же линейного сегмента к каждой единичной точке на круге. В результате получаем цилиндр. Искривленное произведение выглядит по-другому. В этом случае длина линейного сегмента не должна быть постоянным числом; она может варьировать в зависимости от ее положения на круге. Таким образом, в этом случае мы получаем не настоящий цилиндр, а объект, который можно назвать волнистым, иррегулярным цилиндром

Строминджер отмечает, что в более ранней статье 1985 года, написанной им вместе с Канделасом, Горовицом и Виттенем, где представлена первая серьезная попытка компактификации Калаби-Яу, они сделали упрощающее допущение о том, что четырехмерная и шестимерная геометрии являются независимыми. «И мы нашли решения, в которых они являются независимыми, хотя теория струн не требует этого. Годом позже я решил уравнения, которые получаются без этих допущений». Это так называемые уравнения Строминджера, которые касаются ситуации, где включаются потоки, а четырех- и шестимерные пространства взаимодействуют. «Возможность независимого существования обеих геометрий вызывает интерес, потому что из этого положения вытекает несколько действительно важных следствий», – добавляет Строминджер. Самое выдающееся из этих следствий заключается в том, что искажение может объяснить проблему иерархии масс, то есть почему масса бозона Хиггса настолько меньше планковской массы и почему гравитация настолько слабее других сил.

Уравнения Строминджера, которые применяют к не-кэлеровым многообразиям, описывают более широкий класс решений, чем уравнения, приведенные в статье 1985 года, которые применимы только к многообразиям Калаби-Яу. «Чтобы понять способы реализации теории струн в природе, необходимо понять более общие решения, – говорит Строминджер. – Важно понять все решения для теории струн, а пространство Калаби-Яу не содержит их все».¹⁹³ Гарвардский физик Ли-Шенг Ценг (мой постдок) сравнивает многообразия Калаби-Яу с окружностью, «которая является самым красивым частным случаем среди всех гладких и замкнутых одномерных кривых». Уравнения Строминджера (иногда называемые системой Строминджера), по его словам, «включают смягчение условия, определяющего многообразия Калаби-Яу, подобно тому, как смягчение условий, определяющих окружность, приводит к условиям, определяющим эллипс». Если у вас есть замкнутая петля из струны фиксированной длины, то существует только одна окружность, которую можно сделать из нее, в то время как вы можете сделать бесчисленное число разных эллипсов, взяв окружность

¹⁹³ Andrew Strominger (Harvard University), interview with author, February 7, 2007.

и сжимая или раздвигая ее в разной степени. Из всех кривых, которые вы можете сделать из этой петли, окружность является единственной, которая остается инвариантной к поворотам вокруг центра.

Для того чтобы убедиться, что окружность является частным случаем эллипса, нам необходимо посмотреть на уравнение, которое определяет эллипс в декартовой системе координат (x, y) : $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, где a и b – положительные, действительные числа.

Кривая будет являться окружностью только при условии, что $a=b$. Кроме того, необходимы два параметра a и b , чтобы определить эллипс, и только один параметр (так как $a=b$), чтобы определить окружность. Это условие делает эллипс несколько более сложной фигурой, чем окружность, как и система Строминджера (не-кэлерова) является более сложной, чем многообразия Калаби-Яу, которые можно описать меньшим числом параметров.

Хотя переход от окружности к эллипсу и от многообразия Калаби-Яу к не-кэлерову многообразию можно считать шагом назад с точки зрения симметрии и красоты, Ценг отмечает: «очевидно, что природа не всегда выбирает самую симметричную конфигурацию. Например, подумайте об эллиптических орбитах планет. Поэтому вполне возможно, что внутренняя шестимерная геометрия, описывающая нашу естественную Вселенную, может быть не полностью симметричной, как Калаби-Яу, а чуть менее симметричной, как система Строминджера».¹⁹⁴

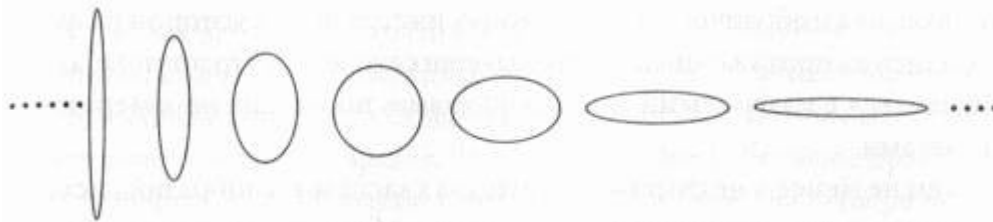


Рис. 10.8. Если у вас есть петля фиксированной длины, то вы можете сделать бесконечное число эллипсов, одни более вытянутые, другие – более округлые, но вы можете сделать только одну окружность заданной длины. Другими словами, ослабив свойства, которые определяют окружность, вы можете получить любое число эллипсов. Аналогично многообразию Калаби-Яу, которое имеет кэлерову симметрию, по определению является (как и окружность) более частным случаем, чем не-кэлерово многообразие, которое удовлетворяет менее жестким условиям и охватывает более широкий класс объектов

Система, предложенная Строминджером, отнюдь не сахар, поскольку она состоит из четырех дифференциальных уравнений, которые должны быть решены одновременно, причем каждое из них может быть кошмаром для решения. Эта система состоит из двух эрмитовых уравнений Янга-Миллса, которые предназначены для калибровочных полей (см. девятую главу). Еще одно уравнение гарантирует, что вся геометрия является суперсимметричной, а последнее предназначено для устранения аномалий, что существенно для обеспечения согласованности теории струн.

Как будто и без того задача не оказывается достаточно сложной, так вдобавок каждое из четырех уравнений фактически представляет собой систему уравнений, а не одно уравнение. Каждое из них можно записать как тензорное уравнение, но так как сам тензор содержит много переменных, то можно разделить одно уравнение на отдельные уравнения для компонентов.

По этой же причине известное уравнение Эйнштейна, которое содержит в себе всю общую теорию относительности, фактически представляет собой набор из десяти уравнений поля, описывающих гравитацию как кривизну пространства-времени, вызванную наличием вещества и энергии, несмотря на то что его можно записать как одно тензорное уравнение. При доказательстве гипотезы Калаби решение уравнений Эйнштейна в вакууме сводится к одному уравнению, хотя и довольно впечатляющему. С не-кэлеровыми многообразиями

¹⁹⁴ Li-Sheng Tseng (Harvard University), interview with author, December 17, 2008.

работать тяжелее, чем с многообразиями Калаби-Яу, потому что здесь наблюдается меньшая симметрия и, следовательно, больше переменных, каждая из которых ведет к увеличению числа уравнений, подлежащих решению. Кроме того, на данный момент у нас фактически нет математических инструментов для решения этой проблемы. В случае с Калаби-Яу, мы привлекли алгебраическую геометрию, инструменты которой разрабатывались на протяжении двух предыдущих столетий, что позволило нам справиться с кэлеровыми многообразиями, но не с их не-кэлеровыми коллегами.

Тем не менее я не считаю, что эти два класса многообразий настолько разные с математической точки зрения. Мы использовали геометрический анализ для построения многообразий Калаби-Яу, и я убежден, что эти инструменты помогут нам построить не-кэлеровы многообразия, допуская, что сначала мы должны решить уравнения Строминджера или, по крайней мере, доказать, что решения существуют. Физикам необходимо знать, действительно ли не-кэлеровы многообразия могут существовать и если да, то удовлетворяют ли всем четырем уравнениям сразу, поскольку, если это невозможно, то люди, работающие над этой задачей, просто даром теряют время. Я занимаюсь ею почти двадцать лет с тех пор, как Строминджер выдвинул свою идею, и не могу найти решение. То есть решение без сингулярностей, так как Строминджер нашел несколько решений с сингулярностями, но они оказались чрезвычайно сложными. И люди начали верить, что решений без сингулярностей не существует.

Затем произошел небольшой прорыв. Я и несколько моих коллег обнаружили решения без сингулярностей для пары специальных случаев. В первой статье, которую я завершил в 2004 году вместе с математиком из Стэнфорда Юном Ли (моим бывшим аспирантом), мы доказали, что класс не-кэлеровых многообразий математически возможен. Фактически для каждого известного многообразия Калаби-Яу мы доказали существование целого семейства не-кэлеровых многообразий, которые достаточны похожи по структуре, чтобы входить в одно семейство. Таким образом, впервые существование этих многообразий было подтверждено математически.

Хотя решение уравнений Строминджера является чрезвычайно трудным делом, мы с Ли сделали самое легкое, что можно было сделать в этой области. Мы доказали, что эти уравнения можно решить для частного случая, когда не-кэлерово многообразие очень близко к многообразию Калаби-Яу. Фактически, мы начали с многообразия Калаби-Яу и показали, как его деформировать, чтобы геометрия или метрика уже не были кэлеровыми. Хотя многообразие все еще могло поддерживать метрику Калаби-Яу, его метрика уже была не-кэлеровой, что сделало возможными решения системы Строминджера.

Вероятно, важнее то, что Ли и я обобщили теорему DUY (о которой упоминалось в девятой главе и название которой является аббревиатурой фамилий ее авторов – Дональдсона, Уленбека и Яу), чтобы охватить все не-кэлеровы многообразия. Теорема DUY имеет большое практическое значение, потому что она автоматически берет на себя решения двух из четырех уравнений Строминджера, связанных с эрмитовой теорией Янга-Миллса, и позволяет решить уравнения суперсимметрии и устранения аномалий.

Учитывая, что DUY является инструментальным средством для компактификаций Калаби-Яу (с точки зрения воспроизведения калибровочных полей), мы надеемся, что она также пригодится для не-кэлеровых компактификаций.

Одним из перспективных способов получения не-кэлеровых многообразий, подразумеваемый гипотезой Рида, является применение конифолдного перехода к уже известному многообразию Калаби-Яу. Я недавно рассматривал эту возможность с Юном Ли и Джи-Хианом Фу, бывшим своим гарвардским аспирантом, сейчас работающим в Фуданьском университете в Шанхае. Исходное многообразие, с которого мы начали, предложил Херб Клеменс, один из архитекторов конифолдного перехода, но он обеспечил нас только общей топологией, то есть многообразием без метрики и, следовательно, без геометрии. Фу, Ли и я пытались придать этому многообразию некоторую форму, показав существование метрики, которая будет удовлетворять уравнениям Строминджера.

Эти уравнения представляются уместными здесь, потому что они применимы не только к не-кэлеровым многообразиям, но также к многообразиям Калаби-Яу, которые представляют собой частный случай. Кроме того, гипотеза Рида включает процедуру, которая позволяет перейти от многообразий Калаби-Яу к не-кэлеровым многообразиям и обратно.

Таким образом, если вам нужен набор уравнений, которые охватывают обе геометрии, то формулировки Строминджера – возможно, именно то, что вы искали. Мы с коллегами доказали, что многообразие Клеменса удовлетворяет трем из четырех уравнений Строминджера, но пока мы не нашли решение для самого трудного из всех уравнений – уравнения устранения аномалий. Я все еще убежден, что искомое многообразие существует. В конце концов, если наши усилия увенчались решением трех уравнений – это уже хорошо. Но пока мы не решим последнее уравнение, у нас не будет необходимого доказательства.

Фу и я пошли дальше, показав, как построить класс, топологически отличный от не-кэлеровых многообразий, который удовлетворяет уравнениям Строминджера. Если вести построение с нуля, а не путем модифицирования известных многообразий Калаби-Яу, то получаемые многообразия, по сути, являются не-кэлеровыми. Они состоят из поверхностей К3 (четырёхмерные многообразия Калаби-Яу) с двухмерными торами, присоединенными к каждой точке. Решение уравнения Строминджера в этом случае включает решение уравнения Монжа-Ампера (класс нелинейных дифференциальных уравнений, который мы обсуждали в пятой главе), которое сложнее, чем то, которое мне пришлось решать для доказательства гипотезы Калаби. К счастью, мы с Фу смогли оттолкнуться от наших ранних работ. Наш метод, как и в случае с доказательством гипотезы Калаби, включал априорное оценивание, то есть мы должны были предсказать диапазон значений разных параметров.

Мы с Фу нашли особый метод, позволивший нам решить не одно, а все четыре уравнения. В то время как в случае гипотезы Калаби я смог получить все возможные решения уравнения Монжа-Ампера, на этот раз мы получили лишь подмножество целого класса решений. К сожалению, мы не достаточно хорошо понимали систему, чтобы определить, насколько большим или маленьким является это подмножество. Но, по крайней мере, мы сделали несколько предварительных шагов.

Большинство физиков, которые начинали работать с не-кэлеровыми компактификациями, допускают, что уравнения Строминджера можно решить, не беспокоясь о доказательстве этого. Ли, Фу и я показали, что эти уравнения можно решить в отдельных случаях, которые мы пока не определили, но это еще один способ доказать, что специфические многообразия, то есть какая-то часть всех не-кэлеровых многообразий, действительно существуют. Это явилось всего лишь отправной точкой для решения более существенной задачи: нахождения метрики, удовлетворяющей системе Строминджера и всем ее уравнениям. Несмотря на то что пока никто и близко не подошел к решению этой проблемы и все признаки указывают на то, что проблема дастся физикам нелегко, мы с коллегами нашим небольшим вкладом, по крайней мере, подняли вопрос о его возможности.

Бекер утверждает, что, если все удастся, то это будет важнее, чем доказательство гипотезы Калаби. Может быть, она права, но об этом рано говорить. Пока я не доказал гипотезу Калаби, я не понимал ее полной значимости. И даже после ее доказательства физики еще восемь лет не осознавали его важности и значения сопутствующей теоремы. Но я продолжал изучать пространства Калаби-Яу, потому что для меня они выглядели привлекательно. Пространства, описываемые системой Строминджера, также имеют определенный шарм. Сейчас мы уже увидели, что дело пошло.

Тем временем мы с Фу предложили многообразия, которые мы создали для наших друзей-физиков, сотрудничая с Мелани Бекер, Катрин Бекер, Ценгом и, можно сказать, даже со Строминджером, если причислить его к нашим единомышленникам. Затем наша группа построила еще больше примеров исходной модели Фу-Яу. В отличие от гетеротической компактификации теории струн, описанной в последней главе, наша команда не смогла получить правильные характеристики частиц или три поколения частиц из Стандартной модели. «Что мы имеем, – говорит Мелани Бекер, – так это стабилизированные модули, что

является необходимым предварительным условием ко всему, а также реальным способом вычисления масс».¹⁹⁵

На данном этапе трудно сказать, что получится из усилий физиков, играющих с не-кэлеровыми компактификациями и многими другими альтернативами многообразий Калаби-Яу (в том числе в области под названием не-геометрические компактификации), исследование которых ведется в настоящее время. Справедливости ради стоит поставить вопрос: действительно ли компактификации Калаби-Яу являются верным описанием нашей Вселенной или только простейшей моделью, из которой мы черпаем знания, – фантастический эксперимент, дающий возможность узнать, как работает теория струн и как мы можем объединить суперсимметрию, силы и прочее в «окончательной» теории.

В конце концов, это исследование может привести нас к совершенно иному виду геометрии.

А сейчас мы просто пытаемся изучить некоторые из многих возможностей, лежащих перед нами на ландшафте теории струн. Но даже среди всех этих возможностей мы пока живем только в одной Вселенной, и эту Вселенную все еще можно описать геометрией Калаби-Яу. Я лично думаю, что многообразия Калаби-Яу являются самой элегантной конструкцией, построенной до настоящего времени, из всех вакуумных состояний теории струн. Но если наука приведет нас к какому-либо другому виду геометрии, я охотно последую за ней.

«За последние двадцать лет мы обнаружили много решений теории струн, включая не-кэлеровы, – говорит Джо Полчински. – Но самые первые и самые простые решения – многообразия Калаби-Яу, – похоже, ближе всего к природе».¹⁹⁶

Я склонен согласиться с ним, хотя многие первоклассные ученые думают по-другому. Мелани Бекер, например, является чемпионом по не-кэлеровому подходу. Строминджер, который внес основной вклад как в область Калаби-Яу, так и в область не-кэлеровых многообразий, не считает, что пространства Калаби-Яу когда-то устареют. «Но мы хотим использовать все, с чем мы сталкиваемся, как трамплин для прыжка на следующий уровень понимания, – говорит он, – и многообразия Калаби-Яу стали нашими подспорьем во многих направлениях».¹⁹⁷

Надеемся, что вскоре мы будем лучше понимать, куда они нас могут привести. Несмотря на свою привязанность к многообразиям Калаби-Яу, любовь к которым не стала меньше за прошедшие тридцать с лишним лет, я пытаюсь сохранить восприимчивый ум, присоединяясь к сентенции Марка Гросса: «Мы просто хотим знать ответ».

Если окажется, что не-кэлеровы многообразия имеют большее значение для теории струн, чем многообразия Калаби-Яу, я соглашусь с этим, поскольку эти менее изученные многообразия обладают своеобразным очарованием сами по себе. И я ожидаю, что в процессе дальнейших напряженных исследований я оценю их еще больше.

Физик Пенсильванского университета Бёрт Оврут, пытающийся реализовать Стандартную модель через компактификации Калаби-Яу, сказал, что он не готов сделать радикальный шаг к не-кэлеровым многообразиям, для работы с которыми нам пока не хватает математических знаний: «Это повлечет за собой гигантский прыжок в неизведанное, но пока мы не понимаем, что эти альтернативные конфигурации представляют собой на самом деле».¹⁹⁸ Несмотря на то что я согласен с заявлением Оврута, я всегда готов к решению новых задач, и меня не беспокоит погружение в неведомые воды. Но так как нам часто советуют не пускаться в плавание одному, я не прочь втянуть в него нескольких своих коллег.

195 Becker, interview with author, February 1, 2007.

196 Polchinski, interview with author, January 29, 2007.

197 Strominger, interview with author, August 1, 2007.

198 Burt Ovrut (University of Pennsylvania), interview with author, February 2, 2007.

Одиннадцатая глава

Распускающаяся Вселенная

(Все, что вы хотели знать о конце света, но боялись спросить)

Человек приходит в лабораторию, где его встречают два физика: женщина – старший научный сотрудник и ее ассистент – молодой мужчина, который показывает гостю множество исследовательских приборов, занимающих все помещение: вакуумную камеру из нержавеющей стали, герметичные емкости с хладагентом – азотом или гелием, компьютер, различные измерительные приборы, осциллографы и т. п. Человеку вручают пульт управления и говорят, что в его руках сейчас находится судьба эксперимента, а возможно, и судьба всей Вселенной. Если молодой ученый все сделает правильно, то прибор получит энергию из квантованного вакуума, сделав человечеству необыкновенно щедрый подарок – так называемую «энергию созидания в наших руках». Но если молодой ученый ошибется, предупреждает его умудренный опытом коллега, то прибор может запустить фазовый переход, в результате чего вакуум пустого пространства распадется до более низкого энергетического состояния, высвободив всю энергию сразу. Женщина-физик говорит, что «это будет не только конец Земли, но и конец всей Вселенной». Человек с волнением сжимает пульт управления, его ладони вспотели. Остаются считанные секунды до наступления момента истины. «Лучше бы тебе решить быстро», – говорят ему.

Хотя это и научная фантастика – отрывок из рассказа «Вакуумные состояния» Джеффри Лэндиса, но возможность распада вакуума не является полной фантазией.¹⁹⁹ Этот вопрос исследовался в течение ряда десятилетий, что видно по публикациям в более серьезных научных журналах, чем *Asimov's Science Fiction*, а именно в *Nature*, *Physical Review Letters*, *Nuclear Physics B* и т. д., таких ученых, как Сидни Коулман, Мартин Рис, Майкл Тёрнер и Фрэнк Вилчек. В настоящее время многие физики, и, вероятно, большинство интересующихся аналогичными вопросами полагают, что вакуумное состояние нашей Вселенной, то есть пустое пространство, лишённое всякого вещества, за исключением частиц, хаотически движущихся в результате квантовых флуктуаций, является скорее метастабильным, нежели стабильным. Если эти теоретики правы, то вакуум, в конечном счете, распадется, что будет иметь для мира самые разрушительные последствия (по крайней мере с нашей точки зрения), хотя эти неприятности могут и не наблюдаться до тех пор, пока не исчезнет Солнце, не испарятся черные дыры, не распадутся протоны.

Хотя никто не знает, что случится в долгосрочной перспективе, но похоже, с одним многие согласны, по крайней мере в некоторых научных кругах: текущее устройство мира не является неизменным, и в конце концов произойдет распад вакуума. Опровержения обычно звучат следующим образом: хотя многие исследователи считают, что полностью стабильное вакуумное энергетическое состояние или космологическая постоянная не согласуются с теорией струн, не следует забывать, что сама теория струн, в отличие от описывающих ее математических утверждений, пока не доказана. Более того, я должен напомнить читателям, что я математик, а не физик, а мы затронули области, которые выходят за пределы моей компетенции. Вопрос о том, что может произойти в конце концов с шестью компактными измерениями из теории струн должны ставить физики, а не математики. Поскольку гибель этих шести измерений может быть связана с гибелью части нашей Вселенной, исследования такого рода обязательно включают неопределенный, даже недостоверный эксперимент, так как, к счастью, мы еще не провели решающий эксперимент, касающийся конца нашей Вселенной. И у нас нет возможностей, кроме богатого воображения, как у Лэндиса, чтобы поставить его.

Помня об этом, по возможности отнеситесь к этой дискуссии со здоровым скепсисом,

199 Geoffrey Landis, "Vacuum States," *Asimov's Science Fiction* 12 (July 1988): 73–79.

используя выбранный мною подход, – как к фантастическим скачкам в стране вероятности. Появится шанс выяснить, что физики думают о том, что может произойти с шестью скрытыми измерениями, о которых ведется так много споров. У нас пока нет никаких доказательств, и мы даже не знаем, как это можно проверить, но я предоставлю вам возможность увидеть, как далеко может завестись фантазия и компетентные спекуляции.

Представьте, что ученый в рассказе Лэндиса нажал на кнопку пульта управления, внезапно инициировав цепь событий, которые привели бы к распаду вакуума. Что бы произошло тогда? А вот этого никто не знает. Но независимо от результата – придется ли нам пройти через огонь или через лед (почти по Роберту Фросту, который писал: «Одни твердят, что сгинет мир в огне, другие – что во льду...») – наш мир, безусловно, должен измениться до неузнаваемости. Как написал Эндрю Фрей (университет Макджилла) с коллегами в одном из номеров «Physical Review D» в 2003 году: «один из видов распада [вакуума], рассмотренный в этой статье, в полном смысле будет означать конец Вселенной для любого, кто будет иметь несчастье стать свидетелем этого».²⁰⁰ В этом плане существуют два сценария. Оба связаны с радикальными изменениями статус-кво, хотя первый сценарий более суровый, поскольку влечет за собой конец пространства-времени в том виде, в котором оно нам известно.

Давайте вспомним рисунок из десятой главы, где изображен небольшой мяч, катящийся по слегка искривленной поверхности, на которой высота каждой точки соответствует различным уровням энергии вакуума. В данный момент наш шар находится в полустабильном состоянии, которое называется потенциальной ямой – по аналогии с небольшим углублением или ямой на каком-нибудь холмистом ландшафте. Предположим, что дно этой ямы находится выше уровня моря, или, другими словами, – значение энергии вакуума остается положительным. Если этот ландшафт является классическим, то шар будет находиться в этой яме бесконечно. Другими словами, его «место отдыха» станет его «местом последнего успокоения». Но ландшафт не является классическим. Это ландшафт квантовой механики, а в этом случае могут происходить интересные вещи: если мяч чрезвычайно мал и поэтому подчиняется законам квантовой механики, то он может в буквальном смысле пробуровать стенку ямы, чтобы достичь внешнего мира, – что является результатом совершенно реального явления, известного как квантовое туннелирование. Оно возможно благодаря фундаментальной неопределенности, одному из понятий квантовой механики. Согласно принципу неопределенности, сформулированному Вернером Гейзенбергом, местоположение вопреки мантре риелторов – это не только вещь, и это даже не абсолютная вещь. И если существует наибольшая вероятность обнаружить частицу в одном каком-то месте, то существует также и вероятность найти ее в других местах. А если такая вероятность существует, утверждает теория, то, в конце концов, это событие произойдет при условии достаточно длительного ожидания. Этот принцип верен для мячей любых размеров, хотя для большого мяча вероятность обнаружить его в другом месте значительно меньше, чем для маленького.

Как ни странно, эффекты квантового туннелирования можно наблюдать в реальном мире. Это хорошо исследованное явление лежит в основе работы сканирующих туннельных микроскопов, когда электроны проходят через, казалось бы, непроходимые барьеры. По аналогичной причине производители чипов не могут сделать их слишком тонкими, иначе работе чипов будет мешать утечка электронов в результате туннельных эффектов.

Идея о частицах, например электроны, метафорически или реально туннелирующем через стену, – это одно, а как насчет пространства-времени в целом? Понятие туннелирования вакуума при переходе из одного энергетического состояния в другое является, по общему признанию, сложным для понимания, хотя эта теория была хорошо разработана еще Коулманом с коллегами в 1970-е годы.²⁰¹ В этом случае барьером является не

200 Andrew R. Frey, Matthew Lippert, and Brook Williams, “The Fall of Stringy de Sitter,” *Physical Review D*. 68 (2003).

201 Sidney Coleman, “Fate of the False Vacuum: Semi-classical Theory,” *Physical Review D*. 15 (May 15, 1977):

стена, а некий вид энергетического поля, который не дает вакууму перейти к состоянию с меньшей энергией, более стабильному, а следовательно, более предпочтительному. Изменение в этом случае происходит за счет фазового перехода аналогично тому, как жидкая вода превращается в лед или пар, но при этом изменяется большая часть Вселенной, возможно, даже та ее часть, где обитаем мы.

Это подводит нас к кульминационному моменту первого сценария, при котором нынешнее состояние вакуума туннелирует из состояния с небольшой положительной энергией (фактически то, что сегодня называется темной энергией или космологической константой) в состояние с отрицательной энергией. В результате энергия, которая в настоящее время заставляет нашу Вселенную ускоренно расширяться, сожмет ее в точку, что приведет к катастрофическому событию, известному под названием Большое сжатие. При такой космической сингулярности как плотность энергии, так и кривизна Вселенной станут бесконечными, что равносильно тому, как если бы мы неожиданно попали в центр черной дыры или если бы Вселенная вернулась к состоянию Большого взрыва.

События, которые могут последовать за Большим сжатием, можно описать двумя словами: «ставки сделаны!» «Мы не знаем, что случится с пространством-временем, не говоря уже о том, что случится с дополнительными измерениями», – отмечает физик Стив Гиддингс из Калифорнийского университета в Санта-Барбаре.²⁰² Это лежит за пределами нашего опыта и понимания почти во всех отношениях.

Квантовое туннелирование является не единственным способом инициировать изменение состояния вакуума: это можно сделать с помощью так называемых тепловых флуктуаций. Давайте вернемся снова к нашему крошечному мячу на дне потенциальной ямы. Чем выше температура, тем быстрее движутся атомы, молекулы и другие элементарные частицы. А если частицы движутся, некоторые из них случайно могут врезаться в мяч, толкая его в ту или иную сторону. В среднем эти столкновения уравниваются, и мяч остается в относительно стабильном положении. Но предположим, что при статистически благоприятной ситуации несколько атомов врезаются в мяч последовательно, причем в одном и том же направлении. В результате одновременного действия нескольких таких столкновений мяч может быть вытолкнут из ямы. Он покатится по наклонной поверхности и, возможно, будет катиться до тех пор, пока его энергия не станет равной нулю, если, конечно, при движении он не окажется в другой яме или углублении.

В качестве более удачной аналогии можно привести испарение, считает физик Мэтью Клебан из Нью-Йоркского университета: «Невооруженным глазом невозможно увидеть, как вода испаряется из чашки, – объясняет он. – Но молекулы воды постоянно сталкиваются, особенно если вода нагревается, а иногда они сталкиваются с такой силой, что выплескиваются из чашки. Это похоже на то, что происходит в тепловом процессе».²⁰³

Однако существуют два важных различия. Одно из них заключается в том, что обсуждаемые здесь процессы происходят в вакууме, а это традиционно означает отсутствие материи, а следовательно, и частиц. Что же тогда сталкивается? Во-первых, температура никогда не достигает нуля (фактически, это оказалось одним из свойств расширяющейся Вселенной), а во-вторых, пространство никогда не бывает полностью пустым, поскольку пары виртуальных частиц – частица и античастица – непрерывно возникают и исчезают в результате аннигиляции в такой короткий промежуток времени, что мы никак не можем поймать их с полочным. Другое отличие заключается в том, что этот процесс виртуального рождения и уничтожения является квантовым, поэтому, говоря о тепловых флуктуациях, необходимо не забывать о квантовом вкладе.

Теперь мы готовы обсудить второй сценарий, который, возможно, мягче, чем первый, но не намного. С помощью квантового туннелирования или, возможно, тепловой или квантовой флуктуации наша Вселенная может перейти в другое метастабильное состояние

2,929-2,936.

202 Steve Giddings (University of California, Santa Barbara), interview with author, September 24, 2007.

203 Matthew Kleban (New York University), interview with author, January 17, 2008.

(вероятнее всего, с более низким уровнем энергии вакуума) на ландшафте теории струн. Но это, как и в случае нашей текущей ситуации, будет только временным состоянием («небольшой промежуточной станцией»), или метастабильной остановкой-отдыхом на пути к конечному пункту назначения. Этот вопрос связан с тем, как Шамит Качру, Рената Каллош, Андрей Линде и Сандип Триведи (авторы статьи KKLT) описали акт великого исчезновения в теории струн, дающей нам представление о Вселенной с четырьмя большими измерениями, а не десятью, одновременно включив гипотезу инфляции в струнную космологию. И хотя в настоящее время мы видим только четыре измерения, «в далеком будущем Вселенная “не захочет” быть четырехмерной, – считает Андрей Линде, специалист по космологии из Стэнфорда. – Она “хочет” быть десятимерной».²⁰⁴ И если запастись терпением, то можно этого дожидаться.

Согласно Линде, компактифицированные измерения хороши в краткосрочном плане, но они не идеальны для Вселенной в долгосрочной перспективе. «Сейчас мы как будто стоим на вершине здания, но еще не спрыгнули с него. Если мы не сделаем это по доброй воле, то квантовая механика сделает это за нас, “сбросив” на самый низкий уровень энергетического состояния».²⁰⁵

Причина, по которой Вселенная с десятью некомпактифицированными измерениями является эргономически предпочтительной, заключается в том, что в самых современных моделях, известных сегодня, энергия вакуума является следствием компактификации дополнительных измерений. Иначе говоря, темная энергия, о которой так много говорят, не просто управляет ускоряющимся расширением Вселенной, но часть (если не вся) этой энергии идет на удержание дополнительных измерений в компактифицированном состоянии, сжатых туже, чем пружины швейцарских часов. Только в нашей Вселенной, в отличие от часов «Rolex», это делают потоки и браны.

Другими словами, рассматриваемая система обладает положительной потенциальной энергией. Чем меньше радиус дополнительных измерений, тем туже закручена пружина и тем больше запасенная энергия. И наоборот, с увеличением радиуса этих измерений потенциальная энергия снижается, достигая нулевого значения, когда радиус становится бесконечным. Это самый низкий уровень энергетического состояния и, следовательно, действительно устойчивый вакуум – точка, в которой плотность темной энергии достигает нулевого значения, а радиусы всех десяти измерений становятся бесконечно большими. Другими словами, когда-то небольшие внутренние измерения становятся декомпактифицированными.

Декомпактификация представляет собой явление, обратное компактификации, которая, как мы говорили, составляет одну из самых больших проблем в теории струн: если эта теория описывает Вселенную десятимерной, то почему мы видим только четыре измерения? Струнные теоретики затрудняются дать ответ на вопрос, каким образом дополнительные размерности теории так тщательно спрятаны, поскольку, по мнению Линде, при прочих равных условиях измерения должны быть довольно крупными. Это похоже на попытку увеличить объем воды в заполненном резервуаре с жесткими стенками. В каждом направлении, в любом уголке такой структуры вода будет стремиться наружу. И она не прекратит своих попыток, пока не реализует их. Когда это произойдет и стенки резервуара вдруг поддадутся, вода, ограниченная компактной областью (объемом резервуара), выльется и растечется по обширной поверхности. Исходя из современного представления о теории струн, то же самое произойдет с компактными измерениями – свернутыми в пространства Калаби-Яу или в другие сложные конфигурации. Независимо от того, какая конфигурация выбрана для внутренних измерений, они в конце концов развернутся и раскроются.

Конечно, может возникнуть вопрос: если декомпактификация измерений выгодна с энергетической точки зрения, то почему этого до сих пор не произошло? Одно из решений, предлагаемых физиками (см. десятую главу), привлекает браны и потоки. Предположим, что

204 Dennis Overbye, “One Cosmic Question, Too Many Answers,” New York Times, September 2, 2003.

205 Andrei Linde (Stanford University), interview with author, December 27, 2007.

у нас есть перекачанная велосипедная камера, из-за чего в каком-нибудь наиболее тонком месте велосипедной покрышки может образоваться вздутие – пузырь, который в конце концов лопнет. Можно укрепить слабое место шины, наложив заплату, которая чем-то напоминает брану, или перемотать всю покрышку резиновой лентой, чтобы сохранить ее форму, что делают потоки с пространствами Калаби-Яу. То есть суть идеи в том, что мы имеем две противоположные силы – естественное стремление к расширению (к перекачанной камере) и сдерживающие это расширение браны, потоки и другие структуры, наматывающиеся вокруг объекта и, таким образом, удерживающие его. В настоящее время эти противодействующие силы превосходно сбалансированы и находятся в равновесии.

Однако этот мир неустойчив. Если радиус дополнительного измерения увеличивается за счет небольших квантовых флуктуаций, то браны и потоки обеспечивают возвращающую силу, которая быстро приводит радиусы измерений к исходному состоянию. Но если чрезмерно растянуть измерение, то браны или потоки могут разорваться. Гиддингс объясняет это следующим образом: «в конце концов особо сильная флуктуация увеличит радиус до порогового значения декомпактификации»²⁰⁶ и, оказавшись на правом склоне графика (рис. 11.1), мы покатымся вниз до бесконечности.

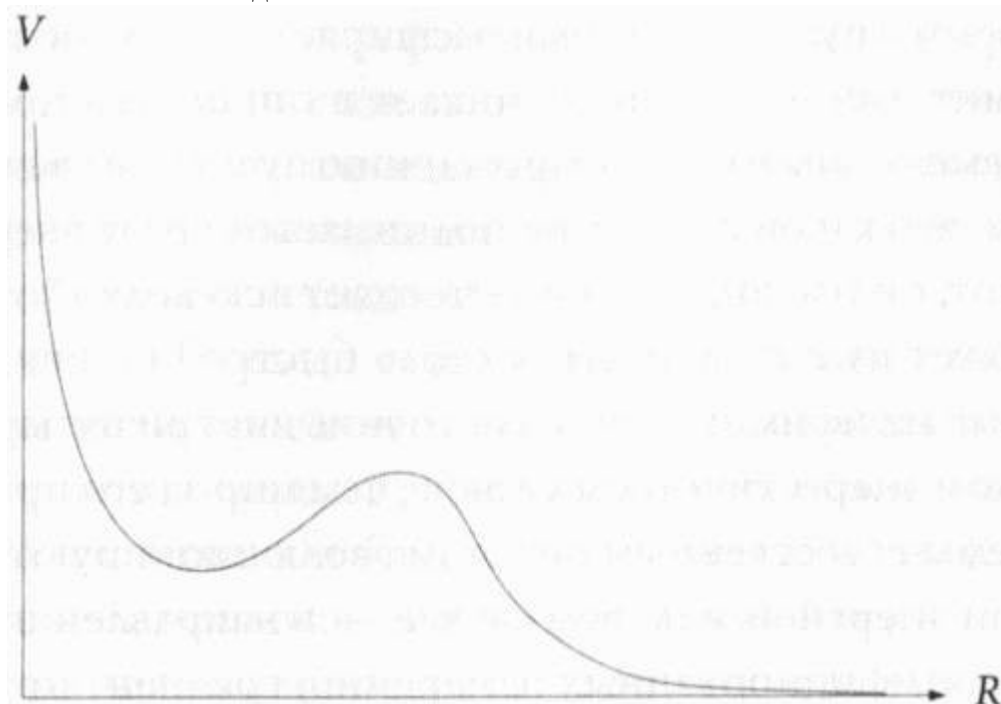


Рис. 11.1. Одна теория утверждает, что наша Вселенная находится в небольшой яме в левой части графика, что удерживает потенциальную энергию вакуума (V) на определенном уровне, а также фиксирует радиус (R) дополнительных компактифицированных измерений. Однако такое состояние не может быть вечным. Небольшое возмущение может вытолкнуть нас на правую вершину, или мы можем пройти через барьер за счет квантового туннелирования и покатиться вниз по правой части графика к бесконечно большим дополнительным размерностям. Этот процесс, за счет которого ранее крошечные размерности разворачиваются, чтобы превратиться в огромные, называют декомпактификацией (адаптировано, с разрешения, с рисунка Стива Гиддингса)

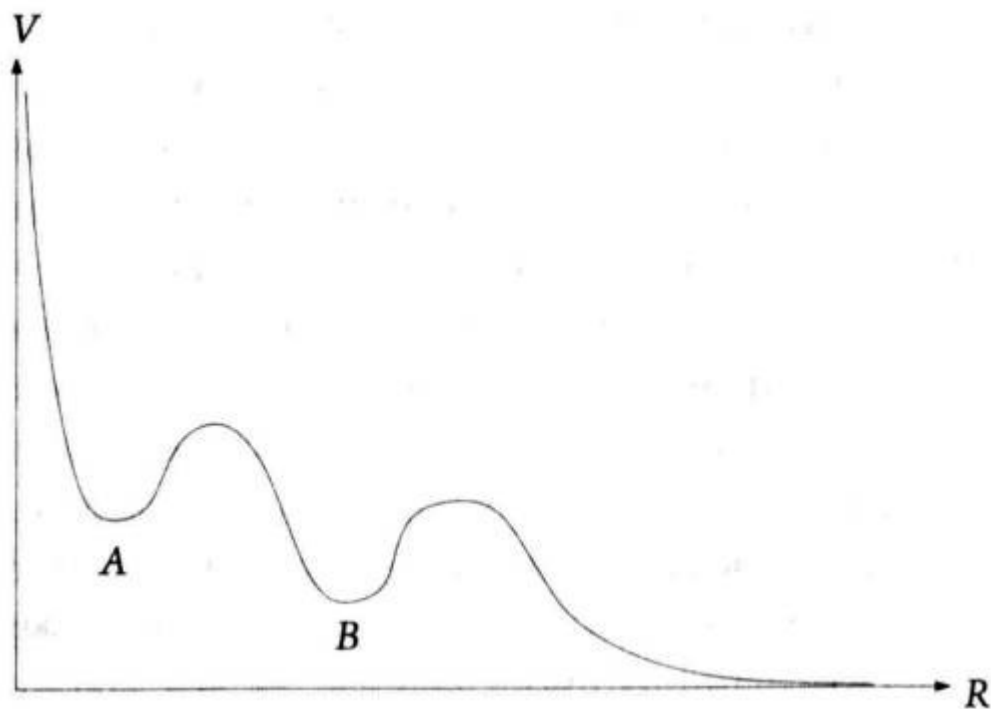


Рис. 11.2. Здесь ситуация намного интереснее, чем на рис. 11.1. Наша Вселенная все еще направляется к декомпактизации и области бесконечно больших дополнительных измерений, только на этот раз мы собираемся сделать промежуточную остановку на ландшафте вдоль этого маршрута. По этому сценарию нашу Вселенную можно рассматривать как небольшой мячик, который при скатывании вниз с холма временно задержался во впадине (A). В принципе, мячик мог бы сделать множество временных остановок при спуске, хотя на этом графике показана только одна дополнительная впадина (B) (адаптировано, с разрешения, с рисунка Стива Гиддингса)

На рис. 11.2 показана похожая ситуация, но с одним нюансом. Вместо прямого туннелирования во Вселенную с десятью декомпактифицированными измерениями мы сделаем по пути одну или несколько остановок. Но в любом случае, будете ли вы лететь без промежуточной посадки или сделаете посадку в Далласе или Чикаго, конечный пункт один и тот же. Причем неотвратно. И похоже, что посадка будет не очень мягкой. Стоит помнить, что изменение, когда оно произойдет, будет фазовым переходом вакуума, а не мячом, выкатывающимся из ямы или пробивающим стену. Изменение начинается с возникновения крошечного пузыря, но этот пузырь будет расти экспоненциально. Внутри пузыря компактификация шести измерений почти планковских размеров начнет сама себя раскручивать. По мере роста пузыря пространство-время четырех больших измерений и шести свернутых измерений начнут объединение. Там, где размерности были разделены на компактифицированные и расширенные, окажется десять декомпактифицированных, объединенных вместе, размерностей без разделяющих их барьеров.

«Мы говорим о пузыре, который расширяется со скоростью света, – говорит Шамит Качру – Он возникает в определенном месте пространства-времени, аналогично зарождению пузырьков в воде. Отличие состоит в том, что такой пузырь не поднимается сразу вверх и не лопается. Наоборот, он расширяется и вытесняет всю воду».²⁰⁷

Но как может пузырь двигаться столь быстро? Причина состоит в том, что декомпактификационное состояние внутри пузыря находится на более низком энергетическом уровне, чем мир за его пределами. Поскольку системы естественным образом эволюционируют в состояния с более низкой энергией, в нашем случае – в направлении увеличения радиуса компактифицированных измерений, градиент

потенциальной энергии создает силу на краю пузыря, вызывающую ускорение, направленное наружу.

Это ускорение разгоняет пузырь до скорости света за какие-то доли секунды.

Линде описывает это явление более красочно: «Пузырь стремится двигаться как можно быстрее, а если у вас есть возможность прекрасно существовать на более низком энергетическом уровне, то зачем ждать? – спрашивает он. – Поэтому пузырь двигается все быстрее и быстрее, но он не может двигаться быстрее света»²⁰⁸. Хотя, если бы он знал, какая награда его ждет, то постарался бы обогнать свет, если бы мог.

В связи с тем, что пузырь растет со скоростью света, мы никогда не узнаем, что нас постигнет. Единственным предварительным предупреждением, которое мы получим, будет ударная волна, которая придет раньше на долю секунды. Пузырь с огромной кинетической энергией обрушится на нас фронтом этой ударной волны. Но это только первый раунд конца света. Поскольку стенка пузыря обладает малой толщиной, то понадобятся какие-то доли секунды, чтобы произошло самое худшее. В месте, которое мы называем своим домом, действуют четырехмерные законы физики, тогда как внутренняя часть пузыря подчиняется законам десятимерного пространства. И эти законы вступят в действие, как только внутренняя часть пузыря проникнет в наш мир. Как однажды заметил драматург Дэвид Мамет: «Все меняется».

Фактически, все, что вы можете представить себе: от самой крошечной частички до таких замысловатых структур, как галактические сверхскопления, внезапно разорвется на шесть расширяющихся измерений. Планеты и люди превратятся в составляющие их компоненты, а эти компоненты также прекратят свое существование. Таких отдельных частиц, как кварки, электроны и фотоны, уже не будет – они или соединятся, чтобы продолжить свое существование вместе, или возродятся снова, но с уже новыми массами и новыми свойствами. Хотя пространство-время все еще будет существовать, пусть и в измененном состоянии, законы физики изменятся радикально.

Сколько нам осталось до такого «взрыва» измерений? Мы очень надеемся, что вакуум нашей сегодняшней Вселенной является устойчивым с тех пор, как примерно 13,7 миллиарда лет назад закончилась инфляционная фаза, отмечает Генри Тай (Henry Tye) из Корнеллского университета. «Но если ожидаемый срок жизни Вселенной составляет пятнадцать миллиардов лет, то нам осталось примерно миллиард лет или около того».²⁰⁹ У нас еще достаточно времени, до того как настанет момент «паковать чемоданы».

Но по всем признакам нажимать тревожную кнопку еще рано. Может пройти чрезвычайно много времени (приблизительно $e^{(10^{120})}$) лет до распада нашего пространства-времени. Это число настолько большое, что его сложно представить даже математикам. Мы говорим о e – одной из фундаментальных констант природы, числе, которое равно примерно 2,718, умноженном само на себя 10^{120} (единица со ста двадцатью нулями) раз. Если это грубое предположение верно, то наш период ожидания будет практически бесконечно долгим.

Откуда же взялось в нашей оценке число $e^{(10^{120})}$? Исходной посылкой является предположение, что наша Вселенная эволюционирует в нечто, называемое пространством де Ситтера, – пространство с преимущественно положительной космологической константой, в котором все вещество и излучение становятся в конце концов настолько разреженными, что практически исчезают. Впервые такое пространство было описано в 1917 году датским астрофизиком Виллемом де Ситтером как решение уравнений Эйнштейна для пустого пространства. Если наша Вселенная со своей малой космологической константой является «де Ситтеровской», то энтропия такого пространства будет очень большой, порядка 10^{120} (откуда взялась эта оценка – чуть позже). Энтропия так велика, поскольку велик объем де ситтеровской Вселенной. Подобно тому как в большом ящике больше разных мест, в которые можно поместить электрон, чем в маленьком, так у большой Вселенной больше возможных

208 Linde, interview with author, December 27, 2007.

209 Henry Tye (Cornell University), interview with author, September 12, 2007.

состояний (а следовательно, и более высокая энтропия), чем у небольшой.

Пространство де Ситтера обладает горизонтом событий, так же как и черная дыра. Если вы приблизитесь к черной дыре и перейдете роковую черту, она втянет вас внутрь, и вы уже не вернетесь домой к ужину. То же верно и в отношении света, который не сможет покинуть дыру. Это также верно и в случае горизонта де Ситтера. Если зайти слишком далеко в пространство, которое расширяется с ускорением, то вы никогда не сможете вернуться в точку, откуда стартовали. Свет, как и в случае черной дыры, тоже не сможет вернуться назад.

Когда космологическая постоянная мала, а ускоренное расширение происходит относительно медленно, что имеет место в современном мире, горизонт находится очень далеко. Вот почему объем этого пространства такой большой. И наоборот, если космологическая постоянная велика, а Вселенная расширяется с огромной скоростью, то горизонт (или критическая точка) может находиться очень близко – чуть ли не под рукой (в буквальном смысле), и объем соответственно будет мал. «Если вы засунете вашу руку слишком далеко в такое пространство, – объясняет Линде, – то быстрое расширение может оторвать вам ее».²¹⁰

Хотя энтропия пространства де Ситтера коррелирует с объемом, правильнее будет сказать, что она коррелирует с площадью поверхности горизонта событий, которая определяется расстоянием (точнее, квадратом расстояния) до горизонта. Фактически, можно использовать то же обоснование и формулу Бекенштайна-Хокинга, что мы применяли к черным дырам в восьмой главе, то есть энтропия де Ситтера пропорциональна площади горизонта, деленной на четыре ньютоновские гравитационные постоянные G . Расстояние до горизонта, или, формально, – квадрат расстояния, в свою очередь зависит от космологической постоянной: чем больше значение космологической постоянной, тем меньше расстояние. Поскольку энтропия соизмерима с квадратом расстояния, а квадрат расстояния обратно пропорционален космологической постоянной, то энтропия также будет обратно пропорциональна космологической постоянной. По Хокингу, верхний предел для космологической постоянной в нашей Вселенной составляет $10^{\text{в «безразмерных единицах»}}$, которые используют физики.¹²⁰ Число 10 является грубым приближением, его не следует воспринимать как точную цифру. Энтропия, будучи обратно пропорциональной космологической постоянной, получается чрезвычайно большой – примерно 10^{-120} , как упоминалось выше. Энтропия по определению равна не числу состояний, а натуральному логарифму числа состояний. Поэтому количество состояний фактически равно $e^{\text{энтропия}}$. Вернемся к графику на рис. 11.1, где число возможных состояний в нашей Вселенной с небольшой космологической постоянной, которая (Вселенная) представлена локальным минимумом на кривой, составляет $e^{(10^{120})}$.

Предположим, что поверхность горной вершины, с которой объект скатывается вниз к измерениям бесконечного радиуса, является таким исключительным местом, где существует только одно состояние, которое доставит вас точно на вершину. Поэтому вероятность посадки в этом конкретном месте среди всех других вероятностей исчезающе мала – порядка $1/e^{(10^{120})}$. Вот почему время туннелирования через барьер является настолько большим, что мы даже не можем назвать его астрономическим.

Еще одно замечание: на рис. 11.2 мы представили сценарий декомпактификации, при котором наша Вселенная туннелирует до состояния с более низким значением энергии вакуума (или меньшей космологической постоянной), делая промежуточную остановку на ландшафте во время своего путешествия к конечной перестройке – бесконечным радиусам измерений. Но можем ли мы, туннелируя, отправиться обратно, к месту с более высокой энергией вакуума? Безусловно, катиться под гору намного проще. Можно показать это следующим рассуждением. Предположим, что имеется потенциальный минимум в точке A и отдельный минимум в точке B , причем точка A расположена выше, чем B , а следовательно,

210 Linde, interview with author, January 10, 2008.

120 S. W. Hawking, “The Cosmological Constant,” *Philosophical Transactions of the Royal Society A* . 310 (1983): 303–310.

имеет большую энергию вакуума. Поскольку в точке А более высокая энергия, то сильнее и гравитация, и пространство в ней будет иметь более высокую кривизну. А если мы будем рассматривать это пространство как сферу, ее радиус будет меньше, поскольку сферы меньших размеров имеют большую кривизну, чем сферы больших размеров. Поскольку в точке В более низкая энергия, то гравитация будет слабее. Следовательно, пространство вокруг нее будет иметь меньшую кривизну. А если мы будем рассматривать это пространство как сферу, ее радиус будет больше, и поэтому она будет обладать меньшей кривизной. Мы проиллюстрировали некоторые аспекты этой идеи на рис. 11.3 (используя для А и В ящики, а не сферы), чтобы показать, что объект, вероятнее всего, путешествует вниз к ландшафту с более низкой энергией – от А к В, чем вверх. Для большей наглядности можно соединить два ящика тонкой трубкой. Эти два ящика со временем придут в равновесие и будут иметь одинаковую концентрацию, или плотность, газов, а количество молекул, переходящих из А в В, будет равно количеству молекул, переходящих из В в А.

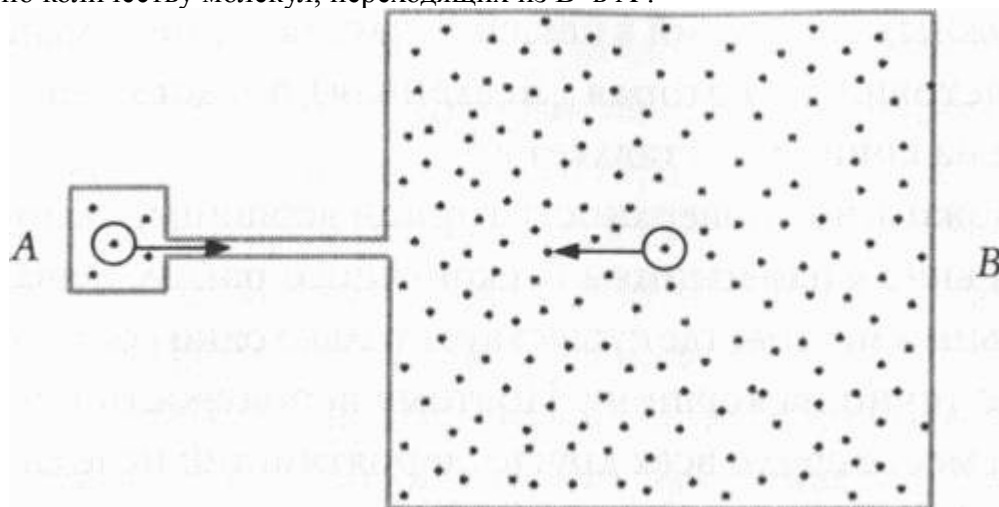


Рис. 11.3. На этом рисунке сделана попытка показать, почему легче «туннелировать вниз» от А к В (см. рис. 11.2), а не «туннелировать вверх» от В к А. Аналогия, представленная здесь, показывает, что обнаружить молекулу в В более вероятно, чем в А, просто потому, что количество молекул в В гораздо больше, чем в А.

Однако поскольку В намного больше, чем А, в нем намного больше молекул. Поэтому вероятность перехода любой отдельной молекулы из А в В намного больше, чем вероятность перехода отдельной молекулы из В в А. Аналогично, вероятность появления пузыря, который перенесет вас в место с низкой энергией на ландшафте, существенно выше, чем вероятность возникновения пузыря, который перенесет вас в обратном направлении (в гору), как и любая молекула с большей вероятностью совершит переход из ящика А в В.

В 1890 году Анри Пуанкаре опубликовал свою так называемую теорему о возвращении, которая утверждает, что любая система с фиксированным объемом и энергией, которую можно описать с помощью статистической механики, обладает характеристическим временем возвращения в исходное состояние, равным $e^{\text{энтропия системы}}$. Идея состоит в том, что такая система обладает конечным числом состояний – конечным количеством положений частиц и скоростей. Если вы будете стартовать с определенного состояния и ждать достаточно долго, то, в конце концов, достигнете всех состояний, подобно тому как частица или молекула в нашем ящике будет «брести, не разбирая дороги», отскакивая от стенок и двигаясь хаотически, со временем побывает в каждом из всех возможных мест ящика. Выражаясь научным языком, мы будем говорить не о возможных местах ящика, а о возможных состояниях в «фазовом пространстве». Тогда время, необходимое пространству-времени для декомпактификации, равно времени возвращения Пуанкаре – то есть $e^{\text{энтропия}}$, или $e^{(10^{29})}$ лет. Но, по мнению Клебана, в этом доказательстве существует одно слабое звено. «Мы еще не имеем статистическо-механического описания пространства де Ситтера». При этом мы априори предполагаем (что может оказаться правдой, а может, и нет),

что такое описание возможно.²¹¹

В настоящее время нам нечего добавить по этому вопросу, да и немного сделано в этом направлении, за исключением, возможно, уточнения вычислений, оценок и повторной проверки нашей логики. Неудивительно, что немногие исследователи склонны работать в этом направлении и дальше, поскольку мы говорим о чрезвычайно теоретических событиях в сценариях, зависящих от модели, которые еще нельзя проверить, и сама возможность проверки появится не скоро. Работа в этом направлении вряд ли гарантирует предоставление грантов или получение молодыми исследователями признания у своих старших коллег и, что важнее, не гарантирует карьерного роста.

Гиддингс, уделявший этому предмету больше внимания, чем другие ученые, не впадает в отчаяние от явных признаков картины Судного дня. «Если брать положительную сторону, — пишет он в своей статье “The Fate of Four Dimensions” (“Судьба четырех измерений”), — то распад может привести к состоянию, которое не разделяет конечную судьбу бесконечного разрежения», как это происходило бы в постоянно расширяющейся Вселенной, наделенной положительной космологической постоянной, которая действительно постоянна. «Можно искать утешение как в относительно долгой жизни нашей сегодняшней четырехмерной Вселенной, так и в том, что в перспективе ее распад приведет к состоянию, способному поддерживать интересные структуры, возможно, даже жизнь, хотя и сильно отличающуюся от нашей сегодняшней жизни».²¹²

Как и Гиддингса, меня особо не беспокоит судьба наших четырех, шести или даже десяти измерений. Как я уже упоминал ранее, исследования в этой области вызывают интерес и наводят на размышления, но они все же сильно гипотетические. Пока мы не получим данные астрономических наблюдений, которые подтвердят теорию, или, по крайней мере, не получим практических стратегий для проверки этих сценариев, я буду считать их больше научной фантастикой, чем наукой. Поэтому лучше не тратить время, беспокоясь о декомпрессии, а подумать о способах подтверждения существования дополнительных размерностей. Успех в этой области, на мой взгляд, будет более чем достаточен, чтобы перевесить потенциальный недостаток различных сценариев распада, которые могут, в конце концов, привести нашу Вселенную к плачевному концу — ни один из других финалов, если правильно подойти к ним, не станет выглядеть лучше.

На мой взгляд, развертывание скрытых измерений может стать самым впечатляющим зрелищем из всех когда-либо наблюдаемых, если его, конечно, можно будет наблюдать, хотя это выглядит чрезвычайно проблематично. Позвольте мне еще немного пофантазировать и предположить, что такой сценарий, в конце концов, будет реализован и что великий распад пространства-времени произойдет в некоторой точке в далеком будущем. В таком случае это будет прекрасным подтверждением (хотя и запоздалым) идеи, которой я посвятил лучшую часть своей карьеры. Жаль, что, когда наиболее потаенные места Вселенной, наконец, будут открыты, а космос полностью раскроет свое многомерное величие, рядом не будет никого, кто смог бы это оценить. А если кто-то и переживет великую трансформацию, то не будет фотонов, которые позволили бы это наблюдать. Не останется никого, кто мог бы отпраздновать успех этой теории, придуманной созданиями, называвшими себя людьми, в эпоху, известную как XX столетие, хотя правильнее относить ее к 137 000 000 столетию с момента Большого взрыва.

Такая перспектива особенно устрашает таких, как я, потративших десятилетия на решение проблемы геометрии шести внутренних измерений и объяснения ее людям (что еще труднее), которые находят все эти понятия заумными, если не абсурдными. Поскольку в тот момент истории Вселенной — момент великого космического «разматывания», глубоко скрытые сейчас дополнительные измерения больше не будут математической абстракцией, они перестанут быть дополнительными. Наоборот, они будут законной частью нового порядка, в котором все десять измерений будут существовать на равных, но вы никогда не

211 Kleban, interview with author, January 17, 2008.

212 Steven B. Giddings, “The Fate of Four Dimensions,” *Physical Review D* . 68 (2003).

узнаете, какое из них было когда-то свернутым, а какое – развернутым. Вас это не будет волновать. С десятью размерностями пространства-времени и шестью новыми направлениями жизнь получит столько возможностей, что мы не можем себе их даже представить.

Двенадцатая глава

В поисках новых измерений

Если учесть, что прошло уже десять лет без крупных откровений на теоретическом фронте, «партизаны» теории струн сейчас испытывают все возрастающее давление связать свои эфемерные рассуждения с чем-то конкретным. Все это время над их фантастическими убеждениями висел один неизменный вопрос: действительно ли эти идеи описывают нашу Вселенную?

Это законный вопрос возникает в связи с изложенными здесь дерзкими идеями, любая из которых может вызвать ступор у среднего человека. Одно такое заявление состоит в том, что повсюду в нашем мире, куда бы мы ни отправились, в пределах досягаемости существует пространство более высокой размерности, но настолько миниатюрное, что мы его никогда не увидим и не почувствуем. Или что наш мир может разорваться из-за Большого сжатия или взорваться в мимолетной струе космической декомпактификации, во время которой область, где мы обитаем, незамедлительно превратится из четырехмерной в десятимерную. Или, проще говоря, что все, что есть во Вселенной, – все вещество, все силы и даже само пространство, является результатом вибраций крошечных струн в десяти измерениях. И здесь возникает второй вопрос, также требующий рассмотрения: есть ли у нас надежда верифицировать что-либо из этого – дополнительные измерения, струны, браны и т. п.?

Задача, стоящая перед струнными теоретиками, остается той же, что была, когда они впервые попытались воссоздать Стандартную модель: можем ли мы перенести эту удивительную теорию в реальный мир, причем не только связать ее с нашим миром, но и предсказать что-то новое, чего мы раньше не видели?

В настоящее время существует огромная пропасть между теорией и наблюдением: самые мелкие вещи, которые мы можем наблюдать с помощью современных технологий, примерно на шестнадцать порядков больше планковского масштаба, где, как предполагается, живут струны и дополнительные измерения, и пока что не представляется разумного способа преодолеть эту пропасть. Подход «грубой силы», то есть непосредственного наблюдения, вероятно, исключен, так как он требует необыкновенного мастерства и в какой-то мере удачи, так что придется проверять идеи косвенными методами. Но эту задачу необходимо решить, если струнные теоретики намерены взять верх над скептиками, а также убедить самих себя в том, их идеи что-то добавляют в науку, а не являются лишь грандиозным спекуляциями при очень небольших масштабах.

Итак, с чего мы начнем? Посмотрим в телескоп? Столкнем частицы на релятивистских скоростях и «просеем алмазную пыль» в поисках подсказки? Самый короткий ответ заключается в том, что мы не знаем, какая дорога, если она вообще существует, ведет к истине. Мы все еще не нашли тот единственный эксперимент, на который можно поставить все и который призван разрешить наши проблемы раз и навсегда. А пока что мы пытаемся изучать все из вышеперечисленного и даже больше, рассматривая любую идею, которая может дать какое-либо вещественное доказательство. Исследователи готовы заниматься этим прямо сейчас, когда *феноменология струн* завоевывает новые позиции в теоретической физике.

Логично посмотреть вначале вверх на небеса, как это сделал Ньютон при создании своей теории гравитации и как сделали это астрофизики для проверки теории гравитации Эйнштейна. Скрупулезный осмотр небес может, например, пролить свет на одну из самых

последних и самых странных идей в теории струн – идею о том, что наша Вселенная, в буквальном смысле, находится внутри пузыря, одного из бесчисленных пузырей, украшающих космический пейзаж. Несмотря на то что вам эта идея может показаться не самой перспективной, поскольку она является скорее созерцательной, нежели естественнонаучной, мы все же продолжим наше повествование с того места, на котором остановились в предыдущей главе. И наш пример показывает, как непросто воплотить эти идеи в эксперименте.

Обсуждая пузыри в одиннадцатой главе, мы делали это в контексте декомпактификации – то есть процесса чрезвычайно невероятного, чтобы его можно было наблюдать, поскольку время разворачивания Вселенной составляет порядка $e^{(10^{120})}$ лет, так и процесса, которого не имеет смысла ожидать, поскольку мы все равно не смогли бы увидеть декомпактификацию пузыря до того момента, пока он, в буквальном смысле, не ударил бы нас. А если бы он ударил нас, то «нас» бы уже не было; или мы были бы неспособны понять, что за «крышка» нас захлопнула. Но, возможно, существуют другие пузыри за пределами «нашего» пузыря. В частности, многие космологи считают, что прямо сейчас мы сидим в одном из пузырей, который образовался в конце инфляции, за долю секунды после Большого взрыва, когда среди высокоэнергетического инфляционного вакуума появился крошечный карман низкоэнергетической материи, и с тех пор расширялся, чтобы стать той Вселенной, которую мы знаем. Кроме того, широко распространено мнение, что инфляция никогда полностью не заканчивается, а начавшись, продолжается с образованием бесчисленного количества пузырьковых Вселенных, которые различаются энергиями вакуума и другими физическими характеристиками.

Сторонники малопонятной идеи пузырьковой теории надеются увидеть не наш сегодняшний пузырь, а скорее признаки другого пузыря, наполненного совершенно другим вакуумным состоянием, который надулся в нашем пузыре когда-то в прошлом. Мы могли бы случайно найти доказательство такого наблюдения, например, в космическом микроволновом фоне (КМФ), то есть реликтовом излучении, что «омывает» нашу Вселенную. КМФ – последствие Большого взрыва, является достаточно однородным с точностью до 1:100 000. По логике вещей КМФ должен быть также и изотропным, то есть обладающим одинаковыми свойствами во всех направлениях. Столкновение с другим пузырем, которое приведет к преобладанию энергии в одной части Вселенной по отношению к другой, должно нарушить наблюдаемую однородность и вызвать *анизотропию*. Это означало бы существование выделенного направления в нашей Вселенной, своеобразной «стрелы», которая указывала бы прямо на центр другого пузыря непосредственно перед тем, как он врезался в нас. Несмотря на опасности, ассоциирующиеся с декомпактификацией нашей собственной Вселенной, столкновение с другой вселенной, находящейся в другом пузыре, не обязательно будет фатальным. Стенка нашего пузыря, хотите верить, хотите нет, в состоянии обеспечить некоторую защиту. Однако такое столкновение может оставить заметный след в КМФ, который будет не просто результатом случайных флуктуаций.

Своеобразной визитной карточкой, которую ищут космологи, возможно, является обнаруженная анизотропия КМФ, названная ее открывателями Жоао Магейжо и Кейт Лэнд из Королевского колледжа Лондона «осью зла». Магейжо и Лэнд утверждают, что горячие и холодные участки в КМФ, по-видимому, ориентированы вдоль определенной оси; если данные были обработаны корректно, то это означает, что Вселенная имеет определенную ориентацию, что противоречит священным космологическим принципам, утверждающим, что все направления во Вселенной неразличимы. Но в данный момент никто не знает, является ли предполагаемая ось чем-то большим, чем статистическая флуктуация.

Если бы мы могли получить надежные свидетельства, что в нас врезался еще один пузырь, то что бы это доказало? И будет ли это иметь что-то общее с теорией струн? «Если бы мы не жили в пузыре, то не могло бы быть и столкновения, так что для начала мы бы узнали, что мы действительно живем в пузыре», – объясняет физик Мэтью Клебан из Нью-Йоркского университета. Более того, благодаря столкновению мы также узнали бы, что

снаружи находится, по крайней мере, еще один пузырь. «Несмотря на то что это не доказывает истинности теории струн, теория делает много странных предсказаний, одно из которых заключается в том, что мы живем в пузыре» – в одном из множества подобных пузырей, разбросанных по всему ландшафту теории струн. «Как минимум, – считает Клебан, – мы могли бы увидеть что-то странное и неожиданное, что также является предсказанием теории струн».²¹³

Однако есть очень важный нюанс, который отмечает Генри Тай из Корнеллского университета: столкновения пузырей могут также возникать в квантовой теории поля, которая не имеет ничего общего с теорией струн. Тай признается, что в случае обнаружения следов столкновения он не знает, следствием какой теории их лучше объяснять – струнной или теории поля.²¹⁴

Тогда встает вопрос: можно ли когда-либо увидеть что-то подобное, независимо от его происхождения? Вероятность обнаружения пузыря, конечно, зависит от того, находится ли какой-либо случайный пузырь на нашем пути или в пределах «светового конуса». «Он может оказаться где угодно, – говорит Бен Фрайфогель, физик из Калифорнийского университета. – Это вопрос вероятностей, и у нас недостаточно знаний, чтобы определить эти вероятности».²¹⁵ Несмотря на то что никто не может точно оценить шанс такого обнаружения, большинство специалистов считают, что он крайне мал.

Хотя расчеты подсказывают, что пузыри не представляют плодородной почвы для исследований, многие физики до сих пор полагают, что космология дает прекрасный шанс проверить теорию струн, учитывая, что почти планковские энергии, при которых возникают струны, настолько огромны, что их никогда нельзя будет воспроизвести в лабораторных условиях.

Возможно, наибольшую надежду когда-либо увидеть струны, предполагаемый размер которых составляет порядка 10 см, вселяет возможность образования их в момент Большого взрыва и увеличения в размерах по мере расширения Вселенной. Я имею в виду гипотетические образования, называемые *космическими струнами*, – эта идея возникла до теории струн, но возродилась с новой силой благодаря ассоциации с этой теорией.

В соответствии с традиционной точкой зрения, которая совпадает с точкой зрения теории струн, космические струны являются тонкими, сверхплотными нитями, образовавшимися во время «фазового перехода» в первую микросекунду космической истории. Как трещина неизбежно появляется во льду при замерзании воды, так и Вселенная в первые моменты своей жизни проходит через фазовый переход, который сопровождается возникновением разного рода дефектов. Фазовый переход должен был происходить в различных областях в одно и то же время, а линейные дефекты должны были образоваться в месте стыка, то есть там, где эти области набегали друг на друга, оставляя позади себя тонкие нити не превращенной материи, навсегда попавшей в ловушку изначального состояния.

Космические струны должны возникать во время этого фазового перехода в форме клубка, напоминающего спагетти, с отдельными нитями, распространяющимися со скоростями, близкими к скорости света. Они являются длинными и изогнутыми, со сложными изгибами, фрагментированными, замкнутыми в меньшие по размеру петли, которые напоминают туго натянутые резинки. Считают, что космические струны, толщина которых значительно меньше размеров субатомных частиц, должны быть почти неизмеримо тонкими и почти бесконечной длины и растягиваться за счет космического расширения, чтобы охватить всю Вселенную.

Эти протяженные нити характеризуются массой на единицу длины или напряжением, которое служит мерой гравитационной связи. Их линейная плотность может достигать

213 Geoffrey Landis, “Vacuum States,” *Asimov’s Science Fiction* 12 (July 1988): 73–79.

214 Andrew R. Frey, Matthew Lippert, and Brook Williams, “The Fall of Stringy de Sitter,” *Physical Review D* 68(2003).

215 Sidney Coleman, “Fate of the False Vacuum: Semi-classical Theory,” *Physical Review D* 15 (May 15, 1977): 2,929–2,936.

чудовищно высокого значения – около 10^{-3322} граммов на сантиметр длины для струн с энергетическими параметрами теории Великого объединения. «Даже если мы сожжем один миллиард нейтронных звезд до размера одного электрона, то мы с трудом достигнем плотности массы-энергии, характерной для струн теории Великого объединения», – говорит астроном Алехандро Ганжюи из Университета в Буэнос-Айресе.²¹⁶

Эти странные объекты стали в начале 1980-х годов популярными среди космологов, которые увидели в них потенциальных «зародышей» для образования галактик. Однако в 1985 году Эдвард Виттен в своей статье утверждал, что наличие космических струн должно было создать неоднородности в КМФ, которые должны быть значительно больше наблюдаемых, таким образом подвергнув сомнению их существование.²¹⁷

С того времени космические струны вызывают неизменный интерес, в основном благодаря своей популярности в теории струн, которая побудила многих людей посмотреть на эти объекты в новом свете. Сейчас космические струны считаются обычным побочным продуктом инфляционных моделей, основанных на теории струн. Самые современные версии теории показывают, что так называемые фундаментальные струны, основные единицы энергии и вещества в теории струн, могут достигать астрономических размеров и не страдают от проблем, описанных Виттеном в 1985 году. Тай и его коллеги объяснили, как космические струны могли образовываться в конце инфляционной стадии и не исчезнуть, разлетевшись по Вселенной в течение короткого периода неудержимого расширения, когда Вселенная удваивала свой размер, возможно, пятьдесят, а то и сто раз подряд.

Тай показал, что эти струны должны быть менее массивными, чем струны Виттена и прочие струны, которые физики обсуждали в 1980-е годы, и поэтому их влияние на Вселенную не должно быть таким сильным, что было уже доказано наблюдениями. Тем временем, Джо Полчински из Калифорнийского университета в Санта-Барбаре показал, почему только что образовавшиеся струны могли оказаться стабильными в космологическом масштабе времени.

216 Steve Giddings (University of California, Santa Barbara), interview with author, September 24, 2007.

217 Matthew Kleban (New York University), interview with author, January 17, 2008.

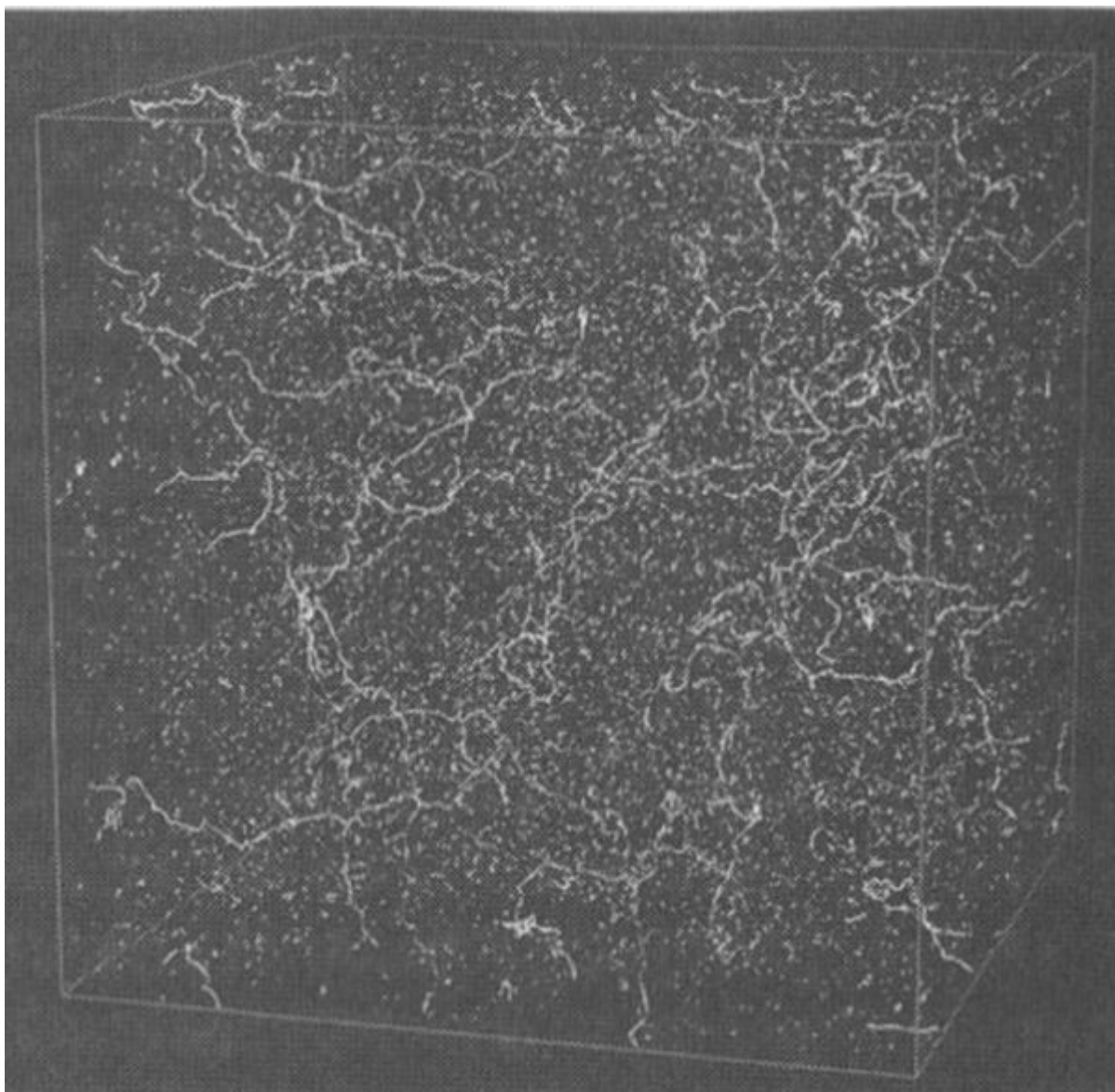


Рис. 12.1. Это изображение – результат компьютерного моделирования. Оно показывает, как выглядела бы сеть космических струн, когда возраст Вселенной составлял около десяти тысяч лет (предоставлено Брюсом Алленом, Карлосом Мартинсом и Полом Шеллардом)

Усилия Тая, Полчински и других, ловко адресованные возражениям, которые Виттен выдвинул два десятилетия назад, возродили интерес к космическим струнам. Благодаря постулированной плотности, космические струны должны оказывать заметное гравитационное влияние на свое окружение и таким образом обнаруживать себя.

Например, если струна пробегает между нашей и другой галактикой, то свет от этой галактики будет огибать струну симметрично, создавая два одинаковых изображения, близко расположенных друг к другу на небе. «Обычно при гравитационном линзировании вы ожидаете увидеть три изображения», – объясняет Александр Виленкин, теоретик космических струн из Университета Тафта.²¹⁸ Некоторое количество света пройдет прямо через линзирующую галактику, а остальные лучи будут огибать ее с обеих сторон. Но свет не может пройти через струну, потому что диаметр струны намного меньше, чем длина волны света; таким образом, струны, в отличие от галактик, будут давать только два изображения, а не три.

Надежда замаячила в 2003 году, когда русско-итальянская группа во главе с Михаилом

218 Dennis Overbye, “One Cosmic Question, Too Many Answers,” New York Times, September 2, 2003.

Сажиным из Московского государственного университета объявила, что они получили двойное изображение галактики в созвездии Ворона. Изображения находились на одинаковом расстоянии, имели одинаковое красное смещение и были спектрально идентичными с точностью до 99,96 %. Либо это были две чрезвычайно похожие галактики, случайно оказавшиеся рядом, либо первый случай наблюдения гравитационной линзы, созданной космической струной. В 2008 году более подробный анализ, основанный на данных космического телескопа Хаббла, который дает гораздо более четкую картину, чем наземный телескоп, использовавшийся Сажиным и его коллегами, показал, что представлявшаяся первоначально линзированной галактика на самом деле представляет собой две разные галактики; тем самым эффект космической струны был исключен.

Аналогичный подход, называемый микролинзированием, основан на допущении, что петля, образованная в результате разрыва космической струны, может создавать потенциально обнаружимые гравитационные линзы возле отдельных звезд. Хотя инструментально наблюдать раздвоенную звезду не представляется возможным, можно попытаться поискать звезду, которая будет периодически удваивать свою яркость, оставаясь неизменной по цвету и температуре, что может свидетельствовать о наличии петли космической струны, осциллирующей на переднем плане. В зависимости от местоположения, скорости движения, натяжения и конкретной колебательной моды, петля будет давать двойное изображение в одних случаях и не давать в других – яркость звезды может меняться на протяжении секунд, часов или месяцев. Такое свидетельство может быть обнаружено телескопом Gaia Satellite, запуск которого намечен на 2012 год и в задачу которого входит наблюдение за миллиардами звезд Галактики и ближайших окрестностей. Сейчас в Чили строят Большой обзорный телескоп (Large Synoptic Survey Telescope, LSST), который также может зафиксировать аналогичное явление. «Прямое астрономическое обнаружение суперструнных реликтов входит в задачу экспериментальной проверки некоторых базовых положений теории струн», – заявляет корнеллский астроном Дэвид Чернофф, член совместного проекта LSST.²¹⁹

Между тем исследователи продолжают искать другие средства обнаружения космических струн. Например, теоретики полагают, что космические струны помимо петель могли образовать изломы и перегибы, излучая гравитационные волны по мере того, как эти нерегулярности упорядочиваются или разрушаются.

Гравитационные волны определенной частоты могут быть обнаружены с помощью космической антенны, использующей принцип лазерного интерферометра (Laser Interferometer Space Antenna, LISA) и проектируемой для орбитальной обсерватории, которая разрабатывается сейчас для НАСА.

Измерения будут проводиться при помощи трех космических аппаратов, расположенных в вершинах равностороннего треугольника. Две стороны этого треугольника длиной 5 миллионов километров будут образовывать плечи гигантского интерферометра Майкельсона. Когда гравитационная волна искажает структуру пространства-времени между двумя космическими аппаратами, появляется возможность измерить относительные изменения длины плеч интерферометра по сдвигу фазы лазерного луча, несмотря на малость этого эффекта. Виленкин и Тибо Дамур из французского Института высших научных исследований (IHES) предположили, что точные измерения этих волн могли бы выявить присутствие космических струн. «Гравитационные волны, излучаемые космическими струнами, обладают специфической формой, которая сильно отличается от волн, возникающих при столкновениях черных дыр или волн, испускаемых другими источниками, – объясняет Тай. – Сигнал должен начинаться с нуля и затем быстро увеличиваться и так же быстро уменьшаться. Под “формой волны” мы понимаем характер увеличения и уменьшения сигнала, причем описываемый характер присущ только космическим струнам».²²⁰

219 Andrei Linde (Stanford University), interview with author, December 27, 2007.

220 Giddings, interview with author, October 17, 2007.

Другой подход основан на поиске искажений в КМФ, вызванных струнами. Исследование, проведенное в 2008 году Марком Хайндмаршем из Университета Сассекса, показало, что космические струны могут быть ответственными за комковатое распределение вещества, наблюдаемое с помощью Зонда Вилкинсона, предназначенного для исследования анизотропии микроволнового фона.

Это явление комковатости известно под названием *не-гауссовость*. Несмотря на то что данные, полученные командой Хайндмарша, предполагают наличие космических струн, многие ученые отнеслись к ним скептически, рассматривая наблюдающуюся корреляцию как простое совпадение. Этот вопрос необходимо прояснить, выполнив более точные измерения КМФ. Исследование потенциально не-гауссова распределения вещества во Вселенной является фактически одной из главных задач спутника «Планк», запущенного Европейским космическим агентством в 2009 году.

«Космические струны могут существовать, а могут и нет», – говорит Виленкин. Но поиск этих объектов идет полным ходом, и если они существуют, «их обнаружение представляется вполне реальным в ближайшие несколько десятилетий».²²¹

В некоторых моделях струнной инфляции экспоненциальный рост объема пространства происходит в области многообразия Калаби-Яу, которая называется *искривленной горловиной*. В абстрактной области струнной космологии искривленные горловины считаются объектами с фундаментальными и родовыми характеристиками, «которые возникают естественным образом из шестимерного пространства Калаби-Яу», – говорит Игорь Клебанов из Принстона.²²² Несмотря на то что это не гарантирует наличия инфляции в таких областях, предполагается, что геометрический каркас искривленных горловин поможет нам понять инфляцию и разгадать другие тайны. Для теоретиков здесь открываются большие возможности.

Горловина, самый распространенный дефект в пространстве Калаби-Яу, представляет собой конусовидный шип, или конифолд, который выступает из поверхности. Физик из Корнеллского университета Лиам Макаллистер говорит, что остальную часть пространства, часто описываемую как *bulk-пространство*, можно рассматривать как большой шарик мороженого, сидящий на вершине тонкого и бесконечно заостренного конуса. Эта горловина становится более широкой, когда включаются поля, положенные теорией струн (техническое название – потоки). Астроном из Корнеллского университета Рэчел Вин утверждает, что, поскольку данное пространство Калаби-Яу, вероятно, имеет больше одной искривленной горловины, лучшей аналогией будет резиновая перчатка. «Наша трехмерная Вселенная как точка, перемещающаяся вниз по пальцу перчатки», – объясняет она.

Инфляция заканчивается, когда брана, или «точка», достигает кончика пальца, где находится антибрана или стопка из антибран. Рэчел Вин считает, что поскольку движение браны ограничено формой пальца или горловины, то «геометрия горловины будет определять специфические характеристики инфляции».²²³

Независимо от выбранной аналогии, различные модели искривленной горловины приведут к разным предсказаниям *спектра* космических струн – полному набору всевозможных струн различного натяжения, которые могут возникнуть в условиях инфляции, которая, в свою очередь, укажет нам, какая геометрия Калаби-Яу лежит в основе Вселенной. «Если нам посчастливится увидеть [полный спектр космических струн], – говорит Полчински, – то мы сможем сказать, какая картина искривленной горловины верна, а какая – нет».²²⁴

Если нам не повезет и мы не обнаружим ни одной космической струны или сети космических струн, то мы можем по-прежнему ограничивать выбор форм пространства Калаби-Яу посредством космологических наблюдений, которые исключают одни модели

221 Shamit Kachru (Stanford University), interview with author, September 18, 2007.

222 Linde, interview with author, December 27, 2007.

223 Henry Tye (Cornell University), interview with author, September 12, 2007.

224 Linde, interview with author, January 10, 2008.

космической инфляции, оставив другие. По крайней мере, физик Гэри Шуй из Висконсинского университета и его коллеги придерживаются такой стратегии. «Как скручивались дополнительные размерности в теории струн? – спрашивает Шуй. – Мы утверждаем, что точные измерения космического микроволнового фонового излучения дадут нам подсказку».²²⁵

Шуй предполагает, что самые последние модели космической инфляции, основанные на теории струн, приближаются к той точке, начиная с которой можно делать детальные предсказания, касающиеся нашей Вселенной. Эти предсказания, варьирующие в зависимости от конкретной геометрии Калаби-Яу, дающей старт инфляции, сейчас можно проверить, проанализировав данные КМФ.

Базовая предпосылка заключается в том, что инфляция обусловлена движением бран. И то, что мы называем нашей Вселенной, фактически находится на трехмерной бране. В этом сценарии брана и ее антипод – антибрана – медленно движутся друг к другу в дополнительных измерениях. В более точном варианте теории браны движутся в области искривленной горловины в пределах этих дополнительных измерений.

Из-за взаимного притяжения браны и антибраны при их разделении возникает потенциальная энергия, которая движет инфляцией. Скоротечный процесс, в ходе которого наше четырехмерное пространство-время экспоненциально расширяется, продолжается до соприкосновения браны и антибраны и их последующей аннигиляции, происходящей с высвобождением энергии Большого взрыва и созданием неизгладимых отпечатков на КМФ. «Тот факт, что браны двигались, позволяет нам узнать о пространстве больше, чем если бы они просто сидели в углу, – говорит Тай. – Так же, как на вечеринке с коктейлем: вряд ли вы завяжете много знакомств, если будете скромно стоять в одном углу. Но если вы будете двигаться, то узнаете много интересного».²²⁶

Таких исследователей, как Тай, вдохновляет тот факт, что данные получаются достаточно точными, и мы можем сказать, что одно пространство Калаби-Яу не противоречит экспериментальным данным, в то время как другое – противоречит. Таким образом, космологические измерения проводятся и для того, чтобы наложить ограничения на вид пространства Калаби-Яу, в котором мы можем жить. «Вы берете инфляционные модели и делите их на две группы, одна часть будет соответствовать наблюдениям, другая – нет, – говорит физик Клифф Берджесс из института теоретической физики Периметр. – Тот факт, что сейчас мы можем провести различие между инфляционными моделями, означает, что мы можем также провести различие между геометрическими конструкциями, которые дали начало этим моделям».²²⁷

Шуй и его бывший аспирант Брет Ундервуд, сейчас работающий в Университете Макгилла, предприняли еще несколько шагов в этом направлении. В 2007 году в статье в *Physical Review Letters* Шуй и Ундервуд показали, что две разные геометрии для скрытых шести размерностей, являющиеся вариациями конифолдов Калаби-Яу с искривленными горловинами, могут дать разные картины распределения космического излучения. Шуй и Ундервуд выбрали для сравнения две модели горловины – Клебанова-Штрасслера и Рандалла-Сандрама – геометрии которых достаточно изучены, и затем посмотрели, как инфляция при этих разных условиях повлияет на КМФ. В частности, они сосредоточились на стандартных измерениях КМФ, то есть температурных флуктуациях в ранний период жизни Вселенной. Эти флуктуации примерно одинаковы на маленьком и большом масштабах. Скорость изменения величины флуктуации при переходе от малого масштаба к большому называется *спектральным индексом*. Шуй и Ундервуд обнаружили разницу в 1% между спектральными индексами двух моделей, показывающую, что выбор геометрии приводит к измеримому эффекту.

225 S. W. Hawking, “The Cosmological Constant,” *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. 310 (1983): 303–310.

226 Kleban, interview with author, January 17, 2008.

227 Steven B. Giddings, “The Fate of Four Dimensions,” *Physical Review D*. 68 (2003).

Хотя это может показаться несущественным, но разница в 1% считается значимой в космологии. Недавно запущенная обсерватория «Планк» должна быть способна измерять спектральный индекс, по крайней мере на этом уровне. Другими словами, может оказаться, что посредством аппарата «Планк» можно получить данные о том, что геометрия горловины Клебанова-Штрасслера соответствует наблюдениям, а геометрия Рандалла-Сандрама – нет, или наоборот. «Дальше от вершины горловины обе геометрии выглядят почти одинаково, и люди привыкли думать, что можно использовать одну вместо другой, – отмечает Ундервуд. – Шуй и я показали, что детали имеют большое значение».²²⁸

Тем не менее переход от спектрального индекса, который является просто числом, к геометрии дополнительных измерений представляет собой гигантский шаг. Это так называемая обратная задача: если у нас достаточно данных по КМФ, то можем ли мы определить, что представляет собой пространство Калаби-Яу? Берджесс не считает это возможным в «этой жизни» или, по крайней мере, в течение той дюжины лет, которая осталась у него до пенсии. Макаллистер также настроена скептически. «Будет большой удачей, если в следующее десятилетие мы сможем сказать, имеет место инфляция или нет, – говорит она. – Я не думаю, что мы получим достаточно экспериментальных данных, чтобы конкретизировать полную форму пространства Калаби-Яу, хотя мы могли бы узнать, какой вид горловины она имеет или какой род браны содержит».²²⁹

Шуй более оптимистичен. Несмотря на то что обратная задача намного сложнее, признает он, мы все же должны сделать наш лучший выстрел. «Если вы можете измерить только спектральный индекс, то трудно сказать что-то определенное о геометрии пространства. Но вы получите гораздо больше информации, если сможете определить что-то типа не-гауссовых характеристик из данных КМФ». Он считает, что четкое указание на не-гауссовость (отклонение от Гауссова распределения) будет накладывать «значительно больше ограничений на геометрию. Вместо одного числа – спектрального индекса у нас будет целая функция – целая куча чисел, связанных между собой». Высокая степень не-гауссовости, добавляет Шуй, может указывать на конкретную версию инфляции, вызванной бранами, например на модель Дирака-Борна-Инфельда (ДБИ), которая имеет место в рамках хорошо описанной геометрии горловины. «В зависимости от точности эксперимента, такое открытие, фактически, может внести ясность в проблему».²³⁰

Физик Сара Шандера из Колумбийского университета замечает, что инфляция, описываемая теорией струн, такая как модель ДБИ, окажется для нас важной, даже если мы обнаружим, что теория струн не является окончательной теорией описания природы. «Дело в том, что она предсказывает вид не-гауссовости, о котором космологи до сих пор и не думали», – говорит Шандера.²³¹ А любые эксперименты, если правильно поставить вопросы и знать, что искать, составляют большую часть всей игры.

Другую подсказку, касающуюся инфляции в рамках теории струн, можно найти путем изучения гравитационных волн, излученных во время сильного фазового перехода, который вызвал инфляцию. Самые длинные из этих волн изначальной пространственной ряби нельзя наблюдать непосредственно, потому что их диапазон длин волн охватывает сейчас всю видимую Вселенную. Но они оставляют следы в микроволновом фоновом излучении. Несмотря на то что, по мнению теоретиков, этот сигнал сложно выделить из температурных карт КМФ, гравитационные волны должны создавать характерный рисунок на картах поляризации фотонов КМФ.

В одних инфляционных моделях струнной теории отпечатки гравитационных волн являются обнаруживаемыми, в других – нет. Грубо говоря, если брана перемещается на небольшое расстояние на Калаби-Яу во время инфляции, то не существует доступного оценке результата воздействия гравитационной волны. Но, как считает Тай, если брана

228 Текст этого и последующих комментариев до конца Главы 12 отсутствует в издании. Похоже, что и комментарии с начала этой главы неверны (*прим. Vadi*)

229 То же.

230 То же.

231 То же.

проходит длинный путь через дополнительные измерения, «оставляя маленькие кружки, как желобки на грампластинке, то результат гравитационного воздействия должен быть значимым». Если движение браны жестко ограничено, добавляет он, «то получается особый вид компактификации и особый тип Калаби-Яу. Увидев это, вы узнаете, каким должен быть тип многообразия». Компактификации, о которых идет здесь речь, представляют собой многообразия, у которых модули стабилизированы, что подразумевает, в частности, наличие искривленной геометрии и искривленной горловины.²³²

Установление формы пространства Калаби-Яу, включая форму его горловины, потребует точных измерений спектрального индекса и обнаружения не-гауссовости, гравитационных волн, а также космических струн. Шиу предлагает запастись терпением. «Хотя мы уверены в Стандартной модели, эта модель не возникла одновременно. Она родилась из последовательности экспериментов, проводившихся много лет. Сейчас нам необходимо выполнить множество измерений, чтобы убедиться, действительно ли существуют дополнительные измерения или действительно ли за всем этим стоит теория струн».²³³

Главная цель исследований заключается не только в том, чтобы прощупать геометрию скрытых измерений, но и в том, чтобы проверить теорию струн в целом. Макаллистер, между прочим, полагает, что этот подход может дать нам наилучший шанс проверить теорию. «Возможно, теория струн предскажет конечный класс моделей, ни одна из которых не будет соответствовать наблюдаемым свойствам ранней Вселенной, и в таком случае мы могли бы сказать, что наблюдения исключили теорию струн. Некоторые модели уже отброшены, что вдохновляет, потому что это означает, что современные данные действительно позволяют выявить различие между моделями».

Она добавляет, что, несмотря на то что такое заявление не является абсолютной новостью для физиков, оно является новым для теории струн, которая подлежит экспериментальной проверке. И продолжая свою мысль, Макаллистер говорит, что в настоящее время инфляция в искривленной горловине является одной из лучших моделей, которые мы до сих пор создали, «но реально инфляция может и не иметь места в искривленных горловинах, даже если картина будет выглядеть безупречно».²³⁴

Наконец, Рэчел Бин соглашается, что «инфляционные модели в искривленных горловинах могут не дать ожидаемого ответа. Но эти модели основаны на геометриях, вытекающих из теории струн, на основании которой мы можем сделать детальные предсказания, которые затем можно проверить. Другими словами, это хорошая отправная точка для старта».²³⁵

Хорошей новостью является то, что для старта существует не единственная отправная точка. В то время как одни исследователи прочесывают ночное (или дневное) небо в поисках признаков дополнительных измерений, глаза других нацелены на Большой адронный коллайдер. Обнаружение намеков на существование дополнительных измерений не является приоритетной задачей коллайдера, но в списке его заданий стоит достаточно высоко.

Самой логичной отправной точкой для струнных теоретиков является поиск суперсимметричных партнеров уже известных частиц. Суперсимметрия вызывает интерес у многих физиков, а не только у струнных теоретиков: суперсимметричные партнеры, обладающие самой маленькой массой, а это могут быть нейтралы, гравитино или снейтрино, чрезвычайно важны в космологии, поскольку они считаются главными кандидатами на роль темной материи. Предположительная причина, по которой мы еще не наблюдали эти частицы и пока они остаются для нас невидимыми и, следовательно, темными, заключается в том, что они массивнее обычных частиц. В настоящее время не существует достаточно мощных коллайдеров, способных рожать эти более тяжелые

232 То же.

233 То же.

234 То же.

235 То же.

«суперпартнеры», поэтому на Большой адронный коллайдер возлагаются большие надежды.

В моделях на основе теории струн, разработанных Кумруном Вафой из Гарвардского университета и Джонатаном Хекманом из Института перспективных исследований, гравитино – гипотетический суперпартнер гравитона (частицы, ответственной за гравитацию) – является самым легким суперпартнером. В отличие от более тяжелых суперпартнеров, гравитино должен быть абсолютно стабильным, так как ему не на что распадаться. Гравитино в вышеуказанной модели составляет большую часть темной материи Вселенной. Хотя гравитино характеризуется слишком слабым взаимодействием, чтобы его можно было наблюдать с помощью Большого адронного коллайдера, Вафа и Хекман полагают, что другая теоретическая суперсимметричная частица – тау-слептон (*stau*), суперпартнер так называемого тау-лептона – должна быть стабильной где-то в диапазоне от секунды до часа, а это больше чем достаточно, чтобы ее зафиксировали детекторы коллайдера.

Обнаружение таких частиц подтвердит важный аспект теории струн. Как мы уже видели, многообразия Калаби-Яу были тщательно выбраны струнными теоретиками в качестве подходящей геометрии для дополнительных измерений, отчасти из-за суперсимметрии, автоматически встроенной в их внутреннюю структуру.

Без преувеличения можно сказать, что обнаружение признаков суперсимметрии на Большом адронном коллайдере будет обнадеживающей новостью для защитников теории струн и объектов Калаби-Яу. Бёрт Оврут объясняет, что характеристики суперсимметричных частиц сами могут рассказать нам о скрытых измерениях, «потому что способ компактификации многообразия Калаби-Яу влияет на вид суперсимметрии и уровень суперсимметрии, которые вы получаете. Вы можете обнаружить компактификации, которые сохраняют суперсимметрию, или те, что разрушают ее».²³⁶

Подтверждение суперсимметрии само по себе не подтверждает теорию струн, но, по крайней мере, указывает в том же направлении, свидетельствуя, что часть истории, которую рассказывает теория струн, является верной. С другой стороны, если мы не найдем суперсимметричных частиц, это не будет означать краха теории струн. Это может означать, что мы ошиблись в расчетах и частицы находятся за пределами досягаемости коллайдера. Вафа и Хекман, например, допускают такую возможность, что коллайдер может рождать полустабильные и электрически нейтральные частицы вместо тау-слептонов, которые непосредственно невозможно зарегистрировать. Если окажется, что суперпартнеры являются чуть более массивными, чем может рождать этот коллайдер, то потребуются более высокие энергии, чтобы выявить их и, следовательно, придется долго ждать нового прибора, который, в конце концов, заменит Большой адронный коллайдер.

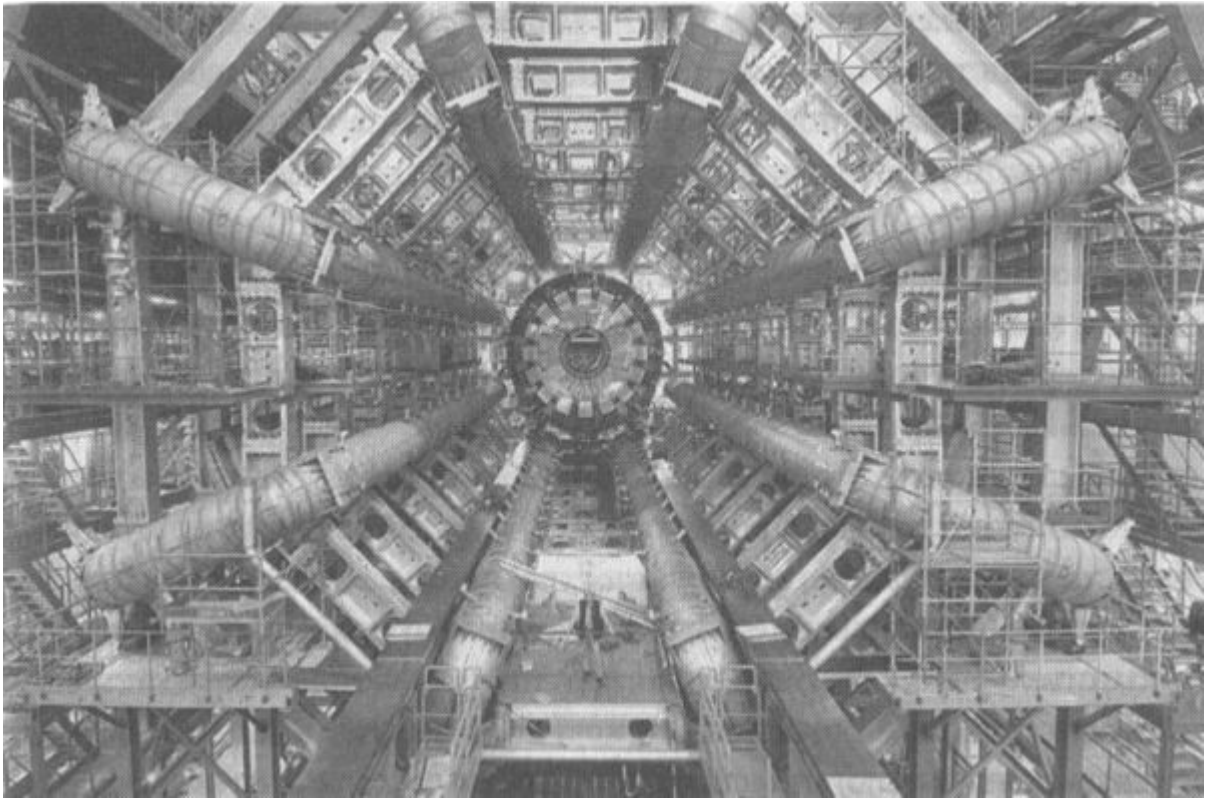


Рис. 12.2. Эксперименты на Большом адронном коллайдере в лаборатории ЦЕРНа в Женеве могут обнаружить признаки дополнительных измерений или существования суперсимметричных частиц. Здесь показана аппаратура для эксперимента с детектором ATLAS (любезно предоставлено ЦЕРНом)

Есть небольшой шанс, что Большой адронный коллайдер сможет обнаружить более прямое и менее сомнительное доказательство существования дополнительных измерений, предсказываемых теорией струн. В экспериментах, уже запланированных на этой установке, исследователи будут искать частицы с признаками дополнительных измерений там, откуда они родом, – так называемые частицы Калуцы-Клейна. Суть идеи заключается в том, что осцилляции в измерениях высокого порядка могут проявляться в виде частиц в нашем четырехмерном мире. Мы можем увидеть или остатки распада частиц Калуцы-Клейна или, может быть, даже признаки частиц, исчезающих из нашего мира вместе с энергией и переходящих в более многомерные области.

Невидимое движение в дополнительных измерениях сообщит частице импульс и кинетическую энергию, поэтому ожидается, что частицы Калуцы-Клейна будут тяжелее, чем их медленные четырехмерные коллеги. В качестве примера можно привести гравитоны Калуцы-Клейна. Они будут выглядеть как обычные гравитоны, будучи частицами-переносчиками гравитационного взаимодействия, только они будут тяжелее за счет дополнительного импульса. Один из способов выделить такие гравитоны среди огромного моря других частиц, рождаемых коллайдером, – обратить внимание не только на массу частицы, но и на ее спин. Фермионы, такие как электроны, имеют определенный угловой момент, который мы квалифицируем как спин-1/2. Бозоны, такие как фотоны и глюоны, имеют чуть больший угловой момент, квалифицируемый как спин-1. Любые частицы, у которых на коллайдере будет обнаружен спин-2, вероятно, являются гравитонами Калуцы-Клейна.

Такое открытие будет иметь большое значение, так как физики не только поймут первый проблеск долгожданной частицы, но и получат убедительное доказательство существования самих дополнительных измерений. Обнаружение существования, по крайней мере, одного дополнительного измерения является потрясающим открытием само по себе, но Шую и его коллегам хотелось пойти дальше и получить подсказки, указывающие на

геометрию этого дополнительного пространства. В 2008 году в статье, написанной совместно с Ундервудом, Девином Уолкером из Калифорнийского университета Беркли и Катериной Журек из Висконсинского университета, Шуй и его команда обнаружили, что небольшое изменение в форме дополнительных измерений вызывает огромные – от 50% до 100% – изменения, как в массе, так и в характере взаимодействия гравитонов Калуцы-Клейна. «Когда мы чуть-чуть изменили геометрию, числа изменились кардинально», – замечает Андервуд.²³⁷

Хотя анализ, выполненный Шуем с сотрудниками, далек от того, чтобы делать выводы о форме внутреннего пространства или уточнять геометрию Калаби-Яу, он дает некоторую надежду использовать данные экспериментов, чтобы «сократить класс разрешенных форм до небольшого диапазона». «Секрет нашего успеха лежит в кросс-корреляции между разными типами экспериментов в космологии и физике высоких энергий», – говорит Шиу.²³⁸

Масса частиц, регистрируемых на Большом адронном коллайдере, также даст нам намеки на размер дополнительных измерений. Дело в том, что для частиц это проход в многомерную область, и чем меньше эти области, тем тяжелее будут частицы. Вы можете спросить, сколько энергии необходимо для прогулки по проходу. Вероятно, немного. Но что, если проход окажется не коротким, но очень узким? Тогда проход через туннель выльется в борьбу за каждый дюйм пути, сопровождаемый, без сомнения, проклятиями и обещаниями, и конечно, большей затратой энергии. Вот примерно то, что здесь происходит, а говоря техническим языком, все сводится к принципу неопределенности Гейзенберга, который гласит, что импульс частицы обратно пропорционален точности измерения ее местоположения. Иначе говоря, если волна или частица зажаты в очень, очень крошечном пространстве, где ее положение ограничено очень узкими границами, то она будет иметь огромный импульс и соответственно большую массу. И наоборот, если дополнительные измерения огромны, то волна или частица будет иметь больше места для движения и соответственно обладать меньшим импульсом и обнаружить их будет легче.

Однако здесь скрыта ловушка: Большой адронный коллайдер зафиксирует такие вещи, как гравитоны Калуцы-Клейна, только если эти частицы много, много легче, чем предполагалось, а это говорит о том, что или дополнительные размерности чрезвычайно искривлены, или они должны быть намного больше планковского масштаба, традиционно принятого в теории струн. Например, в модели искривления Рандалла-Сандрама пространство с дополнительными измерениями ограничено двумя бранами, между которыми находится свернутое пространство-время. На одной бране – высокоэнергетической, гравитация сильная; на другой бране – низкоэнергетической, гравитация слабая. Вследствие такого расположения масса и энергия изменяются радикально в зависимости от положения пространства по отношению к этим двум бранам. Это означает, что массу элементарных частиц, которую мы обычно рассматривали в пределах планковской шкалы (порядка 10 электрон-вольт), придется «перемасштабировать» до более близкого диапазона, то есть до 10^{28} электрон-вольт, или 1 тераэлектронвольта, что уже соответствует диапазону энергий, с которыми работает коллайдер.

Размер дополнительных измерений в этой модели может быть меньше, чем в обычных моделях теории струн (хотя такое требование не выдвигается), в то время как сами частицы, вероятно, должны быть намного легче и, следовательно, обладать меньшей энергией, чем это предполагается.

Другой новаторский подход, рассматриваемый сегодня, был впервые предложен в 1998 году физиками Нимой Аркани-Хамедом, Савасом Димопулосом и Гиа Двали, когда все они работали в Стэнфорде. Оспаривая утверждение Оскара Клейна о том, что мы не можем видеть никаких дополнительных измерений из-за их малого размера, трио физиков, которых обычно называют аббревиатурой АДД, заявили, что дополнительные измерения могут быть больше планковской длины, по крайней мере 10^{-12} см и, возможно, даже больше, до 10^{-1} см (1 миллиметр). Они утверждали, что такое было бы возможным, если бы наша Вселенная

²³⁷ То же.

²³⁸ То же.

«застряла» на трехмерной бране с дополнительным измерением – временем и если этот трехмерный мир – все, что мы можем видеть.

Это может показаться довольно странным аргументом: ведь идея о том, что дополнительные измерения очень маленькие, является допущением, на котором построено большинство моделей теории струн. Но оказывается, что общепринятый размер пространства Калаби-Яу, часто воспринимаемый как нечто само собой разумеющееся, «все еще является открытым вопросом, – полагает Полчински. – Математикам размер пространства неинтересен. В математике удвоение чего-либо является обыденным делом. Но в физике размер имеет значение, поскольку он говорит вам, сколько энергии требуется, чтобы увидеть объект».²³⁹

Сценарий АДД позволяет не только увеличить размер дополнительных измерений; он сужает энергетическую шкалу, при которой гравитация и другие силы становятся унифицированными, и следовательно, сужает планковскую шкалу. Если Аркани-Хамед и его коллеги правы, то энергия, генерируемая при столкновении частиц на Большом адронном коллайдере, может проникать в высшие размерности, что будет выглядеть как явное нарушение законов сохранения энергии. В их модели даже сами струны, базовые единицы теории струн, могут стать достаточно большими для наблюдения – о чем раньше невозможно было даже думать. Команду АДД вдохновляет возможность рассмотреть проблему очевидной слабости гравитации по сравнению с другими взаимодействиями, учитывая, что убедительного объяснения этого неравенства сил пока не существует. Теория АДД предлагает новый ответ: гравитация не слабее других сил, но только кажется слабее, потому что в отличие от других взаимодействий она «утекает» в другие измерения так, что мы чувствуем только крошечную долю ее истинной силы. Можно провести аналогию: когда сталкиваются бильярдные шары, часть кинетической энергии их движения, ограниченного двумерной поверхностью стола, ускользает в форме звуковых волн в третье измерение.

Выяснение подробностей такой утечки энергии предполагают следующие стратегии наблюдения: гравитация, как нам известно, в четырехмерном пространстве-времени подчиняется закону обратных квадратов. Гравитационное притяжение объекта обратно пропорционально квадрату расстояния от него. Но если мы добавим еще одно измерение, гравитация будет обратно пропорциональна кубу расстояния. Если у нас десять измерений, как это положено в теории струн, гравитация будет обратно пропорциональна восьмой степени расстояния. Другими словами, чем больше дополнительных измерений, тем слабее гравитация по сравнению с той, которая измеряется с нашей четырехмерной точки зрения. Электростатическое взаимодействие также обратно пропорционально квадрату расстояния между двумя точечными зарядами в четырехмерном пространстве-времени и обратно пропорционально восьмой степени расстояния в десятимерном пространстве-времени. Если рассматривать гравитацию на таких больших расстояниях, какими принято оперировать в астрономии и космологии, то закон обратных квадратов работает хорошо, потому что в этом случае мы находимся в пространстве трех гигантских измерений плюс время. Мы не заметим гравитационного притяжения в необычном для нас новом направлении, которое соответствует скрытому внутреннему измерению, до тех пор пока не перейдем на достаточно маленький масштаб, чтобы перемещаться в этих измерениях. А так как физически нам запрещено это делать, то нашей главной и, вероятно, единственной надеждой остается искать признаки дополнительных измерений в форме отклонений от закона обратных квадратов. Именно этот эффект физики из Вашингтонского университета, университета Колорадо, Стэнфордского и других университетов ищут путем выполнения гравитационных измерений на малых расстояниях.

Несмотря на то что исследователи располагают различным экспериментальным оборудованием, их цели, тем не менее, одинаковы: измерить силу гравитации в малом масштабе с такой точностью, о которой никто ранее и не мечтал. Команда Эрика Адельбергера из Вашингтонского университета, например, выполняет эксперименты по

«крутильному балансу», в духе тех опытов, что проводил Генри Кавендиш в 1798 году. Основная цель заключается в том, чтобы сделать вывод о силе гравитации путем измерения вращающего момента на крутильном маятнике.

Группа Адельбергера использует небольшой металлический маятник, висящий над двумя металлическими дисками, которые оказывают гравитационное воздействие на маятник. Силы притяжения от двух дисков сбалансированы таким образом, что если ньютоновский закон обратных квадратов работает точно, то маятник вообще не будет крутиться.

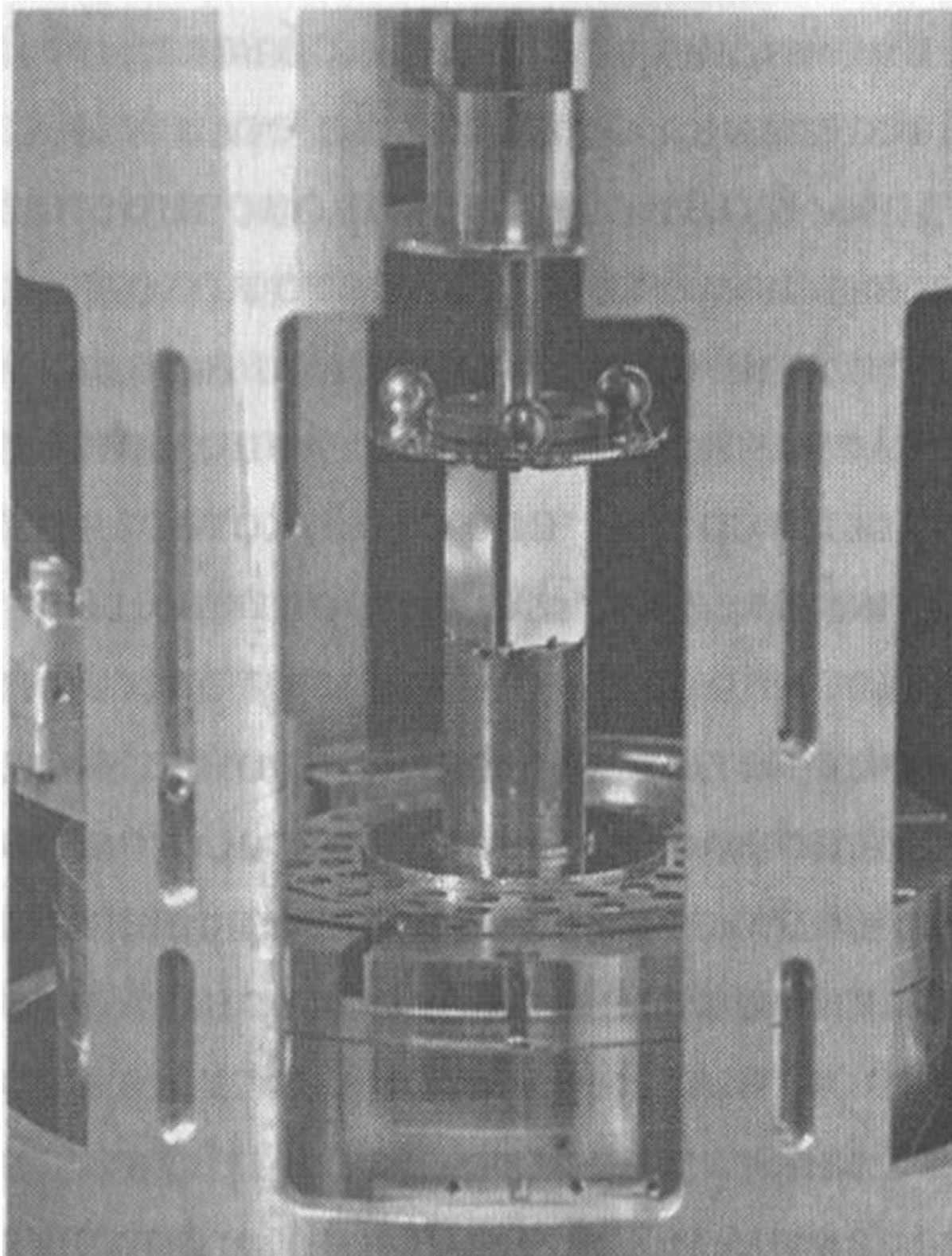


Рис. 12.3. Бесконечно малые вращения, вызываемые гравитационным притяжением,

измеряют на малых масштабах и с большой точностью с помощью маятника Mark VI, разработанного и введенного в эксплуатацию исследовательской группой «Эёт-Уош» из Вашингтонского университета. Если наблюдения позволят обнаружить отклонение от закона обратных квадратов на малых расстояниях, это может сигнализировать о наличии дополнительных измерений, предсказанных теорией струн (Вашингтонский университет/Мэри Левин)

В экспериментах, выполненных на данный момент, маятник не показал никаких признаков кручения при измерении с точностью до одной десятой части миллионных долей градуса. Размещая маятник все ближе к дискам, исследователи исключили существование измерений, радиус которых больше 40 микрон. В своих будущих экспериментах Адельбергер намерен проверить закон обратных квадратов на еще меньших масштабах, доведя верхнюю оценку до 20 микрон. Адельбергер считает, что это не предел. Но чтобы провести измерения на еще меньших масштабах, необходим другой технологический подход.

Адельбергер считает гипотезу о больших дополнительных измерениях революционной, но замечает, что это не делает ее истинной.²⁴⁰ Нам необходимы новые тактики не только для исследования вопроса о больших измерениях, но также и для того, чтобы найти ответы на более общие вопросы, касающиеся существования дополнительных измерений и истинности теории струн.

Таково положение дел на сегодня – множество различных идей, из которых мы обсудили только небольшую горстку, и недостаточно сенсационные результаты, чтобы о них говорить. Заглядывая в будущее, Шамит Качру, например, надеется, что ряд экспериментов, планируемых или еще не придуманных, предоставит много возможностей увидеть что-то новое. Однако он признает возможность и менее радужного сценария, предполагающего, что мы живем в разочаровывающей Вселенной, дающей не так уж много эмпирических подсказок. «Если мы ничего не узнаем из космологии, ничего из экспериментов по ускорению частиц и ничего не извлечем из лабораторных экспериментов, тогда мы попросту застряли», – говорит Качру. Хотя он рассматривает такой сценарий как маловероятный, поскольку подобная ситуация не характерна ни для теории струн, ни для космологии, он замечает, что недостаток данных будет влиять аналогичным образом на другие области науки.²⁴¹

Что мы будем делать дальше, после того как с пустыми руками достигнем конца этого отрезка пути? Окажется ли это для нас еще большим испытанием, чем поиск гравитационных волн в КМФ или бесконечно малых отклонений при измерениях на крутильных весах, в любом случае это будет испытанием нашего интеллекта. Каждый раз, когда происходит нечто подобное, когда каждая хорошая идея развивается не так, как хотелось бы, а каждая дорога приводит в тупик, вы или сдаетесь или пытаетесь придумать другие вопросы, на которые можно постараться найти ответы.

Эдвард Виттен, который, как правило, консервативен в своих заявлениях, смотрит в будущее с оптимизмом, чувствуя, что теория струн является слишком хорошей, чтобы не быть правдой. Хотя он признает, что в ближайшее время будет трудно точно определить, где мы находимся. «Чтобы проверить теорию струн, на нашу долю, вероятно, должно выпасть большое счастье, – говорит он. – Оно может звучать, как звучит тонкая струна, на которой записаны чьи-то мечты о теории всего, почти такая же тонкая, как сама космическая струна. Но, к счастью, в физике существует много способов поймать удачу».²⁴²

У меня нет возражений против этого утверждения, и я склонен согласиться с Виттеном, потому что считаю это мудрой политикой. Но если физики решат, что удача отвернулась от них, они, возможно, захотят обратиться к своим коллегам-математикам, которые с удовольствием возьмут на себя часть решения этой задачи.

240 То же.

241 То же.

242 То же.

Тринадцатая глава

Истина, красота и математика

Насколько далеко могут зайти исследователи в своих попытках изучить скрытые измерения Вселенной при отсутствии физических доказательств? Аналогичный вопрос можно задать и струнным теоретикам, пытающимся создать всеобъемлющую теорию природы, не опираясь на обратную связь с экспериментом. Это похоже на исследование огромной темной пещеры с помощью только колеблющегося пламени свечи. Хотя некоторым исследования в таких обстоятельствах могут показаться чистым безумием, подобная ситуация далеко не беспрецедентна в истории науки. На ранних этапах создания теории периоды блуждания во тьме – скорее правило, чем исключение, особенно когда речь идет о развитии и продвижении широкомасштабных идей. На подобных этапах, когда нет экспериментальных данных, на которые можно опереться, математическая красота – это все, что может служить нам путеводной нитью.

Поль Дирак «называл математическую красоту единственным критерием для выбора пути движения вперед в теоретической физике», – писал физик Питер Годдар.²⁴³ Иногда такой подход полностью себя оправдывает, как это было в случае прогноза Дирака о существовании позитрона (как электрона с положительным зарядом), что стало возможным только потому, что математическое рассуждение навело его на мысль, что такие частицы должны существовать. Действительно, спустя несколько лет позитрон был открыт, подтвердив тем самым его веру в математику.

Действительно, мы снова и снова открываем для себя, что идеи, которые опираются на математику и соответствуют критерию простоты и красоты, обычно являются теми идеями, которые мы, в конце концов, наблюдаем реализованными в природе. Совершенно непостижимо, почему это происходит. Например, физик Юджин Вигнер пребывал в недоумении от «необоснованной эффективности математики в естественных науках», то есть остается загадкой, как чисто математические конструкции, не имеющие видимой связи с миром природы, тем не менее описывали этот мир с такой точностью.²⁴⁴

Физик Чженьнин Янг тоже удивился, обнаружив, что уравнения Янга-Миллса, описывающие взаимодействия между частицами, уходят своими корнями в физические калибровочные теории, обладающие удивительным сходством с идеями теории расслоения, которую математики начали разрабатывать тридцатью годами раньше и, по словам Янга, «без ссылки на физический мир». Когда он спросил геометра Ч. Ш. Черна, как такое возможно, что «математики выдумали эти понятия из ниоткуда», Черн запротестовал: «Нет, нет. Эти понятия не выдуманы. Они естественны и реальны».²⁴⁵

Конечно, нет недостатка в абстрактных идеях, пришедших к математикам чуть ли не из воздуха, которые, как обнаруживалось впоследствии, описывают природные явления. Не все они, между прочим, были продуктами современной математики. Считается, что конические сечения – круг, эллипс, парабола и гипербола – кривые, получаемые при сечении конуса плоскостью, были открыты греческим геометром Менехмом примерно в 300 году до нашей эры и широко использовались столетие спустя Аполлонием Пергским в его трактате «*Коники*». Однако эти формы не находили широкого научного применения до начала XVII века, когда Кеплер обнаружил, что орбиты планет Солнечной системы являются эллипсами.

Аналогично фуллерены или бакминстерфуллерены, новая форма углерода, содержащая 60 атомов углерода, соединенные в сфероподобную структуру с пятиугольными и

²⁴³ Peter Goddard, ed., *Paul Dirac: The Man and His Work* (New York: Cambridge University Press, 1998).

²⁴⁴ Eugene Wigner, “The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences,” *Communications in Pure and Applied Mathematics* 13 (February 1960).

²⁴⁵ Chen Ning Yang, *S. S. Chem: A Great Geometer of the 20th Century* (Boston: International Press, 1998), p. 66.

шестиугольными гранями, была открыта химиками в 1980-е годы. А форма этих молекул была описана Архимедом более двух тысяч лет назад.²⁴⁶ Теория узлов, раздел чистой математики, сформулированная в конце XIX века, нашла свое применение спустя более чем столетие в теории струн и в исследованиях ДНК.

Трудно сказать, почему математические идеи находят подтверждение в природе. Ричард Фейнман находил в той же степени сложным и объяснение, почему «каждый из наших физических законов может быть представлен чисто математической формулировкой». Ключ к разгадке, как он считал, может таиться в связи между математикой, природой и красотой. «Тем, кто не знает математики, – считал Фейнман, – сложно ощутить красоту, глубочайшую красоту природы».²⁴⁷

Но если красота и является ориентиром, позволяющим выбрать верный путь, по крайней мере пока у нас нет более объективных критериев, следует оставить все попытки дать ей какое бы то ни было определение, предоставив это поэтам. Хотя математики и физики рассматривают концепцию красоты несколько иначе: в обеих дисциплинах мы называем красивыми, как правило, те идеи, которые, с одной стороны, могут быть изложены четко и лаконично, а с другой – обладают чрезвычайной мощностью и широким охватом. Тем не менее для такого субъективного понятия, как красота, большую роль неизбежно играет и личный вкус. Я вспоминаю тост, произнесенный на свадьбе старого холостяка, который остепенился сравнительно поздно, после многих лет холостяцкой жизни. Его знакомые гадали, какая девушка сумеет заставить этого парня связать себя узами брака? Старого холостяка это тоже интересовало. «Ты узнаешь, когда увидишь ее», – неоднократно говорил ему друг задолго до того, как холостяк нашел свою единственную.

Я знаю, что он имел в виду. У меня были аналогичные ощущения, когда я встретил свою будущую жену в математической библиотеке Беркли много лет назад, хотя сложно передать словами чувства, охватившие меня в тот момент. Не хочу обидеть свою жену, но похожее неуловимо трепетное чувство эйфории я испытал, когда доказал гипотезу Калаби в середине 1970-х годов. Закончив доказательство гипотезы после месяцев напряженных усилий, растянувшихся на годы, я, наконец, смог расслабиться и насладиться комплексными многомерными пространствами, открытыми мною. Можно сказать, что это была любовь с первого взгляда, хотя после работы над задачей, мне кажется, что я уже хорошо знал эти объекты, даже когда впервые увидел их. Может быть, моя уверенность была неуместной, но тогда я чувствовал (и чувствую до сих пор), что эти пространства, возможно, будут каким-то образом играть чрезвычайно важную роль в физическом мире. Теперь все зависит от струнных теоретиков или, возможно, от исследователей в других, не связанных с ними областях науки, которые покажут, была ли моя догадка правильной.

246 Robert Osserman, *Poetry of the Universe* (New York: Anchor Books, 1996), pp. 142–143.

247 Richard P. Feynman, *The Character of Physical Law* (New York: Modern Library, 1994), p. 50.

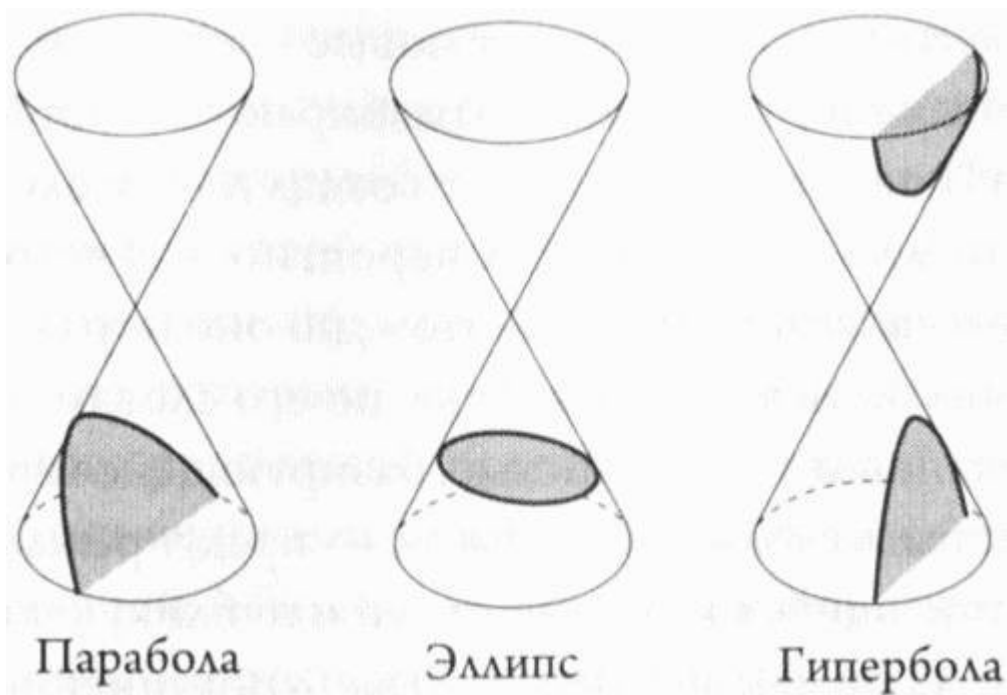


Рис. 13.1. Конические сечения – это три фундаментальные кривые, которые получаются при пересечении конуса плоскостью (или фактически двух конусов, прикрепленных друг к другу острыми концами). Эти три кривые: парабола, эллипс (в частном случае – окружность) и гипербола

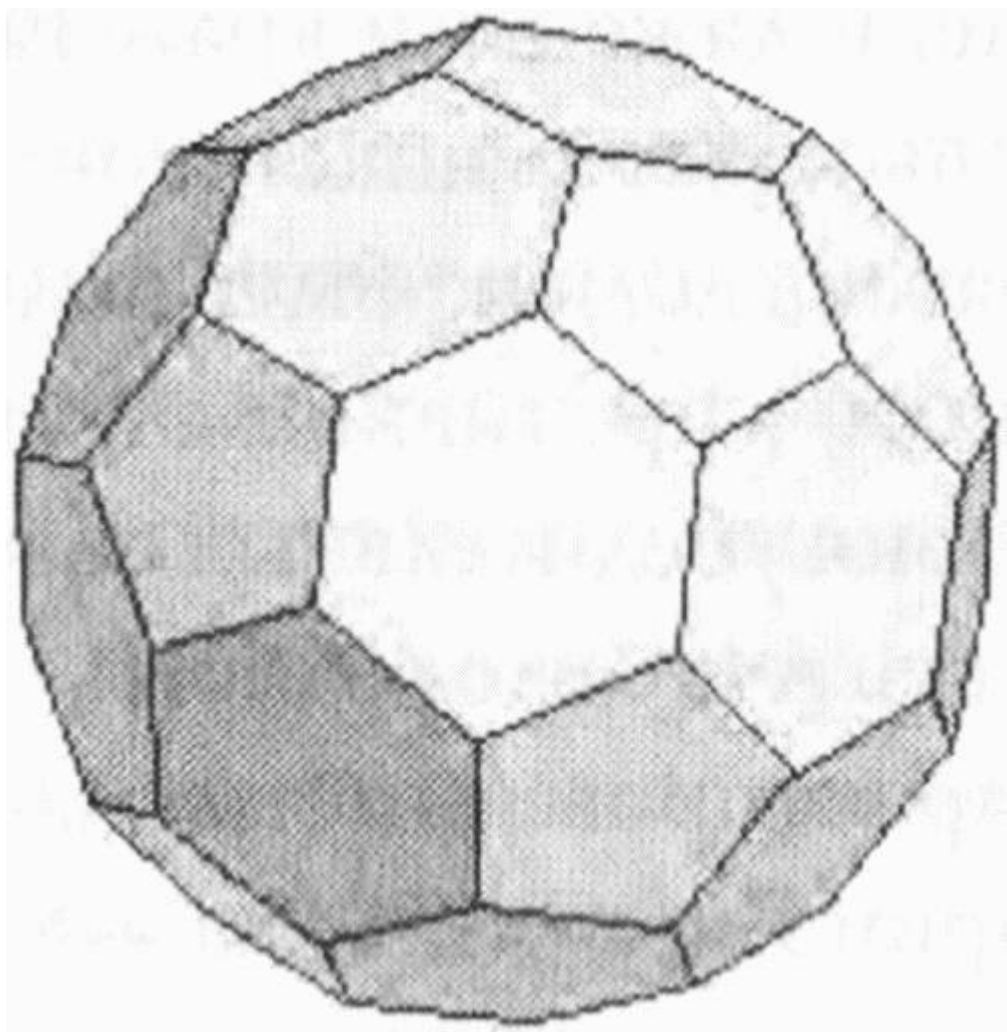


Рис. 13.2. В то время как правильный икосаэдр состоит из двадцати треугольных граней, показанный на рисунке усеченный икосаэдр состоит из двадцати шестиугольных и двенадцати пятиугольных граней, причем никакие два пятиугольника не имеют общей стороны. В отличие от правильных икосаэдров, которые относятся к Платоновым телам, усеченные икосаэдры относятся к архимедовым телам, названным в честь греческого математика, исследовавшего эти фигуры более двух тысяч лет назад. Эта форма напоминает футбольный мяч и один из вариантов так называемых фуллеренов – молекулярной структурированной формы углерода, состоящей из шестидесяти атомов, открытой в 1985 году химиками Гарольдом Крото и Ричардом Смэлли. Термин *фуллерен* является сокращением от *бакминстерфуллерена*, класса молекул, названного в честь архитектора Ричарда Бакминстера Фуллера, изобретателя геодезического купола похожей формы

По утверждению математика Майкла Атья, струнным теоретикам должно быть приятно, «что то, с чем они “играют”, если даже это невозможно измерить экспериментально, может оказаться очень богатой... математической структурой, которая не только согласуется с теорией, но фактически открывает новые двери, дает новые результаты и т. д.... Очевидно, они кое в чем разбираются. Остается выяснить, является ли это “кое-что” тем, что Бог создал для Вселенной. Но если Бог создал это не для Вселенной, то, вероятно, для чего-то еще».²⁴⁸

Я не знаю, чем является это «кое-что», но оно поражает меня слишком сильно, чтобы быть ничем. Но Атья, по его словам, также осознает риск быть убаюканным элегантностью, базирующейся на зыбкой почве. «Красота может быть скользкой вещью», – предупреждает Джим Холт, скептически относящийся к теории струн и публикующий свои статьи в *«New Yorker»*.²⁴⁹ Или, как выразился Атья: «подчинение физики математике таит в себе опасность, поскольку может завести нас в область измышлений, воплощающих математическое совершенство, но слишком далеких от физической реальности или даже не имеющих с ней ничего общего».²⁵⁰

Безусловно, слепое следование математической красоте способно ввести нас в заблуждение, и даже если красота указывает нам верное направление, то одна лишь красота никогда не сможет привести нас к цели. В конце концов, красота должна быть подкреплена чем-то еще – чем-то более существенным, в противном случае наши теории никогда не выйдут за пределы уровня убедительных спекуляций, независимо от степени их обоснованности и правдоподобия.

«Красота не может гарантировать истины, – утверждал физик Роберт Миллс, соавтор теории Янга-Миллса. – У нас нет никаких логических оснований утверждать, что истина должна быть прекрасной, но наш опыт постоянно подсказывает, что следует ожидать красоту в самой сути вещей и использовать это ожидание в качестве руководства в поисках более глубокого теоретического понимания фундаментальных структур природы». И наоборот, добавляет Миллс, «если предложенная теория неэлегантна, мы считаем ее сомнительной».²⁵¹

Итак, где же заканчивается математика и начинается теория струн? Физик из Корнеллского университета Генри Тай считает, что «теория струн слишком красива, богата, креативна и утончена, чтобы ее не использовала природа. Это было бы слишком расточительно»²⁵². Только этого недостаточно, чтобы сделать теорию струн верной, а такие критические трактовки, как *«The Trouble with Physics»* и *«Not Even Wrong»*, сеют сомнения в общественном сознании в тот момент, когда сама эта теория находится в некотором упадке. Даже такой энтузиаст, как Брайан Грин, автор книги *«The Elegant Universe»* («Элегантная

248 Michael Atiyah, quoted in Patricia Schwarz, “Sir Michael Atiyah on Math, Physics and Fun,” The Official String Theory Web site, <http://www.superstringtheory.com/people/atiyah.html>.

249 Jim Holt, “Unstrung,” *New Yorker*, October 2, 2006, p. 86.

250 Michael Atiyah, “Pulling the Strings,” *Nature* 438 (December 22–29, 2005): 1,081.

251 Robert Mills, “Beauty and Truth,” in *Chen Ning Yang: A Great Physicist of the 20th Century*, ed. Shing-Tung Yau and C. S. Liu (Boston: International Press, 1995), p. 199.

252 Henry Tye (Cornell University), e-mail letter to author, December 19, 2008.

Вселенная»), признает, что физическая теория не может быть оценена только на основании элегантности: «Вы судите о ней на основании того, может ли она делать предсказания, которые будут подтверждены экспериментом».²⁵³

Во время написания этой книги я имел возможность обсуждать ее содержание со многими людьми, имеющими образование в соответствующей области, которым, по моему мнению, было бы интересно читать о подобного рода вещах. Когда они слышали, что книга связана с математическими основами теории струн, то часто их реакция была примерно следующей: «Подождите минуту. Разве с теорией струн что-нибудь не так?» Их вопросы предполагали, что написание книги о математических основах теории струн – это примерно то же, что книга о фантастических инженерных разработках, которые легли в основу строительства «Титаника». Мой коллега-математик, которому, вероятно, виднее, даже публично заявил, что поскольку «суд присяжных по теории струн еще не состоялся», нечего судить о математической базе, связанной с теорией струн.

Такое заявление подразумевает фундаментальное заблуждение о природе математики и ее отношении к эмпирическим наукам. В то время как окончательным доказательством в физике считается эксперимент, в математике это не так. Можно иметь миллиард частных свидетельств о том, что что-то является верным, но миллиард первое опрокинет все здание. До тех пор пока что-то полностью не доказано при помощи чистой логики, оно остается гипотезой.

В физике и других эмпирических науках истинность любого утверждения всегда является предметом ревизии. Теория тяготения Ньютона продержалась более двух столетий, но из-за присущих ей ограничений в конце концов была заменена теорией Эйнштейна, имеющей собственные ограничения, которые когда-нибудь приведут к замене ее теорией квантовой гравитации, например теорией струн. В то же время математика, на которой базируется ньютоновская механика, является на сто процентов верной и никогда не изменится.

Чтобы сформулировать теорию гравитации, Ньютону пришлось попутно изобрести математический анализ. Когда теория гравитации Ньютона оказалась бессильной объяснить новые эксперименты из-за присущих ей ограничений и была разработана общая теория относительности, мы не отказались от математического анализа. Мы держимся за математику, которая является не пустым звуком, но жизненной необходимостью, понимая, что ньютоновская механика представляет собой удивительно хороший инструмент для большинства ситуаций, хотя ее и нельзя применять в предельных случаях.

Теперь перейдем к более современным вещам, которые ближе моему сердцу. Тридцать с лишним лет назад я доказал существование пространств, которые сегодня называются многообразиями Калаби-Яу. И их существование вовсе не зависит от того, окажется ли теория струн всеобъемлющей теорией природы. Следует признать, что в доказательстве могут быть обнаружены слабые места и все аргументы могут рассыпаться, как карточный домик. Но в случае гипотезы Калаби доказательство было проверено столько раз, что вероятность найти ошибку, по существу, равна нулю. Не только пространства Калаби-Яу остались в физике, но и методы, которые я использовал для решения задачи, применяются с большим успехом для многих других математических задач, в том числе и для задач алгебраической геометрии, которые не имеют явных связей с исходной гипотезой.

Действительно, полезность пространств Калаби-Яу в физике в некотором смысле не имеет отношения к вопросу о важности математики. Риска показать нескромным, я мог бы добавить, что в 1982 году я получил медаль Филдса, одну из самых почетных наград в математике, главным образом за доказательство теоремы Калаби. Вы можете заметить, что эту награду мне вручили за несколько лет до того, как физики узнали о многообразиях Калаби-Яу и до появления на карте самой теории струн.

Что касается теории струн, то математика, лежащая в ее основе, или вытекающие из нее следствия, являются абсолютно верными, независимо от того, какое окончательное решение

253 Brian Greene, interview by Ira Flatow, “Big Questions in Cosmology,” *Science Friday*, NPR, April 3, 2009.

примет суд присяжных в отношении самой теории. Я пойду дальше: если математическая теория, лежащая в основе теории струн, является веской и строго доказанной, то она будет прочно стоять на ногах, независимо от того, живем ли мы на самом деле в десятимерной Вселенной, состоящей из струн и бран.

Что это может означать для физики? Как я уже упоминал, поскольку я математик, не мне судить о справедливости теории струн, но я выскажу некоторые идеи и замечания. Конечно, теория струн остается не только недоказанной, но и непроверенной. Тем не менее главным инструментом проверки работы физиков остается математическая последовательность теории, и пока теория струн выдержала этот экзамен с честью. Последовательность в данном случае означает отсутствие противоречий. Это означает, что если то, что вы вставляете в уравнения теории струн, является корректным, то и то, что вы получите с помощью этих уравнений, тоже должно быть корректным. Это означает, что когда вы делаете расчеты, результаты не расходятся и не стремятся к бесконечности. Функции остаются разумными и не превращаются в тарабарщину. Хотя этого далеко не достаточно, чтобы удовлетворить суровых критиков, но это важная отправная точка. На мой взгляд, в этой идее есть доля истины, даже если природа и не играет по такому сценарию.

Эдвард Виттен, похоже, разделяет эту точку зрения. Он утверждает, что математическая непротиворечивость «была одним из самых надежных проводников для физиков в минувшем столетии».²⁵⁴

Учитывая, насколько трудно разработать эксперимент, который мог бы проникнуть в физику планковских масштабов, и насколько дорогим он может быть, если нам когда-нибудь удастся его придумать, то все, что мы, вероятно, сможем сделать, это именно проверка теории на непротиворечивость, которая, тем не менее, по словам математика из Беркли Николая Решетихина, «может быть очень мощной». «Именно поэтому вершина теоретической физики все больше становится математической. Если ваши идеи не являются математически непротиворечивыми, то их можно сразу же отбросить».²⁵⁵

Теория струн не только математически непротиворечива, но и, вроде бы, соответствует всему, что мы знаем о физике элементарных частиц, а также предлагает новые пути для решения проблем пространства и времени – гравитации, черных дыр и других головоломок. Мало того, что теория струн согласуется с устоявшейся, хорошо проверенной физикой квантовых теорий поля, но, похоже, и неразрывно связана с этими теориями. «Никто не сомневается, что, например, такие калибровочные теории, как теория Янга-Миллса для описания сильного взаимодействия, дают фундаментальное описание природы, – утверждает Роберт Дикграаф, физик из Амстердамского университета. – Но калибровочные теории фундаментально связаны со струнами». Это следует из принципа дуализма, который декларирует эквивалентность теории поля и струнной теории, демонстрируя взгляд на одну и ту же задачу с разных точек зрения. «Невозможно доказать принадлежность теории струн к физике, поскольку она неразрывно связана со всеми вещами, которые нам дороги, – добавляет Дикграаф. – Поэтому мы не можем избавиться от теории струн, независимо от того, описывает она нашу Вселенную или нет. Это всего лишь еще один инструмент для осмысления фундаментальных свойств физики».²⁵⁶

Теория струн также стала первой непротиворечивой теорией квантовой гравитации – самого большого вопроса современной физики. Но она пошла еще дальше. «Теория струн обладает прекрасной предсказательной силой в отношении гравитации», – утверждает Виттен. Под этим он подразумевает, что теория струн делает больше, чем просто описывает гравитацию. «Этот феномен встроен в рамки теории, и тот, кто ничего не знает о гравитации, мог бы открыть ее, как естественное следствие самой теории».²⁵⁷ В дополнение к квантованию гравитации теория струн подошла к решению таких задач, как проблема

254 K. C. Cole, "A Theory of Everything," *New York Times Magazine*, October 18, 1987.

255 Nicolai Reshetikhin (University of California, Berkeley), interview with author, June 5, 2008.

256 Robbert Dijkgraaf (University of Amsterdam), interview with author, February 8, 2007.

257 Brian Greene, *The Elegant Universe* (New York: Vintage Books, 2000), p. 210.

энтропии черной дыры, которую не удастся решить другими средствами. В этом смысле теорию струн уже можно считать успешной теорией на определенном уровне, даже если она не станет окончательной теорией физики.

Хотя этот вопрос вынесен на обсуждение, можно не сомневаться, что теория струн приведет к бесценному кладу новых идей, новых инструментов и новых направлений в математике. Например, открытие зеркальной симметрии привело к появлению «семейных предприятий» в области алгебраической и исчислительной геометрии. Зеркальная симметрия, то есть идея, что большинство пространств Калаби-Яу имеют зеркального партнера с другой топологией, но соответствующего той же физике, была открыта в контексте теории струн, а ее справедливость подтверждена математикой. Это, как мы видели, делается по типичной схеме: теория струн может дать понятия, намеки и подсказки, а математики в большинстве случаев обеспечивают доказательство.

Одна из причин, по которой зеркальная симметрия представляет такую ценность для математики, заключается в том, что сложные вычисления для одного пространства Калаби-Яу могут оказаться намного проще для его зеркального партнера. В результате, исследователи смогли в короткие сроки решить многовековые проблемы математики. Гомологическая зеркальная симметрия и теория Строминджера-Яу-Заслоу (Strominger-Yau-Zaslow – SYZ, СЯЗ), которую разрабатывают с середины 1990-х годов, вскрыли неожиданные, но полезные связи между симплектической геометрией и алгебраической геометрией – двумя разделами математики, которые ранее рассматривались отдельно. Хотя зеркальная симметрия была открыта при исследовании теории струн, истинность ее математического фундамента не зависит от теории струн. «Это явление, – отмечает Эндрю Строминджер, – можно описать так, что оно вообще не будет включать теорию струн, [но] прошло бы много времени, пока бы мы его обнаружили, если бы у нас не было теории струн».²⁵⁸

Приведу другой пример: в работе 1996 года я и мой бывший аспирант Эрик Заслоу использовали идею из теории струн для решения классической задачи алгебраической геометрии, связанной с вычислением количества так называемых рациональных кривых на четырехмерной поверхности К3. Напомню, что термин К3 относится к целому классу поверхностей – не к одной, а к бесконечному их числу. «Кривые» в данном случае являются двухмерными римановыми поверхностями, определяемыми алгебраическими уравнениями, и представляют собой топологические эквиваленты сфер, встроенных в эту поверхность. Количество этих кривых, оказывается, зависит только от количества *узлов*, расположенных на кривой, или точек, указывающих, где кривая пересекает саму себя. Например, цифра «восемь» имеет один узел, тогда как у круга количество узлов равно нулю.

Рассмотрим еще один пример с узлами, который связан с нашим предыдущим обсуждением конифолдных переходов (в десятой главе): если взять двухмерный бублик и сжать одну из окружностей, проходящих сквозь дырку, до точки, то получим что-то похожее на рогалик с соединенными концами. Если разделить эти два конца и разорвать поверхность, то получится топологический эквивалент сферы. Таким образом, можно считать такой «прищипнутый» бублик или «соединенный рогалик» сферой с одним узлом (или пересечением). Точно так же можно перейти к поверхностям более высокого рода и посмотреть на бублик с двумя дырками: сначала сожмем в точку окружность на «внутренней стенке» между двумя дырками, затем сделаем аналогичную операцию где-нибудь на «наружной стенке» бублика. Объект с такими двумя точками сжатия фактически является сферой с двумя узлами, поскольку, если мы разделим эти две точки и разорвем поверхность, то получим сферу. Дело в том, что если начинать с поверхности более высокого рода, скажем, с двумя, тремя или более дырками, то можно получить кривую или сферу с большим количеством узлов.

Позвольте мне переформулировать задачу в алгебраической геометрии, которую мы пытались решить вначале: для поверхности К3 мы хотим определить количество

258 Andrew Strominger (Harvard University), interview with author, August 1, 2007.

рациональных кривых с g узлами, которые можно расположить на этой поверхности, для любого значения g (положительного целого числа). Используя обычные методы, математики придумали формулу, которая хорошо работает для кривых с шестью или меньшим количеством узлов, но не с большим. Заслоу и я приступили к решению более общей задачи, то есть к кривым с произвольным количеством узлов. Вместо обычного метода мы взяли теорию струн и рассмотрели задачу с точки зрения бран внутри пространства Калаби-Яу.

В соответствии с теорией струн существуют браны, связанные с поверхностью КЗ, которая состоит из кривых (или двухмерных поверхностей, как мы определили ранее), а также так называемого плоского линейного расслоения, присоединенного к каждой кривой. Чтобы получить представление о таком линейном расслоении, представим человека, идущего по экватору с палкой произвольной длины – пусть даже бесконечно длинной, – держа ее перпендикулярно экватору и касательно к поверхности сферы. В конце концов, палка опишет цилиндр, который называют *тривиальным линейным расслоением*. Если человек во время ходьбы перевернет палку на 180 градусов, то палка опишет ленту Мёбиуса. Кстати, оба этих линейных расслоения являются «плоскими», то есть они обладают нулевой кривизной.

Заслоу и я заметили, что если взять пространство всех бран, содержащих кривые фиксированного рода g , которые связаны с данной поверхностью КЗ, и затем вычислить эйлерову характеристику этого пространства, то полученное число будет точно равняться числу рациональных кривых с g узлами, которые вписываются в эту поверхность КЗ.

Таким образом, я и мой коллега переформулировали исходную задачу в другом виде, показав, что все сводится к получению эйлеровой характеристики пространства бран. Затем мы использовали дуализм теории струн, разработанный Кумруном Вафа и Виттеном, для вычисления эйлеровой характеристики. Таким образом, теория струн дала новый инструментарий для решения задачи, а также новый способ формализации проблемы. Ранее алгебраические геометры не могли решить эту задачу, поскольку они не рассматривали браны: им никогда не приходило в голову решить ее в терминах пространства модулей, включающего в себя совокупность всех возможных бран данного типа.

Хотя мы с Заслоу набросали общий подход, полное доказательство было получено только спустя несколько лет другими учеными – Джимом Брайаном из Университета Британской Колумбии и Найчунгом Конаном Лойнгом из Университета Миннесоты. В результате теперь у нас есть математическая теорема, которая является истинной безотносительно к истинности теории струн.

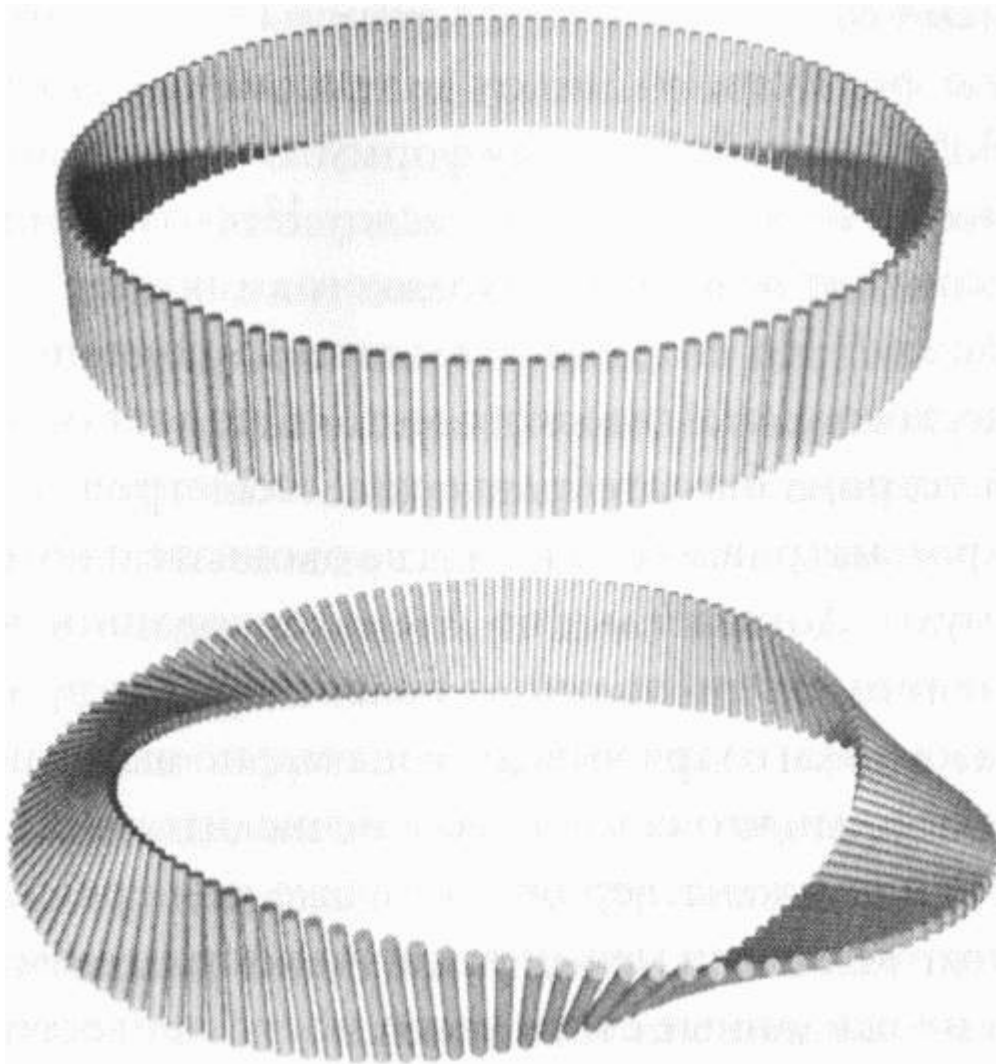


Рис. 13.3. Если вы идете по экватору и все время удерживаете палку параллельно земле по касательной к поверхности, то опишете цилиндр. Если, огибая земной шар, вы перевернете палку на 180 градусов, то опишете более сложную поверхность, имеющую одну, а не две стороны, называемую лентой Мёбиуса

Кроме того, формула, которую мы вывели для расчета рациональных кривых на поверхностях КЗ, дает функцию для генерирования всех чисел, которые вы получаете для рациональных кривых с произвольным количеством узлов. Оказывается, эта функция по существу воспроизводит знаменитые *тау-функции*, которые были введены в 1916 году индийским математиком и гением-самоучкой Шринивасой Рамануджаном.²⁵⁹ С тех пор наша функция в сочетании с высказанными Рамануджаном предположениями привела ко многим важным открытиям в области теории чисел. Насколько мне известно, наша работа впервые помогла установить серьезную связь между исчислительной геометрией (предметом расчета кривых) и тау-функцией.

Эта связь была закреплена последними работами Юйонг Дзена, молодого математика, недавно приглашенного работать в Гарвард, которого обучал мой бывший студент Юн Ли. Дзен показал, что не только рациональные кривые на поверхности КЗ связаны с тау-функцией, но расчет *любых* кривых произвольного рода на *любой* алгебраической поверхности связан с тау-функцией. И Дзен сделал это, доказав гипотезу, высказанную немецким математиком Лотаром Гёттше, который обобщил так называемую формулу

²⁵⁹ S. Ramanujan, "On Certain Arithmetic Functions," *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 22 (1916): 159–184.

Яу-Заслоу для рациональных кривых на поверхностях КЗ.²⁶⁰ Новая обобщенная формула, справедливость которой доказал Дзен, носит имя Гёттше-Яу-Заслоу. Несколькими годами ранее бывший мой аспирант А. К. Лью опубликовал доказательство формулы Гёттше-Яу-Заслоу.²⁶¹ Но его доказательство, выполненное с помощью сугубо технического, аналитического метода, не дает объяснения в том виде, который устроил бы алгебраических геометров. Таким образом, статья Лью не рассматривается в качестве окончательного подтверждения этой формулы. Доказательство Дзена, основанное на аргументах алгебраической геометрии, получило более широкое признание.

Таким образом, благодаря выводу, изначально вытекающему из теории струн, мы поняли, что связь между исчислительной геометрией и тау-функцией Рамануджана, вероятно, глубже, чем предполагалось. Мы всегда ищем похожие связи между различными разделами математики, поскольку эти неожиданные связи часто могут привести нас к новому пониманию обоих разделов. Я подозреваю, что со временем будет открыто больше связей между исчислительной геометрией и тау-функцией.

В качестве яркого примера обогащения математики теорией струн приведем разработанную в 1990-х годах Виттеном и Натаном Зайбергом из Университета Ратджерса систему уравнений, получившую название Зайберга-Виттена (см. третью главу), которая ускорила исследование четырехмерных пространств. Эти уравнения оказались проще для использования, чем существующие методы, что привело к взрывному росту количества новых идей в работе с четырьмя измерениями, главной из которых является попытка классифицировать и систематизировать все возможные формы. Хотя уравнения Зайберга-Виттена первоначально были получены в теории поля, вскоре было показано, что они также могут быть выведены из теории струн. Кроме того, использование этой идеи в контексте теории струн значительно расширило наши представления о ней. «В ряде случаев, – говорит мой коллега, – Виттен обычно советовал математикам: вот, возьмите эти уравнения, они могут оказаться полезными. И действительно, они оказывались полезными». «Теория струн стала таким благом для математики, таким огромным источником новых идей, что даже если она окажется несостоятельной как теория природы, она уже сделала для математики больше, чем любой вид человеческой деятельности, который я могу вспомнить», – говорит мой давний сотрудник Бонг Лиан из Университета Брандейса.²⁶² Хотя сам я об этом сказал бы более сдержанно, чем Лиан, но, в принципе, я согласен с ним, потому что выигрыш оказался неожиданно огромным. Нашу точку зрения разделяет и Атья: «Теория струн трансформировала, обновила и революционизировала крупные разделы математики... в тех областях, которые кажутся далекими от физики». Многие из областей математики – «геометрию, топологию, алгебраическую геометрию и теорию групп – похоже, смешали в один коктейль, причем способом, глубоко связанным с их основным содержанием, и не по касательной, а прямо в сердце математики».²⁶³

Хотя в прошлом другие области физики обеспечивали математику информацией, теория струн проникла гораздо глубже во внутреннюю структуру математики, способствуя новым концептуальным прорывам. По иронии судьбы, появление теории струн привело к гармоничному сотрудничеству внутри самой математики, поскольку теория струн потребовала многого от математиков, работающих в самых разных областях, включающих дифференциальную геометрию, алгебраическую геометрию, теорию групп Ли, теорию чисел и другие. Непостижимым образом наши надежды в отношении единой теории физики содействовали объединению математики.

Несмотря на красоту теории струн и ее глубокое влияние на математику, остается открытым вопрос: как долго мы должны ждать внешнего подтверждения какой-нибудь связи,

260 Lothar Goettsche, “A Conjectural Generating Function for Numbers of Curves on Surfaces,” November II, 1997, arXiv.org, Cornell University archives, http://arxiv.org/PS_cache/alg-geom/pdf/9711/9711012v1.pdf.

261 Ai-Ko Liu, “Family Blowup Formula, Admissible Graphs and the Enumeration of Singular Curves, I,” *Journal of Differential Geometry* 56 (2000): 381–579.

262 Bong Lian (Brandeis University), interview with author, December 12, 2007.

263 Michael Atiyah, “Pulling the Strings,” *Nature* 438 (December 22–29, 2005): 1,082.

любой связи теории с реальным миром? Брайан Грин считает, что следует набраться терпения, учитывая, что «мы пытаемся ответить на самые трудные, самые глубокие вопросы в истории науки. [Даже] если мы не получим на них ответы через 50 или 100 лет, мы должны идти вперед».²⁶⁴ Шон Кэрролл, физик из Калифорнийского технологического института, соглашается: «Глубокие идеи не появляются в короткие сроки».²⁶⁵ Иначе говоря, куда спешить, в конце концов?

Здесь, возможно, будет полезным напомнить исторический прецедент. «В XIX веке вопрос, почему вода кипит при температуре 100 градусов Цельсия, оставался без ответа, – отмечает Виттен. – Если бы вы сказали физику XIX века, что в XX веке вы сможете вычислить температуру кипения, то это показалось бы ему сказкой».²⁶⁶

Нейтронные звезды, черные дыры, гравитационные линзы – плотные концентрации вещества, которые действуют, как линзы в небе, – были бы также отвергнуты, как полнейшая фантазия, если бы их на самом деле не увидели астрономы. «История науки полна суждений о том, что та или иная идея не является практической и никогда не будет проверена», – добавляет Виттен. Но история физики также показывает, что «хорошие идеи выдерживают проверку».²⁶⁷ Благодаря новым технологиям, о которых даже не догадывалось предыдущее поколение, идеи, которые, казалось бы, выходят за рамки разумного, превращаются из научной фантастики в научные факты.

«Чем важнее вопрос, тем больше упорства следует проявить при его проверке», – утверждает физик Массачусетского технологического института Алан Гут, один из создателей инфляционной теории, согласно которой наша Вселенная прошла через короткий период быстрого неуправляемого расширения в первые моменты Большого взрыва. «Когда мы работали над инфляцией, я даже не думал, что ее будут проверять при моей жизни, – говорит Гут. – Это было бы невероятное везение, если бы нам удалось проверить инфляцию, и нам повезло. Хотя это была не столько удача, сколько потрясающее мастерство исследователей. То же может произойти и с теорией струн. И, возможно, нам не придется ждать сотни лет».²⁶⁸

Несмотря на то, что теорию струн следует рассматривать как гипотезу, в этом нет ничего плохого. Такие гипотезы в математике, как гипотеза Калаби, являются ничем иным, как предположениями, основанными на математической теории. Они абсолютно необходимы для прогресса в моей области. И мы не достигли бы никаких существенных успехов в физике и не продвинулись бы в понимании многих вещей, если не учились бы на гипотезах – это лучше, чем бездействие. Тем не менее слово «гипотеза» подразумевает некоторую степень сомнения, и ваша реакция на него зависит от вашего склада характера, а также от вашего персонального вклада в задачу. Что касается теории струн, то одни ученые настраивают себя на длинный путь в надежде, что их усилия, в конце концов, оправдаются. Другие, кому не нравятся долго решаемые задачи, выдвигают свои сомнения на первый план и размахивают метафорическими плакатами с надписью «Остановитесь! Вы совершаете большую ошибку».

Было время (не так давно – каких-то несколько веков назад), когда людей предупреждали об опасности плавания под парусом вдали от родных берегов, пугая тем, что судно вместе с пассажирами на борту может упасть с края земли. Но некоторые бесстрашные путешественники, тем не менее, ставили паруса, и вместо того, чтобы упасть с края света, открыли Новый Свет.

Возможно, то же происходит и сегодня. Я из лагеря сторонников движения вперед, вместе с математиками. Мы продолжаем работать. И мы будем делать это, невзирая на наличие или отсутствие какого-либо вклада со стороны внешнего мира или экспериментальных данных, сохраняя высокую результативность.

²⁶⁴ Glenda Chui, “Wisecracks Fly When Brian Greene and Lawrence Krauss Tangle Over String Theory,” *Symmetry* 4 (May 2007): 17–21.

²⁶⁵ Sean Carroll, “String Theory: Not Dead Yet,” Cosmic Variance blog, *Discover* online magazine, May 24, 2007, <http://cosmicvariance.com>.

²⁶⁶ Edward Witten, quoted in K. C. Cole, “A Theory of Everything,” *New York Times Magazine*, October 18, 1987.

²⁶⁷ Ibid.

²⁶⁸ Alan Guth (MIT), interview with author, September 13, 2007.

Хотя лично я считаю полезным взять на заметку и физику. Ведь я потратил большую часть своей карьеры, работая на стыке математики и физики, отчасти из-за своего убеждения, что взаимодействие между двумя областями науки имеет решающее значение для углубления нашего понимания Вселенной. В общем, на протяжении десятилетий эти взаимодействия были в основном гармоничными. Иногда ученые развивали идеи в математике раньше, чем находили им применение в физике, как это произошло с великими работами Майкла Атья, Эли Картан, Ч. Ш. Черна, И. М. Зингера, Германа Вейла и других. Но иногда физика опережала математику, как в случае с открытием зеркальной симметрии. Но, возможно, мне не следует характеризовать текущие взаимоотношения между математиками и физиками как полностью безоблачные. По утверждению Брайана Грина, между двумя областями науки «наблюдается сильная, но обычно здоровая конкуренция», и я считаю это верной оценкой.²⁶⁹ Конкуренция это не всегда плохо, поскольку она обычно способствует прогрессу.

В различные исторические времена разделение между областями науки или его отсутствие существенно менялось. Такие ученые, как Ньютон и Гаусс, конечно, без труда лавировали между математикой, физикой и астрономией. Гаусс, который был одним из величайших математиков всех времен и народов, служил профессором астрономии в Геттингенской обсерватории в течение почти пятидесяти лет, вплоть до смерти.

Внедрение максвелловских уравнений электромагнетизма и последующие разработки в квантовой механике вбили клин между математикой и физикой, который сохранялся на протяжении большей части столетия. В 1940-е, 1950-е и 1960-е годы многие математики особо не задумывались о физиках и не сотрудничали с ними. С другой стороны, многие физики также с высокомерием относились к математике и мало ее использовали. Когда пришло время для математики, они поняли, что смогли бы ее использовать для решения своих задач.

Физик из Массачусетского технологического института Макс Тегмарк интерпретирует эту ситуацию, ссылаясь на «культурный разрыв» между двумя областями науки. «Некоторые математики, задрав нос, смотрят на физиков из-за их небрежности и отсутствия строгости в выкладках, – говорит он. – Квантовая электродинамика является примером чрезвычайно успешной теории, которая математически строго не сформулирована». Некоторые физики, добавляет он, пренебрежительно относятся к математикам, считая, что «вы, ребята, тратите целую вечность на то, что мы получаем за считанные минуты. И если бы вы обладали нашей интуицией, то поняли бы, что все это лишнее».²⁷⁰

После выхода на сцену теории струн, когда физики-теоретики стали все больше полагаться на высшую математику, этот культурный разрыв начал сокращаться. Математика, которую применяют в теории струн, настолько сложна и является настолько неотъемлемой частью этой теории, что физики не только нуждаются в помощи, но и приветствуют ее. Несмотря на то что математики заинтересовались пространствами Калаби-Яу раньше физиков, последние, в конце концов, пришли к ним, в свою очередь продемонстрировав несколько интересных трюков. Сейчас мы находимся на этапе «повторной конвергенции», по выражению Атья, и это хорошо.

Я не могу сказать, преодолет ли когда-нибудь теория струн свое самое серьезное испытание – сделать проверяемое предсказание и показать, что теория действительно дает правильный ответ. Математическая часть, как я уже говорил, стоит на более твердой почве. Тем не менее я считаю, что лучший шанс для разработки успешной теории заключается в объединении ресурсов математиков и физиков, сочетании преимущества двух дисциплин и их различных подходов к миру. Мы можем работать параллельно, иногда пересекаясь и переходя на другую сторону для пользы обеих сторон.

Клифф Таубс, мой коллега-математик из Гарварда, подытожил различия между этими дисциплинами. Таубс полагает, что, хотя инструментарий математики и физики может быть одним и тем же, они преследуют разные цели. «Физика – это изучение мира, а математика –

²⁶⁹ Brian Greene, *The Elegant Universe* (New York: Vintage Books, 2000), p. 261.

²⁷⁰ Max Tegmark (MIT), interview with author, October 23, 2007.

изучение всех возможных миров».²⁷¹

Это одна из причин, по которой я люблю математику. Физики высказывают догадки о других мирах и других Вселенных, как и мы. Но в конце дня они должны вернуться в наш мир и думать о том, что реально. Я вынужден думать, возможно, не только о «всех возможных мирах», как выразился Клифф, но более широко – обо всех возможных пространствах. На мой взгляд, это наша работа. Хотя физики, по большому счету, как правило, смотрят только на одно пространство и видят то, что оно может рассказать нам о природе, а мы, математики, должны смотреть на совокупность всех пространств, чтобы найти общие правила и принципы, применимые к самым интересным случаям.

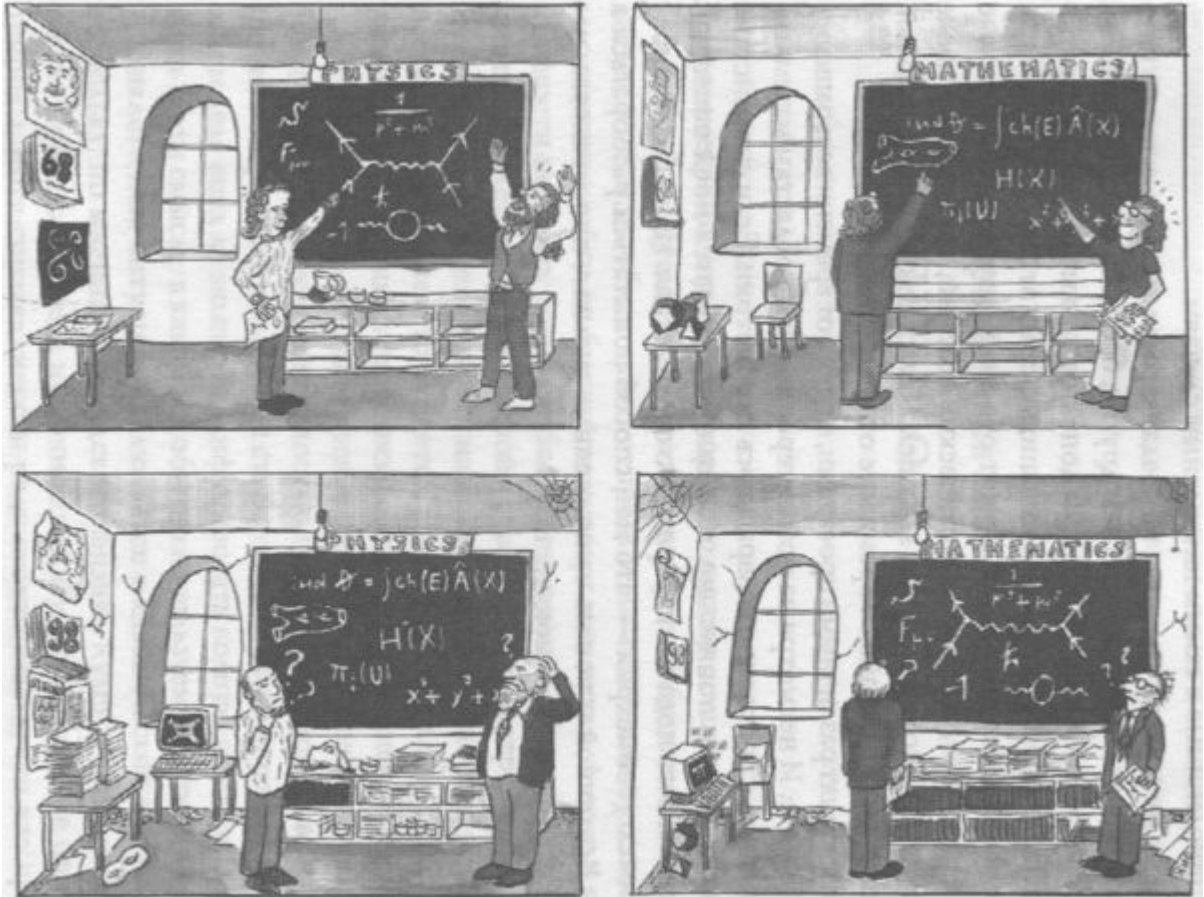


Рис. 13.4. Эта карикатура физика Роберта Дикграафа показывает взаимосвязь между математиками и физиками (изображение любезно предоставлено Робертом Х. Дикграафом)

Тем не менее пространства не созданы равными, и некоторые привлекают мое внимание больше, чем другие, особенно те пространства, в которых, как полагают, находятся дополнительные размерности природы. Перед нами стоит задача выяснить форму этого скрытого мира, который, согласно теории, содержит оба вида материи, наблюдаемые нами из космоса, и все виды физических явлений, которые мы также наблюдаем. Некоторое время я всецело был поглощен этой задачей, и похоже, что в ближайшее время мне от нее не отделаться.

Хотя я занят различными проектами, я время от времени возвращаюсь к этой задаче. И несмотря на мой интерес к другим областям математики и физики, я постоянно возвращаюсь к геометрии. Если спокойствие достигается через понимание, то геометрия является моей попыткой достичь некоего подобия внутреннего спокойствия. Или в более широком смысле, геометрия – это мой способ попытаться разобраться в нашей Вселенной и понять таинственные скрытые пространства, названные, в том числе, в мою честь.

271 Faye Flam, “Getting Comfortable in Four Dimensions,” *Science* 266 (December 9, 1994): 1, 640.

Четырнадцатая глава

Конец геометрии?

Хотя геометрия сослужила нам хорошую службу, остались скрытые проблемы, которые предвещают нам неприятности в будущем. Чтобы убедиться в этом, необязательно отправляться в далекое путешествие, а достаточно дойти до ближайшего озера или пруда. А если в вашей местности нет озер, подойдет бассейн или ванна. Поверхность озера может выглядеть идеально гладкой в спокойный, безветренный день, но это иллюзия. Если посмотреть на поверхность с помощью прибора с высоким разрешением, то окажется, что она зубчатая, а не гладкая. Мы увидим, что поверхность фактически состоит из отдельных молекул воды, которые постоянно покачиваются, перемещаются внутри пруда и свободно проходят между поверхностью пруда и воздухом. С этой точки зрения поверхность не является статичной и хорошо определяемой. На самом деле вряд ли можно квалифицировать водную гладь как поверхность в том смысле, в каком мы обычно используем этот термин.

Аналогичная ситуация наблюдается с классической геометрией, поскольку, по мнению гарвардского физика Кумрун Вафы, она дает только приближенное, а не точное или фундаментальное описание природы. Хотя справедливости ради стоит сказать, что это приближенное описание служит хорошим фундаментом и почти безупречно описывает нашу Вселенную, за исключением планковского масштаба (10 см) – области, в которой на стандартную геометрию накладываются квантовые эффекты и выполнение простых измерений становится невозможным.

Главная трудность в решении задач на очень мелких масштабах связана с принципом неопределенности Гейзенберга, который делает невозможной локализацию отдельной точки или точную фиксацию расстояния между двумя точками. Поэтому объекты планковского размера не стоят на месте, а постоянно колеблются, изменяя свои параметры, включая местоположение, размер и кривизну. Если классическая геометрия говорит нам, что две плоскости пересекаются по линии, а три плоскости пересекаются в точке, то с квантовой точки зрения мы должны представить себе три плоскости, пересекающиеся в окрестности некоей сферы, которая охватывает область возможных положений для этой точки.

Для исследования Вселенной на уровне скрытых измерений или отдельных струн нам необходим новый вид геометрии, иногда называемой *квантовой геометрией*, способной работать как на самых больших, так и на самых маленьких масштабах, которые только можно вообразить. Геометрия такого рода должна быть совместима с общей теорией относительности на больших масштабах и квантовой механикой на малых масштабах и совпадать там, где обе теории пересекаются. По большей части квантовая геометрия пока не существует. Она гипотетична, хотя и важна, скорее надежда, чем реальность, название для поиска четко определенной математической теории. «Мы не знаем, как такая теория будет выглядеть или как она должна называться, – говорит Вафа. – Для меня не очевидно, что она должна называться геометрией».³³ Но независимо от названия, мы считаем, что геометрия, в том виде как она существует сейчас, исчерпала себя и ее необходимо заменить на что-то более мощное – на геометрию, которой мы еще не знаем. Это путь всех наук, как и должно быть, поскольку застой означает смерть.

«Мы всегда ищем области, в которых наука оказывается бессильной, – объясняет физик Амстердамского университета Роберт Дикграф. – Геометрия тесно связана с теорией Эйнштейна, и когда теория Эйнштейна испытывает потрясения, то геометрию ждет та же судьба. В конечном счете, уравнения Эйнштейна необходимо заменить так же, как они в свое время заменили уравнения Ньютона, и геометрия пойдет тем же путем».²⁷²

Но не будем перекладывать всю ответственность на геометрию, потому что проблема в большей степени связана с физикой, чем с математикой. Прежде всего, планковский масштаб,

33 Cumrun Vafa (Harvard University), interview with author, January 19, 2007.

272 Robbert Dijkgraaf (University of Amsterdam), interview with author, February 8, 2007.

где начинаются все вышеупомянутые неприятности, вообще не является математической концепцией.

Это *физическая* шкала длины, массы и времени. Даже тот факт, что классическая геометрия не работает на планковском масштабе, не означает, что что-то не так с математикой как таковой. Методы дифференциального исчисления, лежащие в основе римановой геометрии, которая, в свою очередь, служит основой для общей теории относительности, не вдруг перестают работать при критическом масштабе длины. Дифференциальная геометрия предназначена по самой своей сути для работы на бесконечно малых длинах, которые можно устремлять к нулю так близко, как вы пожелаете. «У нас нет причин полагать, что экстраполяция общей теории относительности до мельчайших пространственных масштабов будет проблемой с точки зрения математики, – говорит Дэвид Моррисон, математик Калифорнийского университета в Санта-Барбаре. – Здесь нет реальной проблемы и с точки зрения физики, за исключением того, что мы знаем, что это неверно».²⁷³

В общей теории относительности метрика, или функция, длины говорит нам о кривизне в каждой точке. На очень малых масштабах длины метрические коэффициенты колеблются в широких пределах, а это означает, что длина и кривизна также будут сильно колебаться. Другими словами, геометрия будет испытывать такие сильные сдвиги, что вряд ли будет иметь смысл называть ее геометрией. Это похоже на железнодорожную систему, где рельсы могут уменьшаться, удлиняться и искривляться как угодно, – такая железная дорога никогда не доставила бы вас к месту назначения или вы прибыли бы туда не по расписанию. Как говорится, это не для железной дороги и не для геометрии.

Как и многие другие проблемы, которых мы коснулись в этой книге, эти геометрические странности вытекают из фундаментальной несовместимости квантовой механики и общей теории относительности. Квантовую геометрию можно рассматривать как язык квантовой гравитации (математический формализм, необходимый для решения проблемы совместимости), какой бы эта теория не оказалась. Существует еще один способ рассмотрения данной проблемы физиками: геометрия сама по себе может быть явлением скорее «производным», чем фундаментальным. Если эта точка зрения верна, то она может объяснить, почему традиционные геометрические описания мира дают сбои в областях, которые отличаются малыми размерами и очень высокими энергиями.

«Производное» явление можно видеть в примере с прудом или озером, который мы обсуждали ранее в этой главе. Если вы смотрите на большой водоем, то целесообразно рассматривать воду как жидкость, которая течет и образует волны и характеризуется общими свойствами, такими как вязкость, температура и температурные градиенты. Но если вы рассматриваете крошечные капли воды под микроскопом, то, характеризуя их как жидкость, вы не сможете адекватно описать воду в целом. Вода, как известно, состоит из молекул, которые в малом масштабе ведут себя скорее как бильярдные шары, чем как жидкость. «Вы не можете, рассматривая волны на поверхности озера, сказать что-нибудь о молекулярной структуре или о движении молекул H_2O , – объясняет физик Массачусетского технологического института Алан Адамс. – Это обусловлено тем, что описание воды как жидкости не является самым фундаментальным способом описания воды. С другой стороны, если известно, где находится каждая молекула и как она движется, вы, в принципе, можете сделать все выводы о водоеме и особенностях его поверхности. Другими словами, микроскопические свойства содержат макроскопическую информацию».²⁷⁴ Вот почему мы считаем микроскопическое описание более фундаментальным, а макроскопические свойства – производными, то есть вытекающими из него.

Какое отношение все это имеет к геометрии? Мы знаем, что в соответствии с общей теорией относительности гравитация является следствием искривления пространства-времени, но, как мы видели, такое описание гравитации для больших расстояний и низких энергий, которое в нашем случае мы называем классической

273 David Morrison (University of California, Santa Barbara), interview with author, May 27, 2008.

274 Allan Adams (MIT), interview with author, May 23, 2008.

геометрией, не работает на планковском масштабе. Исходя из этого ряд физиков пришли к выводу, что современная теория гравитации, теория Эйнштейна, является всего лишь низкоэнергетическим приближением того, что происходит на самом деле. Эти ученые считают, что, подобно тому как волны на поверхности озера проистекают из основных молекулярных процессов, которые мы не можем видеть, гравитация и ее эквивалентная формулировка – геометрия также вытекает из фундаментальных ультра-микроскопических процессов, которые, на наш взгляд, должны иметь место, даже если мы не знаем точно, что они собой представляют. Именно это люди имеют в виду, когда говорят, что гравитация или геометрия являются «производными» квантовой геометрии и квантовой гравитации на планковском масштабе.

Вафу беспокоит возможный «конец геометрии», что вполне справедливо, и не следует к этому относиться как к трагедии – греческой или какой-либо другой. Крушение классической геометрии следует приветствовать, а не бояться, предполагая, что мы можем заменить ее чем-то лучшим. Область геометрии постоянно менялась на протяжении тысячелетий. Если бы древнегреческие математики, в том числе сам великий Евклид, сегодня присутствовали на семинаре по геометрии, то они бы представления не имели, о чем мы говорим. А в скором времени мои сверстники и я окажутся в той же лодке по отношению к геометрии будущих поколений. Хотя я не знаю, как геометрия в конечном итоге будет выглядеть, я верю, что она будет жива и здорова и будет чувствовать себя даже лучше, чем когда-либо, и будет помогать в разных ситуациях лучше и чаще, чем в настоящее время.

Джо Полчински, физик из Санта-Барбары, как будто соглашается с этой точкой зрения. Он не считает, что крушение обычной геометрии на планковском масштабе является сигналом о «конце пути» для его любимой дисциплины. «Обычно, когда мы узнаем что-то новое, старые вещи не следует отбрасывать, но переосмысливать и расширять их применение», – говорит Полчински. Перефразируя Марка Твена, он замечает, что известия о смерти геометрии сильно преувеличены. За короткий период в конце 1980-х годов, добавляет он, геометрия стала «старой шляпой» в физике. Устарела. «Но затем она вернулась более сильной, чем когда-либо. Учитывая, что до настоящего времени геометрия играла такую важную роль в открытиях, у меня есть все основания полагать, что это часть чего-то большего и лучшего, а не то, что, в конце концов, будет отброшено».²⁷⁵ Вот почему я утверждаю, что квантовая геометрия, или как вы ее называете, должна стать «расширением» геометрии, по выражению Полчински, так как нам необходимо нечто, что может работать и на большом масштабе, как классическая геометрия, и в то же время обеспечивать надежные физические описания на ультрамалых масштабах.

Эдвард Виттен поддерживает эту точку зрения. «То, что мы сейчас называем “классической геометрией” значительно шире, чем то, что понимали под геометрией всего столетие назад, – говорит он. – Я полагаю, что теория на планковском масштабе, весьма вероятно, включает в себя новый вид обобщенной геометрии или расширение этого понятия».²⁷⁶

Обобщения такого рода, связанные с теорией, действительной в определенной области, и расширение сферы ее применимости на еще большую область делались в геометрии неоднократно. Вспомним создание неевклидовой геометрии. «Если бы вы спросили Николая Лобачевского о геометрии его молодости», то есть геометрии конца XVIII века, то «он, вероятно, перечислил бы пять постулатов Евклида, – говорит Адамс. – Если бы вы спросили его позже, когда он стал великим ученым, то он мог бы сказать, что существует пять постулатов, но, может быть, они не нужны нам все».²⁷⁷ В частности, он выделил бы пятый постулат Евклида о том, что параллельные линии никогда не пересекаются, как необязательный. В конце концов, именно Лобачевский понял, что, исключив постулат о параллельных, он создал совершенно новую геометрию, которую мы называем

275 Joe Polchinski (University of California, Santa Barbara), interview with author, August 31, 2007.

276 Edward Witten (Institute for Advanced Study), e-mail letter to author, January 30, 2007.

277 Adams, interview with author, May 23, 2008.

гиперболической геометрией. Но из того, что параллельные линии не пересекаются на плоскости, то есть в области, где работает евклидова геометрия, вовсе не следует, что это же будет иметь место на поверхности сферы. Например, мы знаем, что все меридианы на глобусе сходятся на северном и южном полюсах. Аналогично, хотя сумма углов треугольника, нарисованного на плоскости, всегда равна 180 градусам, на поверхности сферы сумма этих углов всегда больше 180 градусов, а на поверхности седла их сумма меньше 180 градусов.

Лобачевский опубликовал свои спорные идеи по неевклидовой геометрии в 1829 году, и они были похоронены в малоизвестном русском журнале «Казанский вестник». Несколько лет спустя венгерский математик Янош Бойяи опубликовал свой собственный трактат по неевклидовой геометрии, но работа, к сожалению, стала приложением к книге, написанной его отцом, математиком Фаркашем Бойяи. Примерно в то же время Гаусс разрабатывает аналогичные идеи в области дифференциальной геометрии. Он сразу понял, что эти новые понятия криволинейных пространств и «внутренней геометрии» переплетаются с физикой. «Геометрию следует относить не к арифметике, которая является чисто *априорной* наукой, а к механике», – говорил Гаусс.²⁷⁸ Как мне кажется, он имел в виду, что геометрия, в отличие от арифметики, должна опираться на эмпирическую науку, а именно на физику, которая в то время называлась механикой, чтобы ее описания были весомыми. Гауссова внутренняя геометрия поверхностей заложила фундамент для римановой геометрии, которая, в свою очередь, привела к блестящим идеям Эйнштейна о пространстве-времени.

Таким образом, пионеры науки, подобные Лобачевскому, Бойяи и Гауссу, не отбросили все, что было сделано до них, а просто открыли дверь новым возможностям. Их новаторские работы способствовали созданию более экспансивной геометрии, так как ее принципы не ограничивались плоскостью, а могли быть применимы ко всем криволинейным поверхностям и пространствам. Хотя элементы евклидовой геометрии по-прежнему сохраняются в этой расширенной, более общей геометрии. Например, если вы берете небольшой участок земной поверхности, скажем, на Манхэттене, то улицы и проспекты можно считать параллельными и перпендикулярными для всех практических целей. Евклидова геометрия достоверно описывает ограниченную область, где эффектами кривизны можно пренебречь, но не работает, если вы смотрите на планету в целом. Можно также рассмотреть треугольник, нарисованный на воздушном шаре. Когда шар относительно небольшой, то сумма углов треугольника больше 180 градусов. Но если мы будем раздувать воздушный шар, то радиус кривизны (r) будет становиться все больше и больше, а сама кривизна (равная $1/r$) – все меньше и меньше. При приближении r к бесконечности, кривизна будет стремиться к нулю, а сумма углов треугольника в пределе будет точно равна 180 градусам. Как выразился Адамс, «это именно та ситуация на ровной плоскости, в которой евклидова геометрия является чемпионом. Она работает довольно хорошо и на сфере с небольшой кривизной, но, если вы надуваете воздушный шар и кривизна сферы становится все меньше и меньше, то соответствие евклидовой геометрии становится все лучше и лучше. Таким образом, мы видим, что евклидова геометрия действительно является только частным эпизодом более общего сюжета, когда радиус кривизны является бесконечным, сумма углов треугольника составляет 180 градусов и все постулаты евклидовой геометрии применимы».²

Аналогично теория тяготения Ньютона была чрезвычайно практической теорией в том смысле, что она давала нам простой способ вычисления силы тяжести, действующей на любой объект в системе. В частности, она работала хорошо до тех пор, пока объекты, о которых шла речь, не двигались слишком быстро, или в ситуациях, когда гравитационный потенциал не слишком велик. Затем появился Эйнштейн со своей новой теорией, в которой гравитация рассматривается как следствие искривления пространства-времени, а не как сила, действующая между объектами, и мы поняли, что теория тяготения Ньютона была только

278 Turnbull WWW Server, “Quotations by Gauss,” School of Mathematical Sciences, University of St. Andrews, St. Andrews, Fife, Scotland, February 2006, <http://wwwgroups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Quotations/Gauss.html>.

2 Ibid.

небольшим фрагментом этой общей картины и она хорошо работает только в предельных случаях – когда объекты двигаются медленно, а гравитация является слабой. Таким образом, мы видим, что общая теория относительности, как следует из названия, на самом деле является общей: это обобщение не только специальной теории относительности Эйнштейна путем включения гравитационных эффектов, но и обобщение ньютоновской теории тяготения.

Аналогично квантовая механика является обобщением ньютоновской механики, но нам нет необходимости ссылаться на квантовую механику, чтобы играть в бейсбол или в блошки. Ньютоновские законы работают хорошо для больших объектов, таких как бейсбольные мячи, и даже для небольших объектов, таких как блошки, где поправки, налагаемые квантовой теорией, неизмеримо малы и ими можно пренебречь. Но макроскопическая область, в которой мячи и ракеты летают, а закон Ньютона доминирует, является лишь частным случаем более широкой и общей области квантовой теории, которая справедлива и для объектов значительно меньшего размера. Используя квантовую механику, мы можем точно предсказать траектории релятивистских электронов в высокоэнергетическом коллайдере, в то время как ньютоновская механика нам здесь не поможет.

Теперь мы подходим к такой же ситуации в геометрии. Классическая риманова геометрия не в состоянии описать физику на квантовом уровне. Поэтому мы будем искать новые геометрии, более общее описание, которое можно применить с одинаковым успехом и к кубу Рубика, и к струнам планковской длины. Вопрос в том, как это сделать. Отчасти мы идем ощупью в темноте, вероятно так же, как Исаак Ньютон, когда пытался написать свою собственную теорию тяготения.

Ньютону пришлось изобретать новые методы для достижения этой цели, отсюда родилось дифференциальное и интегральное исчисление. Так же как причиной рождения математики Ньютона явилась физика, так, вероятно, случится и сегодня. Мы не можем создать квантовую геометрию без некоторых вводных данных из физики. Несмотря на то что мы всегда можем вообразить некоторые новые интерпретации геометрии, но если она действительно должна быть работоспособной, то она должна описывать природу на некотором базовом уровне. А для этого, как мудро признал Гаусс, нам необходимо некоторое руководство извне.

Соответствующая физика выдвигает нам технические требования, которым наша математика должна удовлетворять. При использовании классической геометрии для физики на планковском масштабе мы будем получать дискретные изменения и разрывы. Надеюсь, что квантовая геометрия устранил эти разрывы, создав гладкую картину, более простую для понимания и более удобную для работы.

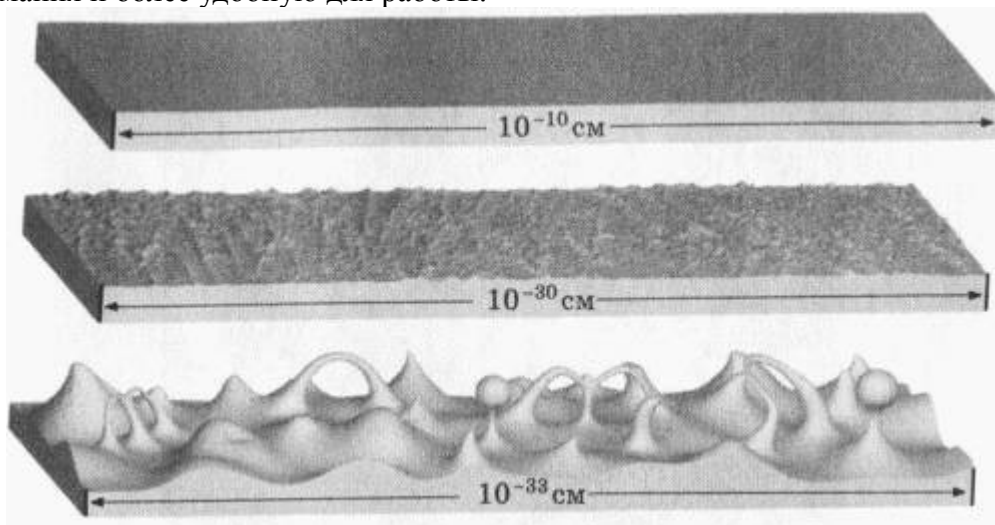


Рис. 14.1. Физик Джон Уилер ввел понятие *квантовой пены*, которая представлена на этом рисунке. Верхняя панель выглядит полностью гладкой. Но если поверхность раздуть на двадцать порядков от первоначальной величины (средняя панель), то станут хорошо видны

неровности. Если поверхность раздуть еще в тысячу раз, то все маленькие выпуклости станут «горами» и состояние поверхности станет полной противоположностью своему первоначальному, гладкому состоянию

Предполагается, что теория струн, почти по определению, будет иметь дело с вышеописанными проблемами. Поскольку «фундаментальный строительный блок теории струн является не точкой, а скорее одномерной петлей, то естественно полагать, что классическая геометрия не может корректно описывать струнную физику, – объясняет Брайан Грин. – Однако сила геометрии не теряется. Напротив, теория струн, по-видимому, будет описываться модифицированной формой классической геометрии с модификациями, исчезающими по мере того, как типичный размер в данной системе становится большим по сравнению с масштабом струн – шкалой длин, которая, как ожидается, будет находиться в пределах нескольких порядков от планковской шкалы».²⁷⁹

Предыдущие теории фундаментальной физики рассматривали свои основные строительные блоки – материальные частицы – как бесконечно малые, нульмерные точки – объекты, с которыми ученые того времени не могли адекватно работать ввиду слабости математического аппарата (современная математика также не может справиться со всеми проблемами). Струны представляют собой частицы не бесконечно малого размера, так что квантовые флуктуации, которые создавали столько хлопот для классической геометрии на ультрамалых масштабах, распределяются по значительно большей области, ослабляя свое влияние, что делает их более контролируемыми. Таким образом, раздражающую проблему сингулярностей в физике, где кривизна и плотность пространства-времени растут до бесконечности, можно ловко обойти. «Вам никогда не добраться до точки, где происходят катастрофы, – говорит Натан Зайберг из Института перспективных исследований. – Теория струн не позволит вам».²⁸⁰

279 Brian Greene, “String Theory on Calabi-Yau Manifolds,” lectures given at Theoretical Advanced Study Institute, 1996 session (TASI-96), Boulder, June 1996.

280 K. C. Cole, “Time, Space Obsolete in New View of Universe,” *Los Angeles Times*, November 16, 1999.



Рис. 14.2а. Это фотография под названием «Голубой мрамор» показывает, что если взглянуть на нашу планету с большого расстояния, то ее поверхность выглядит гладкой и безупречной, как мрамор (Центр космических полетов Годдарда, НАСА)

Даже если катастрофа предотвращена, все равно поучительно взглянуть на ситуацию, где вы были «на волосок от гибели, которой вам чудом удалось избежать». «Если вы хотите изучить ситуации, где геометрия не работает, вам необходимо выбирать те случаи, в которых она постепенно выходит из строя, – говорит Эндрю Строминджер. – Один из лучших способов выполнить такой анализ ситуаций заключается в изучении пространств Калаби-Яу, потому что в этих пространствах мы можем выделить области, где пространство-время поломано, в то время как остальные области остаются неизменными».²⁸¹

281 Andrew Strominger (Harvard University), interview with author, August 1, 2007.



Рис. 14.2б. Фотография Санта Фе, Нью-Мексико, который находится недалеко от центра изображения «Голубой мрамор», сделанная крупным планом со спутника дистанционного зондирования Земли Landsat 7, показывающая, что поверхность является совсем не гладкой. Вместе эти две фотографии отображают понятие квантовой пены: то, что может казаться гладкой, безликой пеной с большого расстояния, может выглядеть крайне неоднородно с близкого расстояния. (Визуализация создана Джесси Алленом, Earth Observatory; данные получены, отредактированы и сбалансированы по цвету Лаурой Роккью, Landsat Project Science Office)

Мой коллега имеет в виду, что мы могли бы получить некоторое представление о квантовой геометрии и ее следствиях путем применения теории струн в контролируемых условиях пространства Калаби-Яу, – эта тема обсуждается на протяжении всей этой книги. Один из перспективных путей заключается в поиске ситуации в теории струн, когда геометрия ведет себя иначе, чем в классическом приближении. Ярким примером является изменяющий топологию переход, который иногда может проходить гладко в теории струн, но не в обычных физических теориях. «Если вы ограничены стандартными геометрическими методами, под которыми я всегда понимаю сохранение римановых метрик, то топология не может изменяться», – говорит Моррисон.²⁸² Причина, по которой топологическое изменение считается большой проблемой, состоит в том, что вы не можете превратить одно пространство в другое, не разорвав его каким-то образом, так же как вы не можете очистить яйца, не разбив скорлупы. Или превратить сферу в бублик, не проделав дырку.

Но протыкание отверстия в пространстве, которое в остальных частях остается гладким, создает сингулярность. Это в свою очередь создает проблемы для сторонников общей теории относительности, которым теперь придется бороться с бесконечной кривизной и тому подобными вещами. Теория струн, однако, может обойти эту проблему. Например, в 1987 году мы с моим аспирантом Гангом Тианом продемонстрировали метод, известный как флоп-переход, который дает множество примеров многообразий Калаби-Яу, тесно связанных между собой, но топологически различных.

Кониформные переходы, которые мы обсуждали в десятой главе, представляют собой еще более драматический пример топологического изменения с участием пространства

282 Morrison, interview with author, May 29, 2008.

Калаби-Яу. Давайте представим двухмерную поверхность типа футбольного мяча, расположенного внутри пространства Калаби-Яу, как показано на рис. 14.3. Мы можем сжать футбольный мяч до узкой полосы (струны), которая, в конце концов, исчезнет, оставив вместо себя разрыв – вертикальную щель, в ткани пространства-времени. Затем мы будем наклонять щель, толкая «ткань» над и под ней навстречу друг другу. Таким образом, вертикальная щель постепенно превратится в горизонтальную щель, в которую мы можем вставить, а затем снова расширить другой футбольный мяч. Футбольный мяч сейчас оказался «перестроенным» относительно своей первоначальной конфигурации. Если эту процедуру проделать математически точно, то есть разрывая пространство в определенный момент, открывая его, переориентируя разрыв и вставляя новую двухмерную поверхность со смещенной ориентацией обратно в шестимерное пространство, вы получите топологически другое пространство Калаби-Яу и, таким образом, совершенно иную форму по сравнению с исходной.

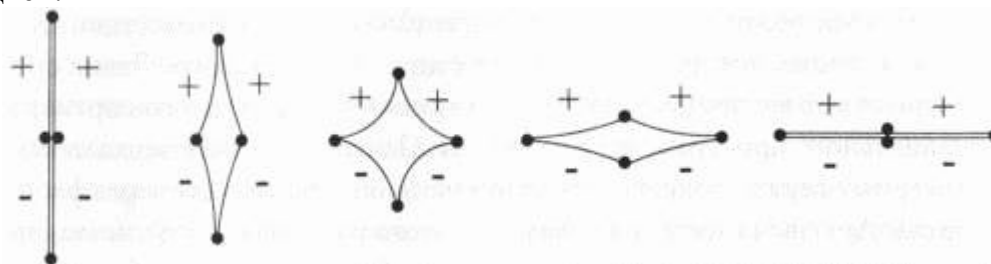


Рис. 14.3. Для того чтобы представить флоп-переход, необходимо сделать вертикальный разрез в двухмерной ткани. Затем, нажимая на ткань сверху и снизу, толкать ее так, чтобы вертикальная щель становилась все шире и шире и в конечном счете превратилась в горизонтальную щель. Таким образом, щель или разрыв, который когда-то находился в вертикальном положении, в настоящее время «перестроился», то есть перевернулся на другую сторону. Многообразия Калаби-Яу могут подвергаться флоп-переходам и когда внутренние структуры переворачиваются аналогичным образом (часто после первоначального разрыва), в результате чего получаются многообразия, топологически отличные от исходных. Флоп-переход особенно интересен тем, что четырехмерная физика, связанная с этими многообразиями, остается той же самой, несмотря на различия в топологии

Флоп-переход представляет математический интерес, поскольку он показывает, как, начав с одного пространства Калаби-Яу со знакомой топологией, в конечном итоге получить другие, неизвестные нам пространства Калаби-Яу. В результате, мы, математики, можем использовать этот подход для создания с целью исследования большего количества пространств Калаби-Яу или, иначе говоря, «поиграть» с ними. Но я также подозреваю, что флоп-переход имеет некоторый физический смысл. Оглядываясь назад и оценивая прошлые события, любой может подумать, что я наделен даром предвидения, хотя это не тот случай. Я чувствую, что любая общая математическая операция, которую мы можем выполнить с Калаби-Яу, также должна иметь применение в физике. Я попросил Брайана Грина, который был моим постдоком в то время, разобраться в этом вопросе, а также напомнить об этой идее нескольким другим физикам, которые, на мой взгляд, положительно воспримут ее. Грин несколько лет игнорировал мои советы, но в 1992 году наконец-то начал работать над задачей вместе с Полом Эспинволлом и Моррисоном. Глядя на то, что они придумали, стоило подождать эти несколько лет.

Эспинволл, Грин и Моррисон хотели знать, наблюдается ли что-то типа флоп-перехода в природе и может ли пространство само себя разорвать, несмотря на то что в рамках общей теории относительности гладкое искривленное пространство-время не склонно к разрыву. Мало того что это трио ученых хотели определить, встречается ли этот тип перехода в природе, они также хотели знать, может ли он иметь место в теории струн.

С этой целью они взяли многообразие Калаби-Яу со сферой (вместо футбольного мяча),

расположенной внутри него, и подвергли его флоп-переходу, а затем использовали полученное (топологически измененное) многообразие для компактификации шести из десяти измерений пространства-времени, чтобы посмотреть, какой вид четырехмерной физики получится в результате. В частности, они хотели предсказать массу определенной частицы, которую фактически они могли вычислить. Затем они повторили тот же процесс, на этот раз используя зеркального партнера оригинального пространства Калаби-Яу. Однако в случае с зеркальным партнером сфера не сократилась до нулевого объема, пройдя через флоп-переход. Другими словами, не было никакого разрыва пространства, ни сингулярности; струнная физика, по словам Грина, «вела себя безупречно»²⁸³. Далее, они вычислили массу этой же частицы, на этот раз связанную с зеркальным многообразием, и сравнили результаты. Если бы предсказания подтвердились, то это означало бы, что разрыв пространства и сингулярность, о которых мы говорили, не являются проблемой; теория струн и геометрия, на которую она опирается, может справиться с этой ситуацией без проблем. Расчетная масса частицы соответствовала предсказанной почти идеально, а это означало, что разрывы такого рода могут возникнуть в теории струн без серьезных последствий.

Но на один вопрос их анализ не смог дать ответ: как такое может быть правдой? Как, например, сфера может сократиться до нулевого объема (размера точки в традиционной геометрии), если наименьший допустимый размер имеет отдельная струна? Возможные ответы содержатся в статье Виттена, которая вышла в то же время. Виттен показал, как петля струны может окружить пространственный разрыв, тем самым защищая Вселенную от пагубных эффектов, которые, в противном случае, могут возникнуть.

«Мы выяснили, что, когда классическая геометрия Калаби-Яу является сингулярной, четырехмерная физика выглядит ровной, — объясняет Эспинволл. — Массы частиц не стремятся к бесконечности, и ничего плохого не происходит». Таким образом, квантовая геометрия теории струн должна давать «сглаживающий эффект», беря то, что классически выглядит сингулярным, и делая это не сингулярным.²⁸⁴

Флоп-переход может пролить свет на то, как может выглядеть квантовая геометрия, показывая нам те ситуации, с которыми классическая геометрия не может справиться. Классическая геометрия без проблем может описать ситуацию в начале и в конце флоп-перехода, но не в середине, где ширина футбольного (или баскетбольного) мяча сокращается до нуля. Увидев, что именно теория струн делает по-другому в этом случае, а также во многих других, мы можем сделать вывод о том, как необходимо изменить классическую геометрию, то есть какого типа квантовые поправки внести.

Следующий вопрос, требующий ответа, по словам Моррисона, это «являются ли квантовые модификации, которые нам необходимо выполнить в геометрии, достаточно геометрическими, чтобы она все еще могла называться геометрией, или они будут настолько радикально отличающимися, что нам придется отказаться от понятия геометрии в целом». Квантовые поправки, которые мы обсуждали до сих пор на таких примерах, как флоп-переход, «все еще могут быть описаны геометрически, даже если их нелегко вычислить», — говорит он. Но мы не знаем, является ли это вообще правдой.²⁸⁵

Лично я готов держать пари, что, в конце концов, геометрия будет доминировать. И я верю, что термин *геометрия* останется в обращении не просто из-за ностальгии, а потому, что сама эта область науки будет продолжать предоставлять полезные описания Вселенной, как это всегда происходило в прошлом.

Заглядывая в будущее, мы понимаем, что создание теории квантовой геометрии или теории с другим названием, безусловно, выдвигается в качестве одной из самых грандиозных задач в области геометрии, если не вообще всей математики. Это, вероятно, затянется на десятилетия долгих мытарств и потребует тесного сотрудничества между физиками и математиками. Хотя задача, несомненно, требует математической строгости, которую мы

283 Brian Greene, *Elegant Universe* (New York: Vintage Books, 2000), pp. 268, 273.

284 Paul Aspinwall (Duke University), interview with author, June 6, 2008.

285 Morrison, interview with author, May 27, 2008.

всегда стараемся сблести, многое зависит от интуиции физиков, которые никогда не перестают удивлять нас, математиков.

На данном этапе моей карьеры, а я в игре уже около сорока лет, я, конечно, не питаю никаких иллюзий по решению этой проблемы собственными силами. В отличие от более узко очерченной задачи, которую человек в состоянии решить в одиночку, эта потребует междисциплинарных усилий, выходящих за рамки деятельности одинокого практика. Но, учитывая, что пространства Калаби-Яу занимали центральное место в некоторых из наших первых попыток получить точки опоры по квантовой геометрии, я надеюсь внести свой вклад в это грандиозное предприятие, поскольку это часть моих давних поисков божественной формы внутреннего пространства.

Ронни Чан, бизнесмен, щедро поддерживающий Институт математики Китайской Академии наук в Пекине (один из четырех институтов математики, которым я помогал при их становлении в Китае, Гонконге и Тайване), однажды сказал: «Я никогда не видел человека, который бы так настойчиво занимался одной дисциплиной, как Яу. Его интересует только математика». Чан прав, говоря о моей настойчивости и преданности математике, хотя я уверен, что если бы он искал, то обязательно нашел бы много людей, столь же упорных и преданных своему делу, как я. С другой стороны, вопрос, который я задал себе, пытаюсь понять геометрию внутренних измерений Вселенной, это, бесспорно, великий вопрос, хотя размерности сами по себе могут быть маленькими. Без настойчивости и терпения мои коллеги и я никогда бы не получили те результаты, что мы имеем. Тем не менее нам предстоит еще долгий путь.

Я читал где-то, возможно в афоризмах, что жизнь заключается в том, чтобы пройти определенный путь, затратив время и преодолев расстояние между точкой А и точкой В. Это относится и к математике, особенно к геометрии, где все сводится к тому, как добраться из А в В. Что же касается моего путешествия, все, что я могу сказать, так это то, что я доволен прогулкой.

Эпилог

Каждый день – новый бублик

Недавно один из нас двоих, менее склонный к математике, стоял в зале теоретической группы лаборатории Джефферсона в Гарварде, ожидая возможности поговорить с Эндрю Строминджером, который был занят оживленной беседой с коллегой. Через несколько минут Кумрун Вафа выскочил из офиса, и Строминджер, извинившись за задержку, пояснил, что «у Кумруна была новая идея, связанная с пространствами Калаби-Яу, которая не могла ждать». После короткой паузы он добавил: «Кажется, я слышу новые идеи о Калаби-Яу почти каждый день».²⁸⁶

Подумав, Строминджер снизил планку до «новой идеи каждую неделю». Последние несколько лет, что согласуется с замечанием Строминджера, новые научные статьи с термином «Калаби-Яу» в названии появляются чаще одного раза в неделю – и это только на английском языке. Эти многообразия – не только реликты первой струнной революции или математические курьезы, имеющие лишь исторический смысл. Они живы и здоровы и, если не живут в Париже, то, по крайней мере, до сих пор занимают достойное место в архивах математики и теоретической физики.

Это неплохо, учитывая, что в конце 1980-х годов многие физики считали, что пространства Калаби-Яу повторят судьбу динозавров и что их судьба решена. Даже такие энтузиасты Калаби-Яу, как я, занимавшиеся математикой гораздо больше, чем наш дуэт, часто заявляли, что мы говорили чепуху. В ту эпоху Филипп Канделас сделал неудачный

286 Andrew Strominger (Harvard University), February 7, 2007.

обзор для заявки на грант, что существенно снизило его финансирование. Сокращение произошло по той простой причине, что он все еще занимался исследованиями пространства Калаби-Яу. Физик, преподававший тогда в Гарвардском университете, высказался в еще более жестких терминах, которые считались «языком прошлого»: «Почему вы, идиоты, все еще работаете над этой глупой теорией?» Я был озадачен этим вопросом, а спустя два десятилетия сосредоточенного обдумывания, кажется, нашел адекватный ответ: «Ну, может быть, это не так глупо, в конце концов».

Строминджер, например, так не считает, но опять же, пространства Калаби-Яу занимают значительное место в его карьере. На самом деле вполне возможно, что он сделал больше, чем кто-либо другой, для установления роли этого класса пространств в физике. «Это удивительно, что пространства Калаби-Яу, тем не менее, сохранили свою центральную роль в физике, – говорит он. – Они продолжают появляться снова и снова, а история с черной дырой только один из примеров». Другой пример связан с новой стратегией реализации Стандартной модели в *восьмимерных* (а не *шестимерных*) многообразиях Калаби-Яу, где форма двух дополнительных измерений определяется константами связи струн, как обсуждалось в недавних статьях Вафой, Крисом Беслеем, Джонатаном Хекманом и отдельно Роном Донаги и Мартином Вийнхольтом.²⁸⁷

«Не часто можно встретить идею, которая занимает центральное место в науке так долго, – добавляет Строминджер, имея в виду стабильное господство Калаби-Яу в теории струн. – И это не потому, что идея просто слоняется поблизости, как память прошлого. Это не просто кучка чудаковатых, старомодных физиков из восьмидесятых годов вспоминает старые добрые времена. Идея продолжает жить, давать новые побеги и новые почки».²⁸⁸

Вафа, его коллега, соглашается: «Если вы интересуетесь четырехмерными калибровочными теориями, то вы можете решить, что они не имеют ничего общего с многообразиями Калаби-Яу. Но они не только имеют отношение к многообразиям Калаби-Яу, но и связаны с трехмерными Калаби-Яу, которые представляют наибольший интерес для теории струн. Аналогично, вы можете подумать, что теория римановых поверхностей не имеет ничего общего с трехмерными Калаби-Яу, но изучение римановых поверхностей в контексте трехмерных многообразий Калаби-Яу оказывается ключом к их пониманию».²⁸⁹

А еще нельзя не упомянуть Эдварда Виттена, физика, которого иногда называют преемником Эйнштейна (и если теория струн когда-нибудь докажет свою правоту, то это сравнение окажется пророческим). Виттен имел, что вполне обоснованно, близкие отношения с пространствами Калаби-Яу, а также с теорией струн в целом, где он внес весомый вклад в две первые струнные «революции». Если и когда что-то происходит в мире физики, то, вероятно, можно найти в этом «руку» (или ногу) Виттена. Ибо, как однажды сказал Брайан Грин: «Если бы я мог проследить интеллектуальные корни всего, над чем я когда-либо работал, то я считаю их ногами Виттена».²⁹⁰

Во время встречи со Строминджером в Принстоне Виттен задумчиво сказал: «Кто бы мог подумать двадцать с лишним лет назад, что заниматься теорией струн с многообразиями Калаби-Яу окажется так интересно?» И продолжил: «Чем глубже мы копаем, тем больше мы узнаем, потому что многообразие Калаби-Яу – это богатые и занимающие центральное положение [в теории] конструкции». Виттен считает, что почти каждый раз, когда мы по-новому смотрели на теорию струн, эти многообразия помогали нам, обеспечивая

287 Chris Beasley, Jonathan Heckman, and Cumrun Vafa, “GUTs and Exceptional Branes in F-Theory – I,” November 18, 2008, <http://arxiv.org/abs/0802.3391>; Chris Beasley, Jonathan Heckman, and Cumrun Vafa, “GUTs and Exceptional Branes in F-Theory – II: Experimental Predictions,” June 12, 2008, <http://arxiv.org/abs/arxiv:0806.0102>; Ron Donagi and Martijn Wijnholt, “Model Building with F-Theory,” March 3, 2008, <http://lanl.arxiv.org/pdf/0802.2969v2>; and Ron Donagi and Martijn Wijnholt, “Breaking GUT Groups in F-Theory,” August 17, 2008, <http://lanl.arxiv.org/pdf/0808.2223v1>.

288 Strominger, interview with author, July 23, 2007.

289 Cumrun Vafa (Harvard University), interview with author, November 2, 2007.

290 Leonard Mlodinow, *Euclid's Mirror* (New York: Simon & Schuster, 2002), p. 255.

основные примеры.²⁹¹

Действительно, почти все основные расчеты в теории струн сделаны на многообразиях Калаби-Яу просто потому, что мы знаем, как выполнять вычисления на этом пространстве. Благодаря «теореме Калаби-Яу», которая возникла из доказательства гипотезы Калаби, считает математик Дэвид Моррисон из Калифорнийского университета в Санта-Барбаре: «У нас есть методы из алгебраической геометрии, которые, в принципе, позволяют нам изучать и анализировать все многообразия Калаби-Яу. У нас нет таких же сильных методов, чтобы справиться с не-кэлеровыми многообразиями или семимерными многообразиями G_2 , которые играют важную роль в М-теории. В результате большей части своих успехов мы обязаны многообразиям Калаби-Яу, поскольку у нас есть инструменты для их изучения, которых у нас нет для других видов решений».²⁹² В этом смысле многообразия Калаби-Яу явились для нас своего рода лабораторией для экспериментов или, по крайней мере, для обдумывания экспериментов, которые помогают нам в изучении теории струн и, надеюсь, Вселенной в целом.

«Тот факт, что мы начали думать о Калаби-Яу как о математических объектах раньше, чем отвели для них значимую роль в физике, свидетельствует о силе человеческого разума, — отмечает стэнфордский математик Рави Вакил. — Мы не навязываем Калаби-Яу природе, но, похоже, природа навязывает их нам».²⁹³

Это не означает, однако, что пространства Калаби-Яу обязательно являются последним словом в науке или что мы даже *живем* в таком пространстве. Изучение этих многообразий позволило физикам и математикам узнать много интересного и неожиданного, но эти пространства не в состоянии объяснить все и не могут привести нас туда, куда мы предположительно хотели бы прийти. Хотя пространства Калаби-Яу не могут быть конечным пунктом назначения, они вполне могут быть «ступенями к новому уровню понимания», — говорит Строминджер.²⁹⁴

Говоря как математик, а я полагаю, что только так и могу говорить (с любой властью), я могу сказать, что полного понимания пространства Калаби-Яу пока не существует. И у меня есть сомнения в том, сможем ли мы когда-нибудь узнать все, что нам необходимо знать о таких пространствах. Одна из причин моего скептицизма связана с тем фактом, что одномерное Калаби-Яу называется эллиптической кривой, а эти кривые, представляющие собой решения кубического уравнения, в котором по крайней мере некоторые члены возведены в третью степень, являются загадочными объектами в математике. Кубические уравнения очаровывают математиков на протяжении веков. Хотя уравнения имеют простую форму (например, $y = x^{23} + ax + b$), знакомую каждому из курса алгебры старших классов школы, их решения скрывают в себе много глубоких тайн, которые могут завести практиков в отдаленные уголки математики. Знаменитое доказательство великой теоремы Ферма Эндрю Уайлса, например, вращается вокруг понимания эллиптических кривых. Однако несмотря на блестящую работу Уайлса, существует много нерешенных проблем, связанных с такими кривыми и, что эквивалентно, с одномерными Калаби-Яу, для которых пока не видно решения в поле зрения.

У нас есть основания полагать, что обобщения эллиптических кривых на более высокие размерности, из которых трехмерное пространство Калаби-Яу представляет собой только один из вариантов, можно использовать для решения серьезных загадок в математике, поскольку мы часто узнаем что-то новое, помещая особые случаи, такие как эллиптические кривые, в более общие, многомерные (любой размерности) пространства. На этом фронте изучение двумерных пространств Калаби-Яу, то есть комплексных поверхностей КЗ, уже помогло ответить на некоторые вопросы теории чисел.

Но эта работа только начинается, и мы понятия не имеем, куда она нас заведет. На

291 Edward Witten (Institute for Advanced Study), e-mail letter to author, February 12, 2007.

292 David Morrison (University of California, Santa Barbara), interview with author, May 27, 2008.

293 Ravi Vakil (Stanford University), interview with author, May 28, 2008.

294 Strominger, interview with author, August 1, 2007.

данном этапе было бы справедливым сказать, что мы едва поцарапали поверхность, неважно, является ли она поверхностью К3 или другой разновидностью Калаби-Яу. Вот почему я считаю, что глубокое понимание этих пространств может оказаться невозможным, пока мы не поймем значительную часть математики, которая охватывает геометрию, теорию чисел и анализ.

Кто-то может считать это плохой новостью, но я вижу в этом только хорошее. Это означает, что многообразия Калаби-Яу, как и сама математика, совершенствуются, идя дорогой, которая, несомненно, имеет много изгибов и поворотов. Это значит, что впереди еще много нового, что нам предстоит узнать и сделать. И тем из нас, кто боится остаться без работы, без любимого занятия и даже без научных сюрпризов, не о чем беспокоиться: в ближайшие годы такой проблемы не возникнет.

Послесловие

Вхождение в святая святых

Давайте закончим там, где мы начинали, глядя в прошлое с надеждой собрать подсказки о дороге, которая ждет нас впереди. В 387 году до нашей эры или около того, в оливковой роще в северных пригородах Афин Платон основал свою Академию, которую иногда называют первым крупным университетом в мире. Основанная им Академия просуществовала более 900 лет, вплоть до римского императора Юстиниана, который закрыл ее в 526 году нашей эры – срок жизни моей Гарвардской школы – 370 лет – кажется ничтожным в сравнении со школой Платона. По преданию, Платон поместил надпись над входом в школу, которая гласит: *Да не войдет сюда не знающий геометрии*.

Точная формулировка ставится под сомнение, так как я видел разные варианты этой надписи. Некоторые эксперты вообще отрицают ее существование: Пирс Бёрсилл-Холл, специалист по греческой математике в Кембриджском университете, предполагает, что надпись можно было легко прочитать и так: «Не парковаться перед этими воротами».²⁹⁵ Однако у нас мало оснований критически относиться к надписи. «Такое утверждение было высказано одним из древних авторитетов, и нет причин думать, что оно недостоверно, – утверждает Дональд Зейл, специалист по Платону из Университета Род-Айленда. – Это имеет смысл для меня, учитывая, что Платон считал геометрию необходимой предпосылкой к изучению философии».²⁹⁶

Я, конечно, не являюсь ни историком, ни специалистом по классической науке и поэтому не могу быть судьей в этом споре. Однако учитывая то немногое, что я знаю о Платоне, и гораздо большее, что я знаю о геометрии, я склонен принять сторону Зейла в этом вопросе, хотя бы по той причине, что, несмотря на 2400 лет или около того, что отделяют Платона от меня, мы одинаково смотрим на важность геометрии. Платон считал истины геометрии вечными и неизменными, в то время как знание, являющееся результатом эмпирической науки, более эфемерным по своей природе и неизбежно подвергаемым пересмотру. Я искренне согласен с его рассуждениями: геометрия может увести нас далеко в сторону при объяснении Вселенной на больших и малых масштабах, хотя, возможно, не до планковской шкалы, но когда мы доказываем что-то строгими математическими методами, то можем быть уверены, что оно выдержит испытание временем. Геометрические доказательства, как бриллианты, рекламируемые по телевизору, – вечны.

Хотя сведения о «теории всего» Платона, изложенные в диалогах «Тимей», поражают наших современников как абсурдные (если не на грани психического расстройства), существует много параллелей между картиной Вселенной Платона и картиной Вселенной

²⁹⁵ Piers Bursill-Hall, “Why Do We Study Geometry? Answers Through the Ages,” lecture, Faulkes Institute for Geometry, University of Cambridge, May 1, 2002.

²⁹⁶ Donald Zeyl (University of Rhode Island), interview with author, October 18, 2007.

теории струн. Геометризация – идея, что физика, которую мы наблюдаем, вытекает непосредственно из геометрии, – стоит на фундаменте обоих подходов. Платон использовал многогранники, названные в его честь Платоновыми телами, преследуя собственные цели (неудачно, я мог бы добавить), во многом точно так же, как теория струн опирается на многообразия Калаби-Яу, хотя мы надеемся, что результаты на этот раз будут лучше.

Платоновы тела в буквальном смысле построены на симметрии, как и современные теории в физике. В конце концов, поиски единой всеобъемлющей теории природы, по сути, сводятся к поиску симметрии Вселенной. Отдельные компоненты этой всеобъемлющей теории имеют свои собственные симметрии, такие как внутренняя симметрия калибровочных полей, которые дают нам лучшие современные описания электромагнитных, сильных и слабых взаимодействий. Более того, группы симметрии в этих построениях действительно связаны с симметрией Платоновых тел, хотя и не таким способом, как это представляли древние греки.

Сегодняшняя физика строится на дуальностях – идеях, заключающихся в том, что один и тот же физический мир можно описать двумя математически разными способами. Эти дуальности связывают четырехмерные квантовые теории поля с десятимерными теориями струн, десятимерную теорию струн с 11-мерной М-теорией и даже обнаруживают физическую эквивалентность между двумя многообразиями Калаби-Яу, которые на первый взгляд не имеют ничего общего. Более того, Платоновы тела имеют свои собственные дуальности: куб и октаэдр, например, образуют дуальную пару, потому что каждый из них может быть повернут двадцатью четырьмя разными способами и после поворота совпасть сам с собой. Икосаэдр и додекаэдр принадлежат к более крупной группе симметрии, будучи инвариантными относительно шестидесяти различных вариантов поворота. Тетраэдр, между тем, дуален сам себе. Любопытно, что когда мой коллега, математик Питер Кронхаймер, чей кабинет находится через несколько дверей по коридору от моего, пытался классифицировать группу из четырехмерных многообразий Калаби-Яу по симметрии, он обнаружил, что они следуют той же схеме классификации, что и Платоновы тела.

Я никоим образом не пытаюсь утверждать, что Платон, распространявший свои идеи на заре становления математики, всегда был прав. Напротив, его представления о происхождении элементов являются неверными. Точно так же попытки астронома Иоганна Кеплера объяснить орбиты планет Солнечной системы с помощью вложенных Платоновых тел, лежащих внутри концентрических сфер, также были обречены на провал. Детали в этих сценариях не складываются, и они даже не приближаются к истине. Но с точки зрения общей картины Платон во многом был на верном пути, определив некоторые из ключевых элементов головоломки, такие как симметрия, дуальность и общий принцип геометризации, которые, как мы сейчас полагаем, должны быть включены в любые реальные попытки объяснить картину мира.

В связи с этим мне кажется правдоподобным, что Платон отдал должное геометрии в надписи перед входом в его знаменитую Академию. Подобно тому как я разделяю его уважение к дисциплине, которую я выбрал много лет спустя, если бы я устанавливал вывеску над дверью моего явно не пользующегося известностью в Гарварде офиса, я бы изменил формулировку следующим образом: *Да не останется здесь не знающий геометрии*. Те же слова, я надеюсь, можно адресовать и читателям, сейчас «оставляющим» страницы этого небольшого тома и, надеюсь, смотрящим теперь на мир другими глазами.

Словарь терминов

D-брана – брана, или многомерная поверхность в теории струн, на которой могут заканчиваться открытые струны, то есть струны, которые не являются замкнутыми петлями.

Алгебраическая геометрия – раздел математики, использующий алгебраические методы для решения геометрических задач. Главным предметом изучения алгебраической

геометрии являются множества решений систем полиномиальных (задаваемых многочленами) уравнений.

Аномалия – нарушение симметрии, которое не является очевидным в классической теории, но становится явным при рассмотрении квантовых эффектов.

Антропный принцип – идея, согласно которой все наблюдаемые свойства Вселенной являются именно такими, потому что во Вселенной с другими свойствами не смог бы возникнуть наблюдатель. Иначе говоря, Вселенная выглядит именно так, потому что, если бы значения фундаментальных констант слегка отличались от существующих, жизнь никогда бы не зародилась, и человек, способный наблюдать такую Вселенную, не появился бы.

Бозон – частица с целым значением спина. Название частицы происходит от фамилии физика Бозе. Бозоны подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна, что означает, что в одном и том же состоянии может находиться неограниченное количество частиц. Элементарные бозоны являются квантами полей – переносчиками взаимодействий между элементарными фермионами – лептонами и кварками.

Большой взрыв – теория, согласно которой наша Вселенная начала расширяться из состояния с чрезвычайно высокой температурой и плотностью, и это расширение непрерывно продолжается до настоящего времени.

Брана – фундаментальный объект теории струн, представляющий собой n -мерную мембрану (отсюда и произошло название объекта). Точка является 0-браной, струна – 1-браной, мембрана – 2-браной и т. д. Основными типами стабильных n -бран являются D-браны, M-браны и NSS-браны.

Вакуум – состояние, лишенное вещества, с самой низкой плотностью энергии из всех возможных или основное состояние данной системы.

Вектор – геометрический объект (направленный отрезок), который характеризуется длиной и направлением. В общем случае в многомерном пространстве вектором называется упорядоченный набор чисел, преобразующийся при повороте системы координат по определенным правилам.

Выпуклый объект – объект, любые две точки которого могут быть соединены отрезком прямой, все точки которого принадлежат этому объекту, то есть отрезок полностью проходит внутри объекта.

Гауссиана – кривая, характеризующая распределение вероятностей случайной величины, иногда называемая колоколоподобной кривой. Это распределение вероятностей названо по имени математика Карла Фридриха Гаусса, который использовал его для анализа астрономических и других данных.

Геодезическая – траектория, которая, как правило, представляет собой кратчайший путь между двумя точками. На двухмерной плоскости эта траектория является отрезком прямой. На двухмерной сфере геодезическая находится на так называемой большой окружности, которая проходит через начальную и конечную точки на сфере, а ее центр совпадает с центром сферы. В зависимости от того, как проходит путь по большой окружности, геодезическая может быть или кратчайшим путем между этими двумя точками, или кратчайшим путем между этими точками по сравнению с любым соседним путем.

Геометрический анализ – математическая дисциплина, в которой применяют методы дифференциального исчисления для решения геометрических задач.

Геометрия – раздел математики, изучающий размеры, формы и кривизну исследуемых пространств.

Гетеротическая теория струн – класс, который включает две из пяти теорий струн: $E_8 \times E_8$ и $SO(32)$, отличающиеся группами симметрии. Обе гетеротические теории включают только «закрытые» струны или петли, но не открытые.

Гипотеза Калаби – математическая гипотеза, выдвинутая в начале 1950-х годов геометром Эудженио Калаби, согласно которой пространства, удовлетворяющие определенным топологическим требованиям, могут также удовлетворять строгому геометрическому условию (условию кривизны), известному как условие риччи-плоского

пространства. Гипотеза охватывает и более общие случаи, когда кривизна Риччи не равна нулю.

Гипотеза Пуанкаре (в трех измерениях) – знаменитая гипотеза, сформулированная Анри Пуанкаре более ста лет назад и утверждающая, что если какую-нибудь петлю, находящуюся в трехмерном пространстве, можно сжать в точку без разрыва пространства или самой петли, то такое пространство топологически эквивалентно сфере.

Гипотеза – предположение, которое на начальной стадии исследования предлагают без приведения полного доказательства.

Гладкость – функция является гладкой, если в каждой точке она имеет бесконечное количество производных. Гладкое многообразие – это многообразие, которое везде является дифференцируемым, часто – бесконечно дифференцируемым, то есть производную в любой точке на многообразии можно взять сколько угодно раз.

Голономия – понятие в дифференциальной геометрии, связанное с кривизной и предполагающее перемещение вектора по замкнутому контуру наподобие параллельного переноса. Грубо говоря, голономия поверхности (или многообразия) является мерой поворота касательного вектора при перемещении его вдоль петли на этой поверхности.

Горизонт событий – поверхность, окружающая черную дыру, за пределы которой не может выйти ничего, включая свет.

Гравитационные волны – возмущения гравитационного поля, обусловленные присутствием массивных объектов или локализованных источников энергии. Считается, что эти волны должны распространяться со скоростью света. Несмотря на то что гравитационные волны до сих пор непосредственно не обнаружены, найдены косвенные доказательства их существования.

Гравитация – согласно современным представлениям, самая слабая из четырех сил природы. Ньютон рассматривал гравитацию как взаимное притяжение двух массивных объектов, в то время как Эйнштейн показал, что гравитацию можно описать в терминах кривизны пространства-времени.

Группа симметрии – набор операций, таких как вращение, отражение и перемещение, которые сохраняют объект неизменным.

Декартово (прямое) произведение – множество, элементами которого являются всевозможные упорядоченные пары элементов двух исходных множеств. Декартово произведение используется для построения нового геометрического объекта на основе двух существующих. Например, декартово произведение квадрата и перпендикулярного к плоскости квадрата отрезка прямой является параллелепипедом. Произведение окружности и линии представляет собой цилиндр. Прямое произведение двух окружностей дает двумерный тор.

Дифференциальная геометрия – раздел математики, изучающий гладкие многообразия. Дифференциальная геометрия при помощи методов математического анализа исследует, каким образом выбранное свойство пространства, например его кривизна, изменяется от точки к точке.

Дифференциальное уравнение – уравнение, связывающее значение неизвестной функции со значениями ее производных. Обычные дифференциальные уравнения включают только одну переменную, в то время как дифференциальные уравнения в частных производных включают две или более независимых переменных. Когда процессы в физическом или природном мире описывают математически, то, как правило, делают это с помощью дифференциальных уравнений.

Дифференцируемость – термин, отражающий гладкость функции. Гладкими называются функции, производные от которых можно взять в каждой точке неограниченное число раз. Функция называется бесконечно дифференцируемой, если в каждой точке можно взять бесконечное число производных.

Дуализм – ситуация, когда две теории, по крайней мере внешне кажущиеся различными, приводят к одним и тем же физическим следствиям.

Евклидова геометрия – геометрическая теория, изложенная греческим математиком Евклидом, в которой верна теорема Пифагора: сумма углов треугольника всегда равна 180 градусов, а через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести в той же плоскости одну и только одну прямую, не пересекающуюся с данной (так называемая аксиома параллельных). Впоследствии были разработаны другие виды геометрии, получившие название неевклидовых, где упомянутые принципы не всегда соблюдаются.

Единая теория поля – попытка объединения всех сил природы в пределах одной охватывающей все теории. Альберт Эйнштейн посвятил последние тридцать лет своей жизни этой цели, которая до сих пор полностью не достигнута.

Зеркальная симметрия – соответствие между двумя топологически отличными многообразиями Калаби-Яу, которое приводит к точно такой же физической теории.

Измерение – независимое направление, или «степень свободы», в котором можно перемещаться в пространстве или во времени. Также можно считать, что размерность пространства – это минимальное число координат, необходимых для задания положения точки в пространстве. Мы называем плоскость «двухмерной», потому что для указания положения любой точки на плоскости достаточно двух чисел – координат x и y . Наш привычный мир имеет три пространственных измерения (вправо-влево, вперед-назад, вверх-вниз), а пространство-время, как полагают, имеет четыре измерения: три пространственных и одно временное. Теория струн (наряду с другими теориями) предполагает, что пространство-время имеет дополнительные пространственные измерения, которые очень малы, свернуты и невидимы.

Инвариант – число или другая фиксированная характеристика пространства, которая не меняется при преобразованиях, допускаемых данной математической теорией. Например, топологический инвариант не меняется при непрерывной деформации (растяжении, сжатии или изгибе) исходного пространства при переходе от одной формы к другой. В евклидовой геометрии инвариантными преобразованиями являются переносы и вращения. В конформной теории инвариантом конформных преобразований являются углы.

Интегрирование – один из основных инструментов математического анализа, где под интегрированием понимают способ нахождения площади, ограниченной заданной кривой. При интегрировании ограниченная область разбивается на бесконечно тонкие прямоугольники и площади всех прямоугольников складываются.

Инфляция – постулируемый экспоненциальный рост размеров Вселенной в начале первой секунды расширения. Идея, впервые предложенная физиком Аланом Гутом в 1979 году, одновременно решает многие космологические загадки, а также помогает объяснить происхождение материи и механизм расширения Вселенной. Инфляция согласуется с результатами астрономических наблюдений, но до сих пор не доказана.

Искажение – в применении к коэффициенту искажения и искаженному произведению – идея, состоящая в том, что геометрия четырехмерного пространства-времени, в котором мы обитаем, не является независимой от скрытых дополнительных измерений – на нее влияют внутренние размерности теории струн.

Калибровочная теория – теория поля, например Стандартная модель, в которой симметрии калиброваны. Если конкретная симметрия калибрована (в этом случае ее называют калибровочной симметрией), то эту симметрию можно применить к полю в разных точках пространства-времени по-разному, и при этом физика не изменится. Если симметрии калиброваны, то в теорию можно вводить особые поля, называемые калибровочными полями, так что физика остается инвариантной.

Касательная – наилучшее линейное приближение к кривой в данной точке на этой кривой. Это же определение справедливо для многомерных кривых и их касательных.

Касательное расслоение – частный тип расслоения, осуществляемый путем присоединения касательного пространства к каждой точке многообразия. Касательное пространство содержит все векторы, касательные к многообразию в этой точке. Например, если многообразие является двухмерной сферой, то касательное пространство представляет

собой двумерную плоскость, которая содержит все касательные векторы. Если многообразие является трехмерным объектом, то касательное пространство также будет трехмерным (см. *Расслоение*).

Квадратное уравнение – уравнение второго порядка вида $ax+bx+c=0$.

Квантовая геометрия – вариант геометрии, по замыслу его создателей, предназначенный для реалистичных описаний физических явлений на ультрамикроскопических масштабах, где квантовые эффекты становятся существенными.

Квантовая гравитация – давно ожидаемая теория, которая смогла бы объединить квантовую механику и общую теорию относительности и обеспечить микроскопическое, или квантовое, описание гравитации, сравнимое с теми описаниями, которые уже имеются для трех других сил. Теория струн представляет собой попытку создания теории квантовой гравитации.

Квантовая механика – набор законов, определяющих поведение Вселенной на атомных масштабах. Квантовая механика содержит, среди прочего, положение о том, что частица может быть эквивалентно описана как волна, так и наоборот. Другим центральным понятием является то, что в некоторых ситуациях физические величины, такие как энергия, импульс и заряд, принимают только дискретные значения (квантуются), а не любые возможные.

Квантовая теория поля – математическая модель, объединяющая квантовую механику и теорию поля. Сегодня квантовые теории поля служат главной теоретической основой физики элементарных частиц.

Квантовые флуктуации – случайные колебания на субмикроскопических масштабах, обусловленные квантовыми эффектами, например принципом неопределенности.

Кварк – класс элементарных, субатомных частиц, из которых, в частности, построены протоны и нейтроны. Считается, что всего существует шесть различных кварков. Кварки, в отличие от лептонов, участвуют в сильных взаимодействиях.

Класс Черна – набор фиксированных свойств, или инвариантов, которые используют, чтобы охарактеризовать топологию комплексных многообразий. Число классов Черна для конкретного многообразия равно числу комплексных измерений. Последний (или «верхний») класс Черна равен эйлеровой характеристике. Классы Черна названы по имени геометра Ч. Ш. Черна, который ввел это понятие в 1940-х годах.

Классическая физика – набор физических законов, сформулированных, главным образом, до XX столетия, который не включает принципы квантовой механики.

Компактификация – сворачивание пространства таким образом, что оно становится компактным, или имеющим конечную протяженность. В теории струн различные способы сворачивания, или компактификации, дополнительных измерений приводят к различной физике.

Компактное пространство – множество, которое является замкнутым и ограниченным, то есть содержащим в себе свою границу и имеющим конечную *меру* (длину, площадь, объем и т. п.). Сфера является компактной, в то время как бесконечная плоскость – нет.

Комплексное многообразие – многообразие, которое можно описать математически с помощью комплексных координат – его обычная или действительная размерность вдвое больше его комплексной размерности. Все комплексные многообразия являются также действительными многообразиями четной размерности. Однако не все действительные многообразия четной размерности являются комплексными многообразиями, поскольку в некоторых случаях невозможно последовательно описать полное многообразие комплексными числами (см. *Многообразие*).

Комплексные числа – числа вида $a + bi$, где a и b – действительные числа, а $i = \sqrt{-1}$. Комплексные числа можно разбить на две составляющие, причем a называют действительной частью, а b – мнимой.

Кониформ – сингулярность, имеющая коническую форму. Сингулярности этого рода обычно встречаются в многообразиях Калаби-Яу.

Кониформный переход – процесс, при котором пространство разрывается в

непосредственной близости от конифолдной сингулярности на многообразии Калаби-Яу и затем восстанавливается способом, который меняет топологию исходного многообразия. Таким образом, топологически разные многообразия Калаби-Яу могут быть связаны между собой посредством конифолдного перехода.

Константа связи Юкавы – величина, определяющая связь или силу взаимодействия между скалярным полем и фермионом – известным примером является взаимодействие кварков или лептонов с полем Хиггса. Так как масса частиц зависит от их взаимодействия с полем Хиггса, константа связи Юкавы так же тесно связана с массой частиц.

Константа связи – число, определяющее силу физического взаимодействия. Например, константа связи струнной теории описывает взаимодействие струн, указывая, насколько вероятно, что одна струна расщепится на две или две струны сольются в одну.

Конформная инвариантность – преобразование, сохраняющее углы. Понятие конформной инвариантности включает и масштабную инвариантность, поскольку такие изменения масштаба, как изотропное и однородное растяжение или сжатие пространства, также оставляют углы нетронутыми (см. *Масштабная инвариантность*).

Конформная теория поля – квантовая теория поля, сохраняющая масштабную и конформную инвариантность. Если в обычной квантовой теории величина сильного взаимодействия, удерживающего кварки, изменяется с расстоянием, то в конформной теории поля его величина остается одинаковой на любом расстоянии.

Координаты – набор чисел, определяющих положение точки в пространстве или в пространстве-времени. Например, декартовы координаты – это стандартные координаты на плоскости, на которой каждая точка задается двумя числами, одно число – это расстояние от начала координат в направлении x , а другое – расстояние от начала координат в направлении y . Эта система координат названа в честь французского математика и философа Рене Декарта. Для определения положения точки в многомерном пространстве требуется большее количество координат.

Космические струны – одномерные объекты, которые могут принимать форму длинных, чрезвычайно тонких и чрезвычайно массивных нитей. Некоторые варианты теории поля предсказывают образование космических струн во время фазового перехода на раннем периоде существования Вселенной. Космические струны так же естественно возникают в некоторых вариантах теории струн.

Космический микроволновой фон, КМФ – электромагнитное излучение, основной спектр которого лежит преимущественно в микроволновой области, оставшейся после Большого взрыва, которое с тех пор охлаждалось и рассеивалось и в настоящее время пронизывает всю Вселенную.

Космологическая постоянная – физическая постоянная, введенная Эйнштейном в уравнения общей теории относительности, характеризующая свойства вакуума. Космологическая постоянная или *лямбда-член*, характеризует энергию, содержащуюся непосредственно в пространстве, то есть форму энергии, которая, как считается, заполняет все пространство, что предполагает возможные объяснения феномена темной энергии (см. *Темная энергия и Энергия вакуума*).

Кривизна Риччи – вид кривизны, который в общей теории относительности Эйнштейна связан с потоком вещества в пространстве-времени.

Кривизна – количественная мера отклонения поверхности или пространства от плоского. Например, кривизна окружности равна обратной величине ее радиуса: чем меньше кривизна окружности, тем больше ее радиус. В многомерном случае кривизна определяется не только числом, но также учитывает различные направления, в которых может искривляться многообразие. В то время как двумерные поверхности можно описывать одним типом кривизны, в случае большего числа измерений возможны различные виды кривизны.

Кубическое уравнение – уравнение, в котором высшая степень переменной равна трем, например $ax^3+bx^2+cx+d=0$.

Кэлерово многообразие – комплексное многообразие, названное в честь геометра

Эриха Кэлера, обладающее особым видом голономии, которая сохраняет комплексную структуру многообразия при операции параллельного переноса.

Ландшафт – в теории струн диапазон возможных форм или геометрий, которые могут принимать скрытые измерения и которые также зависят от числа способов, с помощью которых потоки можно поместить во внутреннее пространство. Иначе говоря, ландшафт включает диапазон возможных вакуумных состояний, разрешенных теорией струн.

Лемма – доказанное утверждение в математике, полезное не само по себе, а как промежуточный шаг для доказательства других, более общих утверждений. Но сами по себе леммы также могут оказаться полезными, иногда в большей степени, чем предполагалось изначально.

Лептон – класс элементарных частиц, включающий электроны и нейтрино. В отличие от кварков, которые относятся к более тяжелым фермионам, лептоны не участвуют в сильных взаимодействиях, а следовательно, не захватываются атомными ядрами.

Линейное уравнение – уравнение (в случае двух переменных) общего вида $ax+by+c=0$. Уравнения такого рода не содержат членов высших порядков, таких как, например, x^2 , y^2 или xy , и их график представляет собой прямую линию. Еще одна ключевая особенность линейного уравнения состоит в том, что изменение одной переменной x приводит к пропорциональному изменению другой переменной y и наоборот. Тем не менее линейные уравнения не обязательно должны содержать только две переменные, x и y , напротив, они могут иметь любое количество переменных.

Масштабная инвариантность – свойство, сохраняющееся независимо от физического масштаба. В масштабно-инвариантной системе физика остается неизменной, если размер системы однородно и изотропно увеличить или уменьшить.

Математический анализ – набор инструментов, включая производные, интегралы, пределы и бесконечные ряды, которые ввели в современную математику Исаак Ньютон и Готфрид Лейбниц. В англоязычной литературе используется термин *calculus* (исчисление).

Матрица – двумерный (прямоугольный или квадратный) массив чисел или более сложных алгебраических выражений. Матрицы можно складывать, вычитать, перемножать и делить, используя относительно простой набор правил. Матрицу можно записать в сокращенном виде как набор элементов вида a_{ij} где i – номер строки, а j – номер столбца.

Метрика – математический объект, в общем виде представляемый тензором, используемый для измерения расстояний в пространстве или многообразии. В искривленном пространстве метрика показывает, в какой мере фактическое расстояние отличается от числа, полученного по теореме Пифагора. Знание метрики пространства эквивалентно пониманию геометрии этого пространства.

Минимальная поверхность – поверхность, площадь которой локально минимизирована, что означает, что ее площадь нельзя уменьшить путем замены небольших участков поверхностей участками поверхности другой формы.

Мировой лист – поверхность, вычерчиваемая струной, движущейся в пространстве-времени.

Многогранник (полиэдр) – геометрический объект, состоящий из плоских граней, соприкасающихся прямыми краями. Трехмерные многогранники состоят из многоугольных граней, которые соприкасаются краями, образуя ребра, а ребра, в свою очередь, сходятся в вершинах. В качестве примера многогранников можно привести тетраэдр и куб.

Многообразие Калаби-Яу – широкий класс геометрических пространств с нулевой кривизной Риччи, возможность которых была показана при доказательстве гипотезы Калаби. Эти пространства, или формы, являются комплексными, что означает, что они должны быть четной размерности. Случай шестимерного пространства представляет особый интерес для теории струн, где многообразие служит в качестве носителя шести скрытых, или дополнительных, измерений.

Многообразие – топологическое пространство, которое локально является евклидовым, что означает, что каждая точка лежит в месте, напоминающем плоское пространство.

Многоугольник (полигон) – плоская замкнутая ломаная, построенная из отрезков прямых. Например, треугольник, квадрат или пятиугольник.

М-теория – теория, которая объединяет пять отдельных теорий струн в одну всеобъемлющую теорию с одиннадцатью пространственно-временными измерениями. Основные составляющие М-теории: браны, в частности двухмерные (М2) и пятимерные (М5). В М-теории струны суть одномерные браны. Термин М-теория был введен Эдвардом Витеном, который, главным образом, заложил ее основы во время «второй струнной революции» в 1995 году.

Наклон – термин, обозначающий крутизну или градиент кривой, – мера изменения крутизны по вертикали по сравнению с ее изменениями в горизонтальном направлении.

Нарушение симметрии – процесс, который понижает количество наблюдаемых симметрий в системе. Имейте в виду, что после нарушения симметрии она все еще может существовать, хотя является скорее скрытой, чем видимой.

Натяжение – величина, отражающая способность сопротивления струны к растяжению или изгибу. Натяжение струны соответствует линейной плотности энергии.

Неевклидова геометрия – геометрия, которую применяют к неплоским пространствам, таким как сфера, где параллельные прямые, вопреки пятому постулату Евклида, могут пересекаться. В неевклидовом пространстве сумма углов треугольника может быть меньше или больше 180 градусов.

Нейтронная звезда – звезда большой плотности, почти полностью состоящая из нейтронов, которая формируется в процессе гравитационного коллапса массивной звезды, исчерпавшей свое ядерное топливо.

Не-кэлерово многообразие – класс комплексных многообразий, который включает кэлеровы многообразия, но также включает многообразия, которые не могут поддерживать кэлерову метрику.

Нелинейное уравнение – уравнение, которое не является линейным, то есть изменение одной переменной может привести к непропорциональному изменению другой переменной.

Ньютоновская постоянная – коэффициент пропорциональности G , который связывает силу гравитации теории Ньютона с массами тяготеющих тел и расстоянием между ними. Хотя закон всемирного тяготения Ньютона вытеснен общей теорией относительности Эйнштейна, он все же остается хорошим приближением во многих случаях.

Общая теория относительности – теория Альберта Эйнштейна, описывающая всемирное тяготение как геометрию пространства-времени.

Ортогональный – перпендикулярный.

Параллельный перенос – способ перемещения векторов вдоль траектории на поверхности или многообразии, при котором сохраняются длины этих векторов, а также углы между любыми двумя векторами. Параллельный перенос легко наблюдать на плоской двухмерной плоскости, но в более сложных, искривленных пространствах, возможно, придется решать дифференциальные уравнения, чтобы определить точный способ перемещения векторов.

Планковская шкала – масштаб длины (около 10^{-33} сантиметра), времени (около 10^{-43} секунды), энергии (около 10^{28} электрон-вольт) и массы (около 10^{-5} грамм), на котором необходимо учитывать влияние квантовых эффектов на гравитацию.

Платоновы тела – пять правильных выпуклых многогранников: тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр и икосаэдр, которые удовлетворяют следующим свойствам: грани многогранников состоят из конгруэнтных правильных многоугольников, ребра имеют одинаковую длину, а в каждой вершине сходится одно и то же количество граней. Греческий философ Платон предположил, что элементы Вселенной состоят из этих твердых тел, которые впоследствии были названы в его честь.

Поверхность К3 – многообразие Калаби-Яу в четырех вещественных измерениях или, аналогично, – в двух комплексных измерениях, названное в честь геометров Эрнста Куммера, Эриха Кэлера и Кунихико Кодайра – 3К. Название этих поверхностей, или многообразий,

также связано с названием знаменитой горы в Гималаях – К2.

Поколение – элемент классификации фундаментальных элементарных частиц – лептонов и кварков – в три группы, каждая из которых состоит из двух кварков и двух лептонов. Частицы из разных поколений идентичны во всем, за исключением массы, которая увеличивается от поколения к поколению.

Поле – физическое понятие, введенное в XIX веке физиком Майклом Фарадеем, которое предполагает задание конкретной величины, например числа или вектора, в каждой точке пространства-времени. Хотя поле может описывать силу, действующую на частицу в данной точке пространства, оно также может описывать и саму частицу.

Полином (многочлен) – выражение с одной или несколькими переменными, содержащее операции сложения, вычитания, умножения и возведения в степень, где показатель степени является целым неотрицательным числом. Хотя полиномиальные уравнения на первый взгляд могут показаться простыми, их часто очень трудно (а иногда и невозможно) решить.

Поток – силовые линии, похожие на известные электрические и магнитные поля, которые соответствуют особым полям в теории струн.

Принцип неопределенности – также известен как принцип неопределенности Гейзенберга. Постулат квантовой механики, который утверждает, что нельзя с абсолютной точностью определить одновременно положение объекта и его импульс или одновременно определить энергию состояния и время нахождения системы в этом состоянии. Чем точнее определена одна из этих переменных, тем выше неопределенность другой переменной.

Произведение – результат умножения двух или более чисел или других величин.

Производная – мера изменения функции или величины по отношению к конкретной переменной или переменным. Для каждого значения аргумента (или аргументов) функция дает конкретный результат (число). Производная характеризует, насколько сильно изменяется результат при небольшом изменении аргумента. Если у нас есть график функции, скажем, на плоскости x - y , то производная функции в данной точке равна тангенсу угла наклона касательной к графику в этой точке.

Пространство модулей – для данного топологического объекта, например для многообразия Калаби-Яу, пространство модулей состоит из множества всех возможных геометрических структур – непрерывного набора многообразий, охватывающего все возможные формы и размеры.

Пространство-время – в четырехмерном варианте пространство-время представляет собой объединение трех пространственных и одного временного измерения. Это понятие было введено в начале XX столетия Альбертом Эйнштейном и Германом Минковским. Однако понятие пространства-времени не ограничивается четырьмя измерениями. Теория струн базируется на десятимерном пространстве-времени, а М-теория, с которой она связана, основана на 11-мерном пространстве-времени.

Расслоение – топологическое пространство, которое образовано из многообразия или прикреплено к нему. Чтобы представить его, предположим, что многообразие чем-то похоже на сферу. Далее предположим, что к каждой точке на поверхности сферы присоединен массив векторов (или векторное пространство). Расслоение состоит из самого многообразия (в данном случае – сферы) и массива векторов, присоединенных к каждой точке (см. *Касательное расслоение*).

Релятивистский – термин, применяемый к частицам или другим объектам, движущимся со скоростями, приближающимися к скорости света.

Риманова геометрия – математическая модель для изучения кривизны пространства произвольной размерности. Эта геометрия, предложенная Георгом Бернхардом Риманом, лежит в основе теории относительности.

Риманова поверхность – одномерное комплексное многообразие или, что эквивалентно, двумерная действительная поверхность. В теории струн поверхность, которую замечает струна при своем движении через пространство-время, считается

римановой поверхностью.

Род – грубо говоря, количество дырок в поверхности или пространстве. Например, обычный бублик – это поверхность 1-го рода, в то время как сфера, в которой отсутствуют дырки, относится к поверхности 0-го рода.

Сильное взаимодействие – взаимодействие, ответственное за связывание кварков внутри протонов и нейтронов и за удержание протонов и нейтронов вместе с образованием атомного ядра.

Симметрия – операция с объектом, физической системой или уравнением, оставляющее их неизменными. Например, круг остается неизменным при повороте вокруг своего центра. Квадрат или равносторонний треугольник остаются неизменными при повороте вокруг центра на 90 и 120 градусов соответственно. Однако квадрат не обладает симметрией относительно поворота на 45 градусов, так как при этом его внешний вид изменился бы на правильный ромб, поставленный на угол.

Сингулярность – точка в пространстве-времени, где кривизна и другие физические характеристики, такие как плотность, становятся бесконечными и обычные законы физики нарушаются. Центр черной дыры и момент Большого взрыва считаются сингулярностями.

Скалярное поле – поле, которое полностью может быть описано единственным числом в каждой точке пространства. Число, соответствующее температуре в каждой точке пространства, представляет собой один из примеров скалярного поля.

Слабое взаимодействие – одна из четырех известных фундаментальных сил природы, которая отвечает за радиоактивный распад и за ряд других процессов.

Специальная теория относительности – разработанная Эйнштейном теория, объединяющая пространство и время и утверждающая, что законы физики должны быть одинаковыми для всех наблюдателей, движущихся с постоянной скоростью, независимо от их скорости. Согласно специальной теории относительности, скорость света является одинаковой для всех наблюдателей. Эйнштейн показал, что для покоящейся частицы ее энергия и масса связаны формулой $E=mc^2$.

Стандартная модель – теория в физике элементарных частиц, которая описывает известные элементарные частицы и взаимодействия (сильные, слабые и электромагнитные) между ними. Гравитация не входит в Стандартную модель.

Субмногообразие – пространство более низкой размерности, расположенное внутри пространства более высокой размерности. Например, можно представить, что тор – это замкнутая трубка, построенная из окружностей, каждая из которых является субмногообразием в более крупной структуре или многообразии, которым является сам тор.

Суперсимметрия – математическая симметрия, которая связывает фермионы с бозонами. Важно отметить, что подразумеваемые суперсимметрией бозоны, которые были бы «суперпартнерами» для известных кварков и лептонов, до сих пор не наблюдались. Хотя суперсимметрия является важным элементом большинства теорий струн, обнаружение четкого доказательства ее наличия не обязательно докажет, что верна сама теория струн.

Сфера – используемый в геометрии термин обычно относится к двумерной поверхности шара, а не к трехмерному объекту. Однако понятие сферы не ограничивается двумя измерениями и может применяться к объектам любой размерности от нуля и выше.

Темная энергия – таинственная форма энергии, составляющая, согласно последним наблюдениям, более 70 процентов всей энергии Вселенной. Темную энергию можно характеризовать величиной *энергии вакуума*. Космологи верят, что она является причиной ускоренного расширения Вселенной.

Темное вещество – гипотетическое несветящееся вещество неизвестной природы, пока что непосредственно не обнаруженное. Темная материя, как полагают, составляет большую часть вещества Вселенной и на нее приходится примерно 25 процентов полной энергии Вселенной.

Теорема о положительности массы – также называется теоремой о положительности энергии. Утверждение о том, что в любой изолированной физической системе совокупная

масса или энергия должна быть положительной.

Теорема Пифагора – утверждение, что в прямоугольном треугольнике сумма квадратов длин двух катетов равна квадрату длины гипотенузы $a^2+b^2=c^2$.

Теорема – утверждение или предположение, доказываемое путем формальных математических рассуждений.

Теория Калуцы-Клейна – ранняя попытка объединить общую теорию относительности и электромагнетизм за счет введения дополнительного (пятого) измерения. Термин «Калуца-Клейн» иногда используют как сокращенное название общего метода объединения сил природы путем постулирования существования дополнительных невидимых измерений.

Теория поля – теория, в которой как частицы, так и силы описываются полями.

Теория струн – физическая теория, объединяющая квантовую механику и общую теорию относительности, и считающаяся главным кандидатом на роль теории квантовой гравитации. Теория струн предполагает, что фундаментальные строительные блоки природы являются не точечными частицами, а крошечными, одномерными нитями, называемыми струнами, которые встречаются как в открытой, так и в закрытой (петли) форме. Существует шесть типов струнных теорий: бозонная, типа I, типа IIA, типа IIB, гетеротическая теория E8×E8 и гетеротическая теория SO(32), и все они связаны между собой. Термин теория суперструн иногда используют вместо термина теория струн, чтобы явно показать, что теория включает суперсимметрию.

Топология – общая характеристика геометрического пространства. Топология имеет дело только с глобальными свойствами пространства, а не с его точным размером или формой. В топологии формы подразделяются на группы, которые могут быть преобразованы друг в друга путем растяжения или сжатия без разрыва или изменения числа дырок.

Тор – класс топологических форм, который включает двухмерную поверхность типа бублика, а также ее многомерные обобщения.

Туннелирование – явление, когда частица проходит через потенциальный барьер в другую область пространства, что запрещено в классической физике, но разрешено (или имеется ненулевая вероятность) в квантовой механике.

Уравнение Дирака – система из четырех уравнений, предложенная британским физиком Полем Дираком для описания поведения свободных частиц, обладающих спином, таких как, например, электроны.

Уравнения Эйнштейна – уравнения, описывающие гравитацию в общей теории относительности. Уравнения Эйнштейна связывают кривизну пространства-времени с массой и энергией, содержащимися в этом пространстве.

Уравнения Янга-Миллса – обобщение уравнений Максвелла, описывающих электромагнетизм. Сейчас физики используют уравнения Янга-Миллса для описания сильных и слабых взаимодействий, а также электрослабого взаимодействия, которое объединяет электромагнитные и слабые взаимодействия. Уравнения являются частью теории Янга-Миллса или калибровочной теории, которая была разработана в 1950-е годы физиками Чженьнин Янгом и Робертом Миллсом.

Фазовый переход – внезапное изменение свойств вещества или системы, то есть их переход из одного состояния в другое. Кипение, замерзание и плавление – известные вам примеры фазовых переходов воды.

Фермион – частица с полуцелым значением спина. Этот класс частиц включает лептоны и кварки, так называемые материальные частицы Стандартной модели.

Фундаментальная группа – способ классификации пространств в топологии. В случае пространств с *тривиальной* фундаментальной группой каждую петлю, которую можно создать в этом пространстве, можно стянуть в точку, не разрезая пространство и не проделывая в нем дыр. Пространства с *нетривиальной* фундаментальной группой содержат нестягиваемые петли, то есть петли, которые нельзя стянуть в точку из-за наличия некоторого препятствия, например дыры.

Функция – математическое выражение, например, вида $f(x)=3x^2$, где каждому

значению аргумента x соответствует одно значение функции $f(x)$.

Хиггса поле – гипотетическое поле, переносчиком которого является бозон Хиггса, ответственный за наличие масс у частиц в Стандартной модели. Есть надежда, что поле Хиггса можно будет обнаружить на Большом адронном коллайдере.

Ходжа ромб – матрица или массив чисел Ходжа, который содержит подробную топологическую информацию о кэлеровом многообразии, из которого можно определить эйлерову характеристику и другие топологические свойства. Ромб Ходжа для шестимерного многообразия Калаби-Яу состоит из массива четыре на четыре. Массивы различных размеров соответствуют пространствам разных четных размерностей. Числа Ходжа, названные в честь шотландского геометра Уильяма Ходжа, помогают разобраться с внутренней структурой пространства.

Черная дыра – область в пространстве-времени, характеризующаяся настолько большой кривизной, что ничто, даже свет, не может покинуть ее пределы.

Эйлерова характеристика, или число Эйлера, – целое число, которое помогает охарактеризовать топологическое пространство в наиболее общем смысле. Эйлерова характеристика, самый простой и наиболее известный топологический инвариант пространства, впервые введенный Леонардом Эйлером для многогранников и с тех пор обобщенный и на другие пространства. Эйлерова характеристика многогранника равна числу вершин минус число ребер плюс число граней.

Электромагнитное взаимодействие – одно из четырех фундаментальных взаимодействий; объединяет в себе электричество и магнетизм.

Элементарная частица – частица, у которой не обнаружено наличия никакой внутренней структуры, то есть частицы, которые мы сегодня считаем фундаментальными и неделимыми. В Стандартной модели элементарными частицами являются кварки, лептоны и калибровочные бозоны.

Энергия вакуума – энергия, связанная с пустым пространством. Однако энергия, содержащаяся в вакууме, не равна нулю, поскольку в квантовой теории пространство никогда не является полностью пустым. Частицы непрерывно появляются на свет на мгновение и затем исчезают в небытие.

Энтропия – мера беспорядка физической системы; неупорядоченные системы имеют высокую энтропию, а упорядоченные – низкую. Энтропию также можно рассматривать как число способов перестановок, составляющих систему частей (например, молекул) без изменения общих характеристик системы, таких как объем, температура или давление.