Министерство образования Российской Федерации
Санкт-Петербургская государственная лесотехническая академия имени С. М. Кирова

Ю.Н.Ловягин

Исчисление бесконечно малых Г. В. Лейбница в современном изложении,
или Введение в нестандартный анализ А. Робинсона

Издание второе, дополненное и исправленное

Санкт-Петербург 2004

УДК 517.11

Л 68

Ловягин Ю. Н. Исчисление бесконечно малых Г. В. Лейбница в современном изложении, или Введение в нестандартный анализ А. Робинсона. – Санкт-Петербург: ЛТА, 2004 – 115 с.

ISBN 5-89804-018-8

Ил. 6. Библиогр. 28 назв.

В монографии излагается способ обоснования существования актуальных бесконечно малых чисел, основанный на понятии двузначной меры. Кроме того, предлагается аксиоматический подход к понятию расширенной числовой прямой, содержащей как бесконечно малые, так и бесконечно большие числа. Излагается методология преподавания основ математического анализа "в духе основоположников" – на языке актуальных бесконечно малых.

Книга может быть полезна студентам и аспирантам математических факультетов университетов и педагогических вузов, а также учителям школ и преподавателям высших и средних учебных заведений.

Печатается по постановлению редакционно-издательского совета Сыктывкарского лесного института.

Р е ц е н з е н т ы :

кандидат физико-математических наук, доцент А. А. Самородницкий (Сыктывкарский государственный университет),

кафедра математического анализа Коми государственного педагогического института

ISBN 5-89804-018-8

Оглавление

Предисловие

Коллективу Белгородского областного педагогического лицея-интерната с пожеланиями успехов в их благородном труде посвящается

Во втором издании исправлены замеченные опечатки, уточнены доказательства некоторых теорем, добавлены библиографические ссылки и некоторые комментарии.

Благодарю всех, кто пришлет свои замечания по адресу
lovyagin@fromru.com или lovyagin@math.spbu.ru

Из предисловия к первому изданию

Эта книга не учебник и не претендует на полноту изложения. Цель, которую поставил себе автор, скромнее: показать, что исчисление бесконечно малых, созданное Г. Лейбницем, можно использовать в преподавании в "первозданном" виде. Точнее, язык бесконечно малых, используемый как в математике, так и в ее приложениях в применении к исследованию процессов "в малом" – интегрирование, отыскание касательных и другие вопросы, которые возникают в приложениях, – законен не только в традиционном варианте, приписываемом О. Коши, К. Вейерштрассу и другим математикам, "поставившими анализ на твердую логическую основу", когда бесконечно малые понимаются как функции, стремящиеся к нулю, но и в варианте, когда под бесконечно малым, следуя Г. Лейбницу, понимается конкретное число, меньшее (по абсолютной величине) любого наперед заданного строго положительного вещественного числа – *актуальное* бесконечно малое число.

Следует отметить, что весь математический анализ – исчисление бесконечно малых – возник и развивался именно на таком понимании бесконечно малых. Все основные факты, изучаемые в начальном курсе анализа, были получены на основе понятия актуального бесконечно малого числа. Более того, многие результаты, связанные с вычислением объемов тел (Архимед, Кавальери, Кеплер), были получены на основе понимания тела как "суммы" фигур бесконечно малой толщины и, как следствие, объем тела – это сумма объемов этих "почти плоских" фигур, то есть сумма произведений площадей на бесконечно малую высоту. Учитывая то, что таких фигур бесконечно много – актуальное бесконечно большое число, – получались формулы для вычисления объемов. Аналогичное верно и для вычисления площадей плоских фигур, моментов и др.

В дальнейшем инфинитезимальные методы были заменены предельным переходом, но простота и наглядность их настолько важны, что вся терминология, изобретенная во многом Г. Лейбницем, и его обозначения сохранены до настоящего времени и вряд ли когда будут заменены на другие.

Хотя мы и предполагаем у читателя определенную математическую подготовку и культуру, мы используем минимально количество логических терминов. Те понятия, без которых не обойтись – *высказывание, истинность*, – нами используются, но мы говорим *свойство* или *утверждение* и *справедливость*. Значения этих слов не объясняются, но считаются очевидно ясными. Эти понятия нужны для центрального места в обосновании существования расширенной новыми элементами (бесконечно малыми и бесконечно большими) вещественной прямой и доказательства принципа Лейбница. Данное утверждение показывает, что аксиоматическое понимание актуальных бесконечно малых непротиворечиво (если существует множество вещественных чисел).

Автор приносит благодарность коллективу кафедры математического анализа Коми государственного педагогического института, в особенности профессору В. Н. Алексюку, который дал ряд ценных советов, улучшивших некоторые доказательства и формулировки. Ряд полезных указаний сделал профессор А. Г. Порошкин (Сыктывкарский госуниверситет). Благодаря ему удалось улучшить изложение вопросов интегрирования по конечно-аддитивным мерам. Доцент Сыктывкарского университета А. А. Самородницкий обратил внимание автора на некоторые тонкости в изложении. В подготовке рисунков помощь оказала В. Ю. Бриуц (Сыктывкарский лесной институт). Всем названным коллегам выражаю искреннюю благодарность.

Особую благодарность и признательность выражаю профессору В. П. Одинцу (Высшая Педагогическая школа в Зелена Гура), внимательнейшим образом прочитавшему всю рукопись.

Глава 1.

Предварительные замечания

§1.1. Терминология и обозначения

В данной работе мы стоим на позициях наивной теории множеств, однако все наши рассуждения и построения можно строго формализовать и в любой аксиоматической теории множеств с классической логикой.

Таким образом, под понятием *множество* мы подразумеваем совокупность предметов произвольной природы, считая, тем не менее, что элементами множеств являются также множества. (Фактически мы рассуждаем в универсуме фон Неймана, который строится рекурсивно, исходя из пустого множества путем образования на каждом трансфинитном шаге множества подмножеств.)

Если a является элементом множества A, то мы пишем $a \in A$, в противном случае – $a \notin A$. Если каждый элемент множества A является одновременно элементом множества B, то мы, как обычно, считаем, что A – *подмножество* множества B и пишем $A \subset B$, не исключая случая $A = B$. При этом $A = B$ тогда и только тогда, когда одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$.

Относительно теоретико-множественных операций мы пользуемся стандартными обозначениями: $\cup$, $\cap$, $\setminus$ для объединения, пересечения и разности соответственно.

Функция (синоним – *отображение*) – это правило, по которому некоторым элементам множества A однозначно сопоставляется (единственный) элемент множества B. Мы говорим также, что функция f *действует* из A в B и пишем $f : A \longrightarrow B$.

Областью определения функции f мы называем подмножество $\mathrm{dom} f \subset A$, состоящее из тех (и только тех) элементов, на которые действует функция, то есть $\mathrm{dom} f = \{a \in A \ : \ f(a) \ \text{определено}\}$. *Множеством значений* функции f назовем множество (подмножество B), определенное равенством $\mathrm{rng} f = \{f(a) \ : \ a \in \mathrm{dom} f\}$.

Таким образом, мы рассматриваем то, что часто называют *частичными функциями.*

Все понятия, которые мы используем в работе, кроме основных понятий алгебры и анализа, определяются в том месте, где они появляются.

Мы предполагаем, что читатель в достаточной степени владеет основными математическими понятиями в объеме, который обычно начитывается к третьему курсу математических факультетов университетов. Кроме того, мы предполагаем у читателя достаточную математическую культуру и желание проделать необходимую дополнительную работу, в частности по решению упражнений, которые являются неотъемлемой частью изложения.

Стандартные множества натуральных, целых, рациональных, вещественных и комплексных чисел мы обозначаем $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ соответственно. Ноль безоговорочно относится к натуральным числам. Имеются естественные вложения $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, сохраняющие алгебраические операции и, где возможен, порядок.

§1.2. Логические понятия

Все математические утверждения могут быть сформулированы на некотором специфическом языке – языке логики. Мы отложим строгое изложение логики до последней главы, а сейчас введем некоторые важные понятия, без которых изложение обоснования исчисления бесконечно малых было бы затруднительно.

Во-первых, всякое утверждение может быть записано с помощью некоторых специальных значков – равенства, неравенства, знаков теоретико-множественных операций, во-вторых, всякое *свойство* математического объекта может быть истинным или ложным.

В-третьих, различные утверждения можно комбинировать с помощью союзов "и", "или", отрицания утверждения. Кроме того, из одних утверждений следуют другие – из посылки (условия) теоремы следует ее заключение.

Вышесказанное приводит к необходимости записывать свойства и утверждения с помощью значков, как и средства образования новых утверждений из ранее построенных. Будем обозначать свойства и утверждения буквами греческого алфавита φ, ψ и другими. Если некоторый набор объектов $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ удовлетворяет свойству φ, то есть это свойство (или утверждение) истинно для этих объектов, то мы пишем $\models \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и говорим, что $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ истинно (справедливо). Говорят также, что имеет место $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Для двух утверждений (свойств) φ и ψ через $\varphi \& \psi$ обозначают свойство, истинность которого равносильна истинности обоих свойств φ и ψ одновременно. Это свойство называют *конъюнкцией* свойств и читают φ и ψ.

Аналогично для свойств φ и ψ вводится понятие *дизъюнкции* – свойства, истинность которого означает, что хотя бы одно из свойств φ или ψ справедливо. Дизъюнкция обозначается $\varphi \vee \psi$ и читается φ или ψ.

Если из справедливости φ следует справедливость ψ, то соответствующее свойство "если φ, то ψ" называют *импликацией* и обозначают $\varphi \supset \psi$.

Для образования утверждения "не φ" используют обозначение $\neg\varphi$. Это свойство называют *отрицанием* свойства φ.

Если свойства φ и ψ *эквивалентны* (равносильны), то используется запись $\varphi \equiv \psi$, читается – φ тогда и только тогда, когда ψ.[1]

Если свойство φ имеет место для всех (без исключения) объектов, то мы пишем $\forall\, x\varphi$ и говорим, что "для любого x имеет место φ". Если же утверждение φ справедливо лишь для некоторых объектов (хоть и для одного единственного), то мы говорим, что "существует x такой, что φ" и пишем $\exists\, x\varphi$. Знаки $\forall$, $\exists$ называются кванторами всеобщности и существования соответственно.

§1.3. Некоторые алгебраические понятия

В этом параграфе мы приведем понятия и факты алгебры. Более подробно это можно изучить в [3].

Кольцом называется множество K с двумя бинарными операциями сложения и умножения, обладающими свойствами:

$$\forall\, x \forall\, y\, (x + y = y + x)\,,$$

$$\forall\, x \forall\, y \forall\, z\, (x + (y + z) = (x + y) + z)\,,\ \forall\, x \forall\, y \forall\, z\, (x\, (yz) = (xy)\, z)\,,$$

$$\exists\, 0\, (\forall\, x\, (x + 0 = x))\,,$$

$$\forall\, x \forall\, y \forall\, z\, (x\, (y + z) = xy + xz)\,,$$

$$\forall\, x \exists\, y (x + y = 0).$$

Кольцо называется *коммутативным*, если $\forall\, x \forall\, y (xy = yx)$.

Если в кольце существует элемент 1 со свойством $\forall\, x (x1 = x)$, то кольцо называется *кольцом с единицей*.

Кольцо K называется *целостным* или областью целостности, если $\forall\, x \forall\, y (xy = 0 \supset x = 0 \vee y = 0)$, то есть произведение ненулевых элементов не равно нулю.

Кольцо K называется *телом*, если оно имеет единицу и $\forall\, x (x \neq$ $\neq 0 \supset \exists\, y (xy = 1))$. Коммутативное тело называется *полем*.

Подмножество I кольца K называется *идеалом* (левым), если

$$\forall\, i \forall\, j\, (i \in I \& j \in I \supset i + j \in I) \text{ и}$$

$$\forall\, i \forall\, x\, (i \in I \& x \in K \supset ix \in I)\,.$$

Отношением на множестве X называется произвольное множество R упорядоченных пар $< x, y >$, где $x, y \in X$. Если $< x, y > \in R$, то мы говорим, что x находится в отношении R с y и пишем xRy.

[1] истинность результатов логических операций над свойствами можно определить с помощью *таблиц истинности* — см., напр. [23].

Отношение ε называется отношением *эквивалентности*, если

$$\forall x(x\varepsilon x),$$

$$\forall x\forall y(x\varepsilon y \supset y\varepsilon x),$$

$$\forall x\forall y\forall z(x\varepsilon y\&y\varepsilon z \supset x\varepsilon z).$$

С каждым элементом $x \in X$ свяжем *класс эквивалентности* x по отношению ε – множество $[x] = \{y \in X \ : \ y\varepsilon x\}$.

Можно доказать, что любые два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают. Таким образом, множество классов эквивалентности X/ε образует разбиение множества X. Это множество называется *фактормножеством* множества X по отношению ε.

Если K – кольцо, а I – идеал в нем, то отношение

$$x\varepsilon y \text{ тогда и только тогда, когда } x - y \in I$$

является отношением эквивалентности на K (проверьте!). Соответствующее фактормножество обозначается K/I и называется *факторкольцом* кольца K по идеалу I.

В факторкольце естественным образом вводятся алгебраические операции:

$$[x][y] = [xy], \ [x] + [y] = [x + y].$$

Проверьте, что при этом факторкольцо будет кольцом, причем роль нуля играет класс $[0] = I$, а единицы (если она была в исходном кольце) – класс $[1]$.

Отношение $\leq$ на множестве X называется отношением *порядка*, а множество X – *упорядоченным множеством*, если

$$\forall x(x \leq x),$$

$$\forall x\forall y(x \leq y\&y \leq x \supset x = y),$$

$$\forall x\forall y\forall z(x \leq y\&y \leq z \supset x \leq z).$$

Если дополнительно $\forall x\forall y(x \leq y \vee y \leq x)$, то отношение порядка называется *линейным*, а множество X – *линейно упорядоченным*.

Мы пишем $x \leq y$ или $y \geq x$ и говорим x меньше y, а y больше x. Если $x \leq y$ и $x \neq y$, то мы говорим, что x строго меньше y или y строго больше x и пишем $x < y$ $(y > x)$.

Упорядоченным кольцом называется кольцо, в котором имеется отношение порядка, обладающее свойствами:

$$\forall x\forall y\forall z(x \leq y \supset x + z \leq y + z),$$

$$\forall x\forall y\forall z(x \leq y\&0 < z \supset xz \leq yz).$$

§1.4. Анализ

Мы предполагаем, что читатель в достаточной степени знаком с элементарным анализом – теорией вещественных чисел, теорией пределов, дифференциальным и интегральным исчислением функций одной переменной.

Напомним, что под полем вещественных чисел следует понимать условно полное упорядоченное поле, то есть упорядоченное поле, в котором каждое непустое ограниченное сверху подмножество имеет точную верхнюю грань – супремум – наименьшее число, превосходящее все элементы данного множества. Множество вещественных чисел может быть построено из множества рациональных чисел (дробей вида $\frac{m}{n}$, где n – натуральное число, неравное нулю, m – число целое, причем $|m|$ и n не имеют общих делителей) путем операции *пополнения*, которая осуществляется либо с помощью дедекиндовых сечений, либо путем факторизации множества фундаментальных последовательностей рациональных чисел по отношению эквивалентности

$$x \sim y \text{ тогда и только тогда, когда } \lim(x_n - y_n) = 0.$$

По определению $\lim x_n = a$, если

$$\forall\, \varepsilon(\varepsilon > 0 \supset \exists\, N(N \in \mathbb{N} \& (\forall\, n(n \in \mathbb{N} \& n > N \supset |x_n - a| < \varepsilon)))).$$

Предел функции понимается в смысле Х.Хайне, то есть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ означает, что для любой последовательности точек $\mathrm{dom} f$ из $\lim x_n = a$ следует, что $\lim f(x_n) = A$.

§1.5. Диалектика бесконечно малых

Кризис основ математической науки, проявившийся в пятом веке до нашей эры в открытии несоизмеримости и парадоксов Зенона, привел к *теории пропорций* с одной стороны, а с другой – к изобретению *принципа исчерпывания.*

Теория пропорций привела к теории вещественных чисел, а из принципа исчерпывания возник метод первых и последних отношений (флюксий), а впоследствии – *теория пределов.*

Однако существенно ранее теории пределов на основе принципа исчерпывания появилось *исчисление бесконечно малых*, которое впервые явно использовал И. Кеплер в своей "Стереометрии винных бочек" при вычислении объемов и площадей "неправильных" тел и фигур. Так, например, круг И. Кеплер рассматривал состоящим из бесконечного (бесконечно большого) числа треугольников, имеющих центр круга своей общей вершиной. При этом площадь круга вычисляется как сумма площадей всех этих треугольников (рис. 1.1).

В современном изложении эту идею можно описать следующим образом. Пусть R – радиус круга. Тогда площадь каждого из треугольников можно найти как произведение $\frac{1}{2}hl$, где l – сторона, а h – высота треугольника. Будем считать, что круг разбит на N одинаковых треугольников. Поэтому, так как число сторон получившегося многоугольника бесконечно, длина каждой стороны отличается от длины стягиваемой ею дуги на бесконечно малую величину и равна $\frac{1}{N}$-й части длины окружности (с точностью до бесконечно малых). Таким образом, площадь каждого треугольника выражается как $h\frac{2\pi R}{2N}$, Следовательно, и площадь круга как сумма площадей всех треугольников равна $Nh\frac{2\pi R}{2N} = \pi h R$. Учитывая теперь, что угол при вершине треугольника бесконечно мал, получаем, что h бесконечно близко (бесконечно мало отличается от) к R и, следовательно, площадь круга равна πR^2.

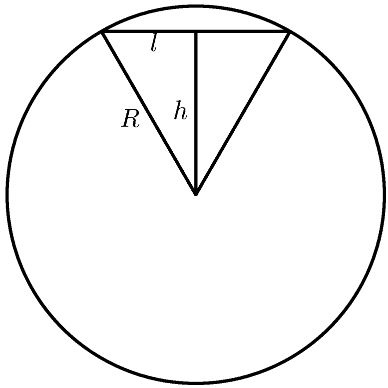

Рис. 1.1. Рисунок к вычислению площади круга

Аналогичные рассуждения приводит Л. Карно в своих "Размышлениях о метафизике бесконечно малых". Мы приведем здесь пример, восходящий к Архимеду, вычисления объема общей части двух пересекающихся под прямым углом круговых цилиндров.

Предположим, что цилиндры имеют одинаковые радиусы основания R. Нетрудно понять, что в плоскости, пересекающей образовавшееся тело параллельно осям обоих цилиндров, образуется квадрат со стороной, равной $2\sqrt{(R^2 - H^2)}$, где H – высота сечения от "нижней" точки. Ясно, что $0 \leq H \leq 2R$ (см. рис. 1.2).

Будем считать, что сегмент $[0, 2R]$ разбит на бесконечно много одинаковых непересекающихся сегментов бесконечно малой длины. Тогда каждый такой подсегмент высечет в нашем теле часть, являющуюся прямоугольным параллелепипедом бесконечно малой высоты $\frac{2R}{N}$, где N – число точек дробления (секущих плоскостей). Сторона же k-го сечения (от "нижней" точки) будет равна, как легко видеть, $2\sqrt{\left(R^2 - \left(\frac{k}{N}\right)^2\right)}$. Таким образом, площадь k-го сечения равна $4\left(R^2 - \left(\frac{k}{N}\right)\right)\frac{2R}{N}$.

Учитывая теперь, что высоты наших параллелепипедов бесконечно малы, получаем, что объем нашего тела бесконечно близок к сумме объемов всех бесконечно малых параллелепипедов, то есть равен (с точностью до бесконечно малых)

$$\sum_{k=o}^{N} 4\left(R^2 - \left(\frac{k}{N}\right)^2\right)\frac{2R}{N} = \frac{8R^3}{N}\sum_{k=0}^{N} 1 - \frac{8R^3}{N^3}\sum_{k=0}^{N} k^2 =$$

$$= 8R^3 - \frac{8R^3}{N^3}\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} =$$

$$= 8R^3\left(1 - \frac{1}{6N^3}N(N+1)(2N+1)\right) =$$

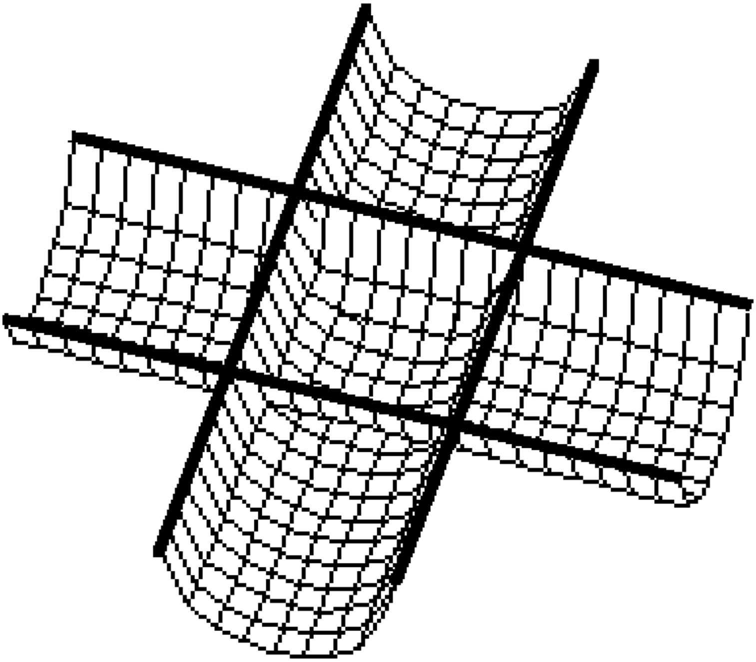

Рис. 1.2. Сечения пересекающихся цилиндров

$$= 8R^3\left(1 - \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{N}\right)\left(2 + \frac{1}{N}\right)\right).$$

Так как N бесконечно велико, число $\frac{1}{N}$ бесконечно мало и, следовательно, $1 + \frac{1}{N}$ бесконечно мало отличается от единицы, а число $2 + \frac{1}{N}$ – от двух. Следовательно, объем тела равен $8R^3(1 - \frac{2}{6}) = \frac{16}{3}R^3$.

Приведем еще один пример, восходящий к Г. Лейбницу, который по праву считается создателем исчисления бесконечно малых. Рассмотрим задачу проведения касательной к кривой линии. Для простоты будем считать, что кривая представляет собой график дифференцируемой функции f и точка $M_0 =< x_0, y_0 >$ $(y_0 = f(x_0))$ – точка, в которой проводится касательная.

Пусть точка $\overline{M}-<\overline{x},\overline{y}>$ $\overline{y} = f(\overline{x})$ – точка, бесконечно мало удаленная по дуге кривой от точки M_0. Проведем секущую через точки M_0 и $\overline{M}$. Ее уравнение будет $\frac{y-\overline{y}}{\overline{y}-y_0} = \frac{x-\overline{x}}{\overline{x}-x_0}$ или, учитывая, что $\overline{y} = f(\overline{x})$, $y_0 = f(x_0)$ и обозначая $\Delta x = \overline{x} - x_0$,

$$\frac{y - f(\overline{x})}{f(\overline{x}) - f(x_0)} = \frac{x - \overline{x}}{\Delta x}.$$

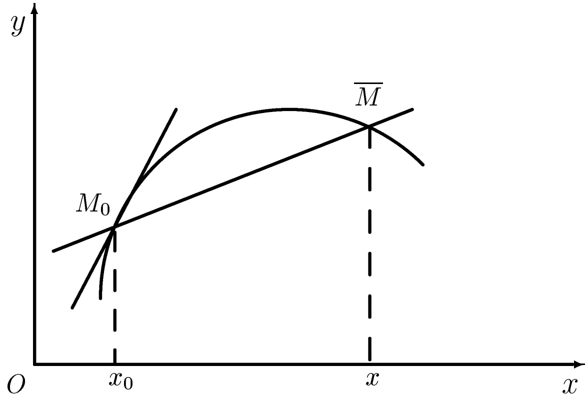

Рис. 1.3. Проведение касательной к графику функции

После преобразований получим

$$y - f(x_0 + \Delta x) = (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))\,\frac{x - \overline{x}}{\Delta x} = \Delta_{x_0} f(\Delta x)\frac{x - \overline{x}}{\Delta x},$$

где $\Delta_{x_0} f(\Delta x)$ – вызванное бесконечно малым приращением аргумента Δx приращение функции.

Так как функция f дифференцируема, то ее приращение бесконечно мало отличается от дифференциала $df(x_0)$ в точке x_0, а значение $f(x_0+\Delta x)$ – от значения функции $f(x_0)$.

Таким образом, уравнение секущей примет вид

$$y - f(x_0) = df(x_0)(\Delta x)\frac{x - \overline{x}}{\Delta x}.$$

Так как действие дифференциала есть умножение аргумента на производную функции в данной точке x_0, получаем

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x\frac{x - (x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$$

или, учитывая, что Δx бесконечно мало, а в этом случае секущая является касательной, имеем уравнение касательной:

$$y - f(x_o) = f'(x_0)(x - x_0), \ \text{ то есть } \ y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

С канонизированной ныне точки зрения теории пределов вышеприведенные рассуждения отличаются по меньшей мере нестрогостью и используются разве лишь для наглядной иллюстрации "строгих" методов. От метода исчерпывания эти расуждения тоже отличаются, но тем, что в отличие от него не требуют "угадывания" результата. Рассуждая строго, следовало бы "нестрогими" методами, подобными приведенным, найти результат, а затем методом исчерпывания доказать (абсолютно строго) его справедливость. Так, по-видимому, и получали многие факты подобного рода еще в древности.

Следует также отметить, что терминология "бесконечно мал" и тому подобное встречается ныне почти во всех учебниках прикладных дисциплин при выводе многих формул и даже при введении новых понятий. Так, например, в учебнике В. В. Нащокина "Техническая термодинамика и теплопередача" на странице 51 читаем: "Элементарная удельная работа δl, совершаемая системой в равновесном процессе изменения состояния тела при *бесконечно малом* (выделено В. Нащокиным) изменении ее объема, определяется по формуле $\delta l = pdV$". Там же на странице 63: " Отношение элементарного (бесконечно малого – Ю. Ловягин) количества теплоты δq, полученного телом при *бесконечно малом* (выделено автором) изменении его состояния, к изменению температуры dt (опять бесконечно малому! – Ю.Л.) называют (называют – это определение! – Ю.Л.) удельной теплоемкостью тела в данном процессе..."[2]

У математиков подобные фразы вызывают в лучшем случае улыбку. Однако каждый из них подпишется под этим определением, если мы удельной теплоемкостью назовем производную количества теплоты! С другой стороны, каждый из нас (математиков) пользуется подобной терминологией в своих разговорах и рассуждениях, где не требуется особой строгости. Это допускается при обсуждении проблем в "высшем обществе" или при разговоре с "технарями", а также в преподавании. Важно лишь то, что именно вкладывать в понятие "бесконечно малое количество". Современные апологеты теории пределов считают их функциями, стремящимися к нулю, но возможен и наглядный, интуитивно ясный и простой для объяснения смысл: бесконечно малое количество – это то, которое строго меньше любого наперед заданного количества, то есть бесконечно малое понимается как *актуальное*, реально существующее "очень маленькое" количество.

Создателем и основным проповедником анализа бесконечно малых, из которого впоследствии развился нынешний математический анализ, был Г. В. Лейбниц. В своем фундаментальном труде "Новый метод для максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не являются препятствием дробные и иррациональные количества, и особый вид исчисления для этого" [16] он заложил основы современного дифференциального исчисления, а также ввел обозначения, которыми мы пользуемся поныне.

Однако ни Г. Лейбниц, ни его ученики и последователи не задавались вопросом обоснования своих методов, считая, видимо, что в этом нет особой необходимости, ибо это есть не что иное, как упрощенный метод исчерпывания. Этой точки зрения придерживается Л. Карно в цитированной работе.[3] Сам Г. Лейбниц принимал бесконечно

[2]Рассмотрение именно этой книги не является чем-то особенным или самоцелью автора. Просто по ряду причин книга В .Нащокина оказалась "под рукой". Читатель без труда найдет подобные пассажи в любом учебнике физики или технических дисциплин. То же самое имеет место и в научной технической литературе.

[3]"... метод неделимых(актуальных бесконечно малых – Ю.Л.) и все возможные аналогичные методы суть не что иное, как упрощающие формулы, весьма полезные

малые как реально существующие количества и не видел ничего, препятствующего их наличию. Их существование не требует доказательства.

Однако такая позиция, дающая лишь шаткую основу для применения инфинитезимальных методов, привела к развитию кризиса основ математики, который был отчасти преодолен изобретением теории пределов в середине 19-го века. Создание теории пределов связывают в первую очередь с именем О. Коши, а также К. Вейерштрасса, которые развили идеи первых и последних отношений, рассматриваемых И. Ньютоном.

Хотя теория пределов ставит дифференциальное исчисление на достаточно прочную основу, она многократно усложняет терминологию, практически уничтожает наглядность, да и само понятие предела по своей сути и виду является чем-то чужеродным для стройной красивой теории Г. Лейбница. Кроме того, для приложений анализа само понятие предела, по-видимому, совсем не нужно, ибо предел есть не что иное, как значение функции в точках близких к данной (с точностью до бесконечно малых, естественно). Тем более, что терминология, как мы видели и можем убедиться неоднократно, и в приложениях, и в физике, и в математике, соответствует интуитивному пониманию актуально бесконечно малого количества. Ни один здравомыслящий человек не будет понимать "бесконечно малый поворот" как "поворот, стремящийся к нулю", а поймет его как "очень-очень-очень-...-очень маленький поворот". Это лучше, чем "непрерывно меняющийся и исчезающий (в пределе) поворот", поскольку это все-таки число.

Кроме всего прочего, методы актуальных бесконечно малых отличаются не только наглядностью и самоочевидностью, но и простотой, как в применении, так и в объяснении, изучении. Фактически эти методы позволяют находить результат простыми алгебраическими вычислениями. Если бы Г. Лейбниц или кто-либо из его последователей (а может и предшественников) задался целью найти устраивавшее всех логическое (или иное) обоснование этим методам, то традиционная техника теории пределов ($\varepsilon-\delta$-техника) быть может и не развилась бы в анализе. Ведь большинство теорем дифференциального исчисления и почти все приложения его были получены ДО появления теории пределов. Следует также отметить тяжеловесность $\varepsilon-\delta$-техники и ее "далекость" от практического вычисления пределов. На самом деле теорию пределов легко построить на понятии актуального бесконечно малого числа, что приведет к наглядности в изложении и лучшему пониманию. Ведь предел, как мы уже упомянули, – это, по сути дела, значение функции в близких точках, то есть "при x, стремящемся к x_0, $f(x)$ стремится к A". Интуитивно, "если x близко к x_0, то $f(x)$ близко к A". Что и есть определение. На языке $\varepsilon-\delta$ все меняется местами: "$f(x)$ близко к A, если x близко к x_0". Или, по опоределению,

$$\forall\,\varepsilon>0\exists\,\delta>0\forall\,x\,(x\in\mathrm{dom}f\supset(|x-x_0|<\delta\supset|f(x)-A|<\varepsilon))\,.$$

(Мы не вдаемся в различные модификации определения предела – в проколотой окрестности, в точке прикосновения и других.) Поди разберись (!), где здесь изначальное

для избежания длиннот метода исчерпывания и никоим образом не вредящие точности его результатов"(с. 218).

интуитивное понимание и идея.

Из сказанного выше ясно, что актуальные бесконечно малые очень удобны в преподавании основ анализа. Это мнение основано не только на литературных источниках, но и на личном опыте автора, который в течение ряда лет излагал в курсе математики для студентов гуманитарного направления основы математического анализа на языке актуальных бесконечно малых, и в течение ряда лет читал курс анализа в техническом ВУЗе. С другой стороны, терминология актуальных бесконечно малых использовалась автором и при преподавании студентам-математикам при объяснении понятий предела, непрерывности, производной, интегрирования и других. При этом такие понятия, как бесконечно малый, бесконечно близкий, бесконечно большой, не объяснялись, а считались само собой разумеющимися, что не вызывало трудностей у студентов. То есть автор, да и, по-видимому, многие другие, если не сознательно, то по наитию, объясняют понятия, связанные с пределом, с помощью языка бесконечно малых, а не наоборот, бесконечно малые вводят как "стремящиеся к нулю". Это лишний раз подчеркивает естественность понятия бесконечно малого числа, а необходимость излагать теорию пределов в традиционном ныне плане – это дань традиции и дань строгости, которая не всегда оправдана, особенно при преподавании студентам, для которых важно не строгое доказательство, а понимание, основанное на интуиции и умение применять методы на практике.

Следует, однако, отметить, что автор и при изложении на языке актуальных бесконечно малых вводит понятие предела (отдавая дань традиции), но как средства для исследования "поведения функции в точке".

На основе читавшегося автором курса совместно с его ученицей О. П. Матвеевой написано учебное пособие по математике для студентов гуманитарных специальностей. Более полное изложение основ анализа на языке актуальных бесконечно малых имеется в учебнике Г. Кейслера "Элементарный анализ". К этому учебнику Г. Кейслером написано "Руководство для инструкторов" (преподавателей), в котором излагается обоснование инфинитезимальных методов.

Указанное выше обоснование может быть проведено несколькими (двумя основными) способами. Но, прежде чем приводить соответствующие факты, следует четко поставить задачу, что же следует понимать под бесконечно малым числом как актуально существующим объектом.

Мы опишем ту характеристику, которую, не приводя однако строгих формулировок, использовал Г. Лейбниц в своем понимании актуальных бесконечно малых.

Этот взгляд восходит к атомическому пониманию строения материи, сформулированному Демокритом. Однако, как показывают парадоксы Зенона, с помощью дискретных методов, дискретного деления нельзя исчерпать непрерывный объект. Дело заключается в противоречии между непрерывностью и дискретностью. В этом по сути и есть кризис математики 5-го века до нашей эры, который, как видно из такого его понимания, не преодолевается ни теорией пределов, ни даже принципом исчерпывания в том виде, в котором он привел к созданию последней. Дело в том, что идеи и теории пределов, и принципа исчерпывания предполагают "исчерпать "дискретными порциями "непрерывный" объект за "бесконечно много шагов".

На этом пути снятие противоречия между непрерывностью и дискретностью невозможно принципиально ввиду естественного философского антагонизма между этими понятиями как двумя противоположными категориями, находящимися в диалектическом противоречии. Однако диалектическое противоречие наряду с борьбой и антагонизмом предполагает и единство. Это один из законов Г. Гегеля, согласно которому две любые противоположности, находясь в естественной (непрерывной) борьбе, обладают тем не менее и свойством единства, отражая тем самым две различные характеристики одного и того же объекта. Это два неотъемлемых атрибута данного объекта.

Подобная ситуация имеет место в физике, когда наряду с волновыми (непрерывными) свойствами света (или другого излучения) рассматривают и корпускулярную его природу. Наоборот, поток частиц (например, электронов) при определенных условиях проявляет волновые свойства. Таким образом, волна и поток частиц – это две стороны одного и того же явления.

Вышесказанное позволяет говорить о непрерывности и дискретности как о двух равноправных сторонах одного и того же объекта. В одних условиях превалирует непрерывная сторона, в других – дискретная. Поэтому уместно вещественную прямую, традиционно рассматриваемую как непрерывное образование, считать обладающей и дискретными свойствами. Суть вещественной прямой в единстве этих двух противоположных ее свойств, которое адекватно определяет все свойства прямой. Тем самым геометрическую прямую представляется полезным рассматривать состоящей из дискретно расположенных точек наподобие квантового потока, но при этом в промежутки между "соседними" точками, где образуются "пустые места", можно поместить новые идеальные элементы. Так как расстояние между "соседями" "бесконечно мало", то вблизи каждой точки возникают бесконечно близкие к ней точки. Так организованная прямая линия уже содержит ненулевые бесконечно малые числа – близкие к нулю, но не равные ему – и обладает двумя противоположными свойствами. Как непрерывный объект, рассматриваемый методами "обычной" геометрии, не прибегающей к "сильному увеличению", – это геометрическая прямая. Если же мы "сильно увеличим" разрешающую способность наших методов, то получим дискретный набор "следующих друг за другом" точек, окруженных "ореолом" (каждая своим) бесконечно близких к ним идеальных элементов. Видимая издалека гирлянда одноцветных лампочек дает некоторое наглядное представление о так устроенной прямой линии: издалека мы видим сливающиеся в единую непрерывную линию светящиеся ореолы, но, приблизившись достаточно близко, мы уже различаем отдельные лампочки и видим, что каждая из них создает свой ореол.

§1.6. Принцип расширения

Мы привели некоторые философские и наглядные соображения в пользу выдвинутого Г. Лейбницем принципа, который мы формулируем ниже в современных терминах.

Существует упорядоченное поле $\Re$, обладающее свойствами:

1. $\mathbb{R}$ *– упорядоченное подполе поля* $\Re$,
2. *существует элемент* $\varepsilon \in \Re$ *такой, что для любого ненулевого натурального числа* n $0 < \varepsilon < \frac{1}{n}$,
3. *всякая функция* f *с* $\mathrm{dom} f \subset \mathbb{R}^n$ *допускает продолжение до функции* $\widetilde{f}$ *с* $\mathrm{dom}\widetilde{f} \subset \Re^n$ $(n \in \mathbb{N})$,
4. *Пусть имеется система неравенств*

$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Рассмотрим систему неравенств

$$\widetilde{f_k}(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \widetilde{g_k}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Если $R \subset \mathbb{R}^n$ *– решение первой системы и* $\widetilde{R} \subset \Re^n$ *– решение второй системы, то* $R = \widetilde{R} \cap \mathbb{R}^n$.

Иными словами, если первая система совместна, то совместна и вторая, и наоборот, если совместна "продолженная" система, то исходная система имеет решение, которое находится по формуле
$R = \widetilde{R} \cap \mathbb{R}^n$.

Последнее свойство, именуемое принципом Лейбница, гарантирует, что продолжение обычной вещественной функции обладает всеми свойствами исходной. Так, например, в расширенной прямой существуют тригонометрические функции, при этом имеют место все формулы тригонометрии, например $\widetilde{\sin}2x = 2\widetilde{\sin}x\widetilde{\cos}x$.

Принципиальным является условие 2, которое гарантирует существование отличных от нуля *бесконечно малых чисел*, и, следовательно, расширение нетривиально.

Свойство 3 гарантирует, что всякое множество $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет расширение $\widetilde{A} \subset \Re^n$, получающееся посредством продолжения характеристической функции множества A, точнее $\widetilde{A} = (\widetilde{\chi_A})^{-1}(1)$. Очевидно, что всегда $A \subset \widetilde{A}$. Равенство же имеет место только для конечного множества.

Важную роль играет множество ${}^{\infty}\mathbb{N} = \widetilde{\mathbb{N}}$, а также разность $\aleph = {}^{\infty}\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, состоящая из бесконечных (бесконечно больших) натуральных чисел.

Вообще существование *бесконечно больших чисел* следует из 2 и 1. Действительно, если $0 < \varepsilon < \frac{1}{n}$ для всех ненулевых натуральных чисел n, то число $\frac{1}{\varepsilon}$, существование которого гарантировано условием 1, будет строго больше любого наперед заданного натурального числа, то есть бесконечно большим[4]. Если постулировать существование расширения вещественной прямой в смысле Г. Лейбница, то, положив,

$$F = \{x \in \Re \,:\, \exists r\,(r \in \mathbb{R} \,\&\, |x| \leq r)\},$$

получим множество *конечных* чисел, а множество

$$I = \left\{x \in \Re \,:\, \forall n \left(n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \;\supset\; |x| < \frac{1}{n}\right)\right\}$$

[4]Таким образом, принцип Архимеда, гарантирующий, что отрезок любой длины можно измерить за конечное число шагов, неверен в расширенной числовой прямой.

является множеством бесконечно малых чисел.

Два числа называют *бесконечно близкими*, если их разность бесконечно мала. Таким образом, терминология, применяемая при изложении анализа в духе Г. Лейбница, приобретает законные основания (если, естественно, система аксиом, постулирующая существование неархимедова расширения множества вещественных чисел, непротиворечива).

$\diamond$ $\diamond$ $\diamond$ $\diamond$

Как уже упомянуто выше, имеется два основных способа доказательства непротиворечивости теории актуальных бесконечно малых. Первый состоит в построении в рамках подходящей теории первого порядка ультрастепени *стандартной* модели теории упорядоченных полей, причем за стандартную модель берется полное упорядоченное поле, которое, как известно, единственно (с точностью до изоморфизма, естественно). В связи с этим, построенная ультрастепень, которая является упорядоченным полем, но уже неархимедовым, называется *нестандартной* моделью или множеством *гипервещественных* чисел, а сама методика применения инфинитезимальных методов – *нестандартным анализом*. Нестандартность упомянутой модели определяется и тем, что данная модель содержит нестандартную (не изоморфную обычному кольцу целых чисел) модель арифметики. Идеи применения методов теории моделей для обоснования анализа принадлежат А. Робинсону [29].

В упомянутом выше руководстве Г. Кейслера этот метод применяется к полю вещественных чисел путем построения ультрастепени по произвольному ультрафильтру, мажорирующему фильтр Фреше над множеством натуральных чисел. При этом достаточно наглядно проявляются продолжения функций, расширения множеств, а также демонстрируются бесконечно малые и бесконечно большие числа.

Принцип переноса (вытекающий из основной теоремы об ультрапроизведениях) гарантирует справедливость принципа Лейбница (на самом деле, принцип переноса сильнее).

Второй подход к доказательству существования нестандартного расширения связан с применением теоремы компактности А. И. Мальцева [21]. Так как теория упорядоченных полей имеет модель (множество вещественных чисел с естественной интерпретацией констант, функциональных и предикатных символов), то добавляя к аксиомам упорядоченного поля аксиому $n1 \leq c$ (для каждого натурального n), где c – новый константный символ, доказывается, что полученная система локально непротиворечива, то есть каждая ее конечная часть имеет модель, и, следовательно, вся расширенная теория имеет модель (нестандартную), которая и будет требуемым расширением. Бесконечно большим числом, очевидно, будет имя новой константы c в этой модели, а бесконечно малые ненулевые числа – это обратные к бесконечно большим. Принцип Лейбница и в этом случае является следствием общих теорем. Несмотря на простоту предлагаемого доказательства, здесь имеется некоторая потеря наглядности как в демонстрации новых элементов (бесконечно малых и бесконечно больших), так и продолжения функций.

Упомянем еще об одном, в некотором смысле идеальном, способе доказательства существования актуальных бесконечно малых чисел. Он восходит к идее изначального включения в каждое множество "нестандартных" (идеальных) элементов. [5]ем самым рассматривается некоторое (консервативное) расширение обычной теории множеств Цермело – Френкеля путем добавления новых предикатных символов и новых аксиом. При этом двойственная природа континуума изначально оказывается заложенной в множество вещественных чисел. Этот подход впервые предложил Е. Нельсон. Подробно эти вопросы освещены в книге А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе "Нестандартные методы в анализе" [15].

Все описанные методы обоснования так или иначе связаны с достаточно глубокими вопросами оснований математики: логикой и теорией моделей, теорией множеств. Поэтому, несмотря на их строгость и аккуратность изложения в упомянутых источниках, изучение данного вопроса по этим работам, исключая, быть может, руководство Г. Кейслера, но оно практически недоступно, является далеко не простым делом. Хотя в книге А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе имеется наивное (с точки зрения наивной теории множеств) обоснование инфинитезимальных методов, все-таки, с точки зрения автора, было бы полезным иметь какое-либо руководство по обоснованию исчисления бесконечно малых, ориентированное на практически неподготовленного читателя, чтобы он мог убедиться в актуальном существовании бесконечно малых. Эту цель и ставит, и отчасти решает предлагаемая работа. Насколько это удалось, судить не нам, а читателю, но, с нашей точки зрения, изложение, предлагаемое Вашему вниманию, отличается тем, что нет необходимости в глубоких знаниях курсов логики и оснований математики. Достаточно знания элементарной (наивной) теории множеств, курса анализа в объеме 2-х лет университетского курса или курса педагогического института. Желательно знакомство с теорией меры, хотя бы самое элементарное. Естественно, следует хорошо знать теорию вещественных чисел.

Мы предполагаем, что наша работа выполнит ту же роль, хотя бы отчасти, что и руководство Г. Кейслера. Естественно, мы не претендуем заменить его, а имеем цель лишь частично заполнить имеющийся пробел в литературе. Нашей целью является также показать, каким образом основы анализа можно преподавать на языке актуальных бесконечно малых, поэтому мы преследуем и некоторую методическую цель.

Отметим, что предлагаемая ниже методология бесконечно малых была предложена в качестве дипломных работ студентам Сыктывкарского университета О. П. Ивановой (ныне Матвеева) и Т. А. Шишеловой в 1994 году. Однако до конца решить поставленную задачу тогда не удалось, но результатом явилось упомянутое учебное пособие Ю. Н. Ловягина и О. П. Матвеевой, которое, конечно, далеко небезупречно, но дает неплохой пример методической разработки, которая применяется в Сыктывкарском университете на филологическом и финно-угорском факультетах.

[5]Т

Глава 2.

Нестандартное расширение

§2.1. Меры и интегрирование

В этом параграфе мы напомним некоторые аспекты теории меры и интегрирования. Читатель, знакомый с этими вопросами, может пропустить этот параграф, однако следует учесть, что при интегрировании по конечно аддитивным функциям есть некоторые особенности.

Определение 2.1.1.

Конечно аддитивной мерой (в дальнейшем просто – мерой) будем называть функцию $\mu : \mathbb{A} \longrightarrow [0, +\infty]$, заданную на некоторой алгебре $\mathbb{A}$ подмножеств[1] непустого множества I, обладающую свойствами:

1. $\mu\emptyset = 0$,

2. если $A \cap B = \emptyset$ и $A, B \in \mathbb{A}$, то $\mu A \cup B = \mu A + \mu B$.

Следующая теорема позволяет считать, что $\mathbb{A} = 2^I$.

Теорема 2.1.1.

(см. [2, с. 344]). *Всякая мера допускает продолжение на всю алгебру* $\mathbf{2}^I$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Пусть $A \notin \mathbb{A}$. Рассмотрим подалгебру в $\mathbf{2}^I$, порожденную множеством $\mathbb{A} \cup \{A\}$. Нетрудно убедиться в том, что такую подалгебру образуют множества вида $(A \cap B) \cup (A' \cap C)$, где $B, C \in \mathbb{A}$, а знак $'$ означает теоретико-множественное дополнение.

---

[1]Напомним, что алгебра подмножеств – это множество подмножеств, замкнутое относительно теоретико-множественных операций.

Определим теперь отображения, заданные правилами:

$$\mu_1 \ : \ \mu_1(A \cap B) = \inf\{\mu S \ : \ S \supset A \cap B\},$$
$$\mu_2 \ : \ \mu_2(A' \cap C) = \sup\{\mu T \ : \ T \subset A' \cap C\}.$$
$$\widetilde{\mu} \ : \ \widetilde{\mu}\left((A \cap B) \cup \left(A' \cap C\right)\right) = \mu_1(A \cap B) + \mu_2(A' \cap C).$$

Если $S \supset A \cap B$, то $S' \cap B \subset (A' \cup B') \cap B = A' \cap B$. Таким образом,

$$\mu S + \sup \mu T \geq \mu S + \mu(S' \cap B) \geq \mu\left(S \cup \left(S' \cap B\right)\right) = \mu(S \cup B) \geq \mu B.$$

Следовательно, $\mu_1(A \cap B) + \mu_2(A' \cap B) \geq \mu B$ для каждого $B \in \mathbb{A}$. Точно так же доказывается и противоположное неравенство, таким образом, $\widetilde{\mu} B = \mu B$, то есть функция $\widetilde{\mu}$ продолжает μ.

Докажем аддитивность продолжения. Пусть $(A \cap B) \cap (A \cap C) = \emptyset$. Для аддитивности достаточно проверить, что $\widetilde{\mu}((A \cap B) \cup (A \cap C)) = \widetilde{\mu}(A \cap B) + \widetilde{\mu}(A \cap C)$. Для доказательства этого возьмем $\varepsilon > 0$. Тогда существуют измеримые множества $T \supset A \cap B$, $\ U \supset A \cap C$ такие, что

$$\mu T < \widetilde{\mu}(A \cap B) + \varepsilon, \ \ \mu U < \widetilde{\mu}(A \cap C) + \varepsilon.$$

Таким образом, $\mu T \cup U \leq \mu T + \mu U < 2\varepsilon$.

Так как $T \cup U \supset (A \cap B) \cup (A \cap C)$, то

$$\widetilde{\mu}((A \cap B) \cup (A \cap C)) \leq \widetilde{\mu}(A \cap B) + \widetilde{\mu}(A \cap C).$$

Обратно, для каждого измеримого множества

$$V \supset (A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$$

имеем $\mu V \geq \mu(V \cap B \cap C') + \mu(V \cap C)$.

В силу очевидной монотонности μ, имеем $\mu(V \cap B \cap C') \geq \widetilde{\mu}(A \cap B)$, так как $V \cap B \cap C' \supset A \cap (B \cup C) \cap (B \cup C') = A \cap B$.

Аналогично получаем, что $\mu(V \cap C) \geq \widetilde{\mu}(A \cap C)$.

Таким образом, $\mu V \geq \widetilde{\mu}(A \cap B) + \widetilde{\mu}(A \cap C)$, то есть $\inf \mu T = \widetilde{\mu}\left((A \cap B) \cup (A \cap C)\right) \geq \widetilde{\mu}(A \cap B) + \widetilde{\mu}(A \cap C)$, что и дает аддитивность. Таким образом, меру μ можно продолжить на некоторую подалгебру $\mathbb{A}'$, содержащую $\mathbb{A}$ с сохранением аддитивности.

Пусть теперь $< \mathbb{A}, \mu > = < \mathbb{A}_0, \mu_0 > \to < \mathbb{A}_1, \mu_1 > \to \ \ldots$ – цепь продолжений мер с сохранением аддитивности. Нетрудно понять, что эта цепь ограничена. Поэтому в упорядоченном множестве всех продолжений меры μ с подалгебры $\mathbb{A}$ согласно лемме Куратовского – Цорна существует максимальный элемент. Ясно, что это будет аддитивное продолжение на алгебру всех подмножеств множества I. $\diamond$ *Замечания.*

1. Доказанная теорема восходит к А. Тарскому [31].
2. Приведенная теорема равносильна теореме о существовании ультрафильтра, мажорирующего любой наперед заданный фильтр.
3. В дальнейшем (см. 2.1.2) мы используем эту теорему для продолжения некоторой специальной меры, эквивалентной по сути фильтру Фреше.

4. Стремясь к определенному уровню наглядности, а с нашей точки зрения мера – понятие более наглядное, чем понятие ультрафильтра, мы не излагаем теорию ультрапроизведений явно, а используем эту конструкцию завуалировано, но, как показывает приведенная теорема, мы находимся в ничуть не лучшей ситуации относительно *конструктивности* и *единственности* "строимого" объекта, ибо теорема А. Тарского (как и теорема компактности), в конечном счете, эквивалентна аксиоме выбора, что дает принципиальную неконструктивность нестандартного расширения.

5. Указанная выше неконструктивность продолжения обусловливает и то, что могут существовать различные (даже неизоморфные!) расширения. Иными словами, существуют различные, даже различной мощности системы, удовлетворяющие принципу Лейбница. Но все они с точки зрения логики первого порядка неразличимы (элементарно эквивалентны), что обеспечивает равноценность выводов, сделанных в различных моделях, ибо относительно принципа Лейбница и теории вещественных чисел в них истинны одни и те же высказывания.

Читатель, осиливший предыдущее замечание, возможно будет разочарован и забросит сие творение. Тому же, кто еще заинтересован, мы рекомендуем выбросить из головы все страхи и остановиться на предлагаемой ниже "конструкции" (кавычки именно иронические).

Отметим некоторые важные для дальнейшего свойства меры. Доказательство предлагается читателю в качестве упражнения.

1. Для любых множеств A и B имеет место равенство $\mu(A\cup B) = \mu A + \mu B - \mu(A\cap B)$.

2. Если $\mathrm{rng}\mu = \{0,1\}$, то для любых множеств A и B имеет место равенство $\mu(A\cap B) = \mu A \mu B$.

3. Для любых множеств A и B если $A \subset B$, то $\mu A \leq \mu B$.

В дальнейшем, чтобы не загромождать изложение, мы будем излагать теорию интегрирования для мер специального вида (не могу не поделиться тем, что это эквивалент нетривиального ультрафильтра).

Определение 2.1.2.

Меру μ на множестве всех подмножеств будем называть **нетривиальной**, если для любого $i \in I$ $\mu\{i\} = 0$.

Отсюда сразу следует, что если мера нетривиальна, то любое конечное множество имеет нулевую меру.

ПРИМЕР. Этот пример весьма важен для дальнейшего, поэтому рекомендуем досконально разобраться во всех его тонкостях.

Пусть F – множество подмножеств I, имеющих конечные дополнения (коконечные множества). Рассмотрим множество $\mathbb{A} = F \cup F'$ (F' – дополнение в множестве всех подмножеств). Предлагаем читателю убедиться, что класс множеств $\mathbb{A}$ является алгеброй и функция μ, определенная правилом $\mu E = 1$, если $E \in F$ и $\mu E = 0$, если $E \in F'$, задает на $\mathbb{A}$ меру. При этом каждое одноточечное множество имеет меру 0.

Эта мера допускает продолжение до нетривиальной меры, которую мы будем называть *мерой Фреше.* В случае, когда $I = \mathbb{N}$, эта мера под именем нетривиального ультрафильтра рассматривается в руководстве Г. Кейслера [10]. Нас тоже в основном будет интересовать случай $I = \mathbb{N}$.

Определение 2.1.3.

Пусть μ – нетривиальная мера на множестве всех подмножеств множества I. Функцию p, действующую из I в множество вещественных чисел, будем называть **простой**, если в I существуют дизъюнктные (попарно непересекающиеся) подмножества $E_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$ и вещественные числа $c_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$ такие, что $\forall i \in E_k \;\; p(i) = c_k$ и объединение всех множеств E_k дает множество I, то есть множество значений простой функции конечно. Иными словами, функция p является простой тогда и только тогда, когда она представима в виде линейной комбинации индикаторов (характеристических функций) попарно непересекающихся множеств – $p = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$.[2]

Определим теперь, как обычно, поточечно арифметические операции и отношение порядка на множестве $\mathbb{R}^I$ всех функций с $\mathrm{dom} f \subset I$, $\mathrm{rng} f \subset \mathbb{R}$. Ясно, что арифметические операции не выводят из класса простых функций. Предлагаем читателю проверить, что всякая положительная функция минорируется некоторой простой, то есть если для всех $i \in I f(i) \geq 0$, то существует простая функция p такая, что для всех $i \in I \;\; 0 \leq p(i) \leq f(i)$, причем если f не тождественный ноль, то такова же и p. Предлагаем также доказать, что всякая функция есть разность двух положительных функций, то есть $f = f_+ - f_-$, где $f_\pm$ – положительная и отрицательная части функции f, являющиеся наименьшими из функций $u \geq \pm f$ соответственно.[3]

Лемма 2.1.1.

Любые две простые функции могут быть представлены в виде линейной комбинации характеристических функций одних и тех же множеств.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Пусть $p = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}, \quad q = \sum\limits_{l=1}^{m} d_l \chi_{F_l}$. Обозначим $T_{kl} = E_k \cap F_l$. Имеем $T_{kl} \cap T_{k'l'} = E_k \cap F_l \cap E_{k'} \cap F_{l'} = E_k \cap E_{k'} \cap F_l \cap F_{l'} = \emptyset$. С другой стороны, $\bigcup\limits_{k=1, l=1}^{n,m} T_{kl} = \bigcup\limits_{k=1, l=1}^{n,m} (E_k \cap F_l) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k \cap \bigcup\limits_{l=1}^{m} F_l = I$.

Имеем для $i \in T_{kl}$, так как $T_{kl} \subset E_k$, $\;p(i) = c_k$. Аналогично для $i \in T_{kl}$, так как $T_{kl} \subset F_l$, $\;q(i) = d_l$. Следовательно, $p = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{l=1}^{m} c_k \chi_{T_{kl}}$. Аналогично $q = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{l=1}^{m} d_l \chi_{T_{kl}}$.$\diamond$

Определение 2.1.4.

Введем понятие **интеграла** от функции $f \in \mathbb{R}^I$.

---

[2] Для $E \subset I$ характеристическая функция определяется правилом $\chi : \;\; \chi_E(i) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in E \\ 0, & \text{если } i \notin E \end{cases}$.

[3] Конструктивно $f_\pm(i) = \max(\pm f(i), 0)$.

1. Если p – простая функция, то положим $\int p d\mu = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \mu E_k$.

2. Для положительной функции f определим

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int p d\mu \ : \ p \text{ простая и } \forall i \in I \ \ 0 \le p(i) \le f(i) \right\}.$$

3. Для произвольной функции f положим $\int f d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu$.

4. Для множества $E \subset I$ положим $\int\limits_E f d\mu = \int f \chi_E d\mu$.

В дальнейшем, не умаляя общности рассмотрений, считаем, что $\mu I = 1$.

Теорема 2.1.2.

Для любых функций $f, g \in \mathbb{R}^I$ и любого вещественного числа λ справедливо

1. $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.

2. Если $f(i) = r \in \mathbb{R}$ для всех $i \in I$, то $\int f d\mu = r$.

3. $\int \lambda f d\mu = \lambda \int f d\mu$.

4. Если для всех $i \in I$ $f(i) \le g(i)$, то $\int f d\mu \le \int g d\mu$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О проведем в несколько этапов.

1. Пусть сначала p, q – положительные простые функции. Будем считать, что они являются линейными комбинациями характеристических функций одних и тех же множеств, то есть

$$p = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}, q = \sum_{k=1}^{n} d_k \chi_{E_k}.$$

Тогда для $i \in E_k$ будет $p(i) + q(i) = c_k + d_k$, то есть

$$(p+q)(i) = \sum_{k=1}^{n} (c_k + d_k) \chi_{E_K}$$

и, следовательно, $\int (p+q) d\mu =$

$$= \sum_{k=1}^{n} (c_k + d_k) \mu E_k = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu E_k + \sum_{k=1}^{n} d_k \mu E_k = \int p d\mu + \int q d\mu.$$

2. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\lambda \ge 0$. Тогда для простой положительной функции $p = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$ имеем $\int \lambda p d\mu = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda c_k \mu E_k = \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \mu E_k = \lambda \int p d\mu$.

В частности, $\int 0 d\mu = 0$, и для постоянной положительной функции $x : x(i) = r \ge 0$ имеем $\int x d\mu = r$.[4]

3. Пусть теперь f, g – положительные функции. Докажем для них аддитивность интеграла.

Пусть p, q – простые миноранты функций f и g соответственно. Так как $p + q \le f + g$, то $\int (p+q) d\mu = \int p d\mu + \int q d\mu \le \int f d\mu + \int g d\mu$.

[4] В этом случае $x = r\chi_I$.

Так как $p+q$ – одна из минорант функции $f+g$, то, переходя к точной верхней грани по всевозможным положительным простым функциям $s \leq f+g$, представляя их в виде $s = p+q$, где $p \leq f$, $q \leq g$, получим, что $\int (f+g)d\mu \leq \int f d\mu + \int g d\mu$.

Для доказательства противоположного неравенства возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и по нему подберем положительные простые p, q так, чтобы выполнялось

$$p \leq f \text{ и } q \leq g$$

такие простые функции, что

$$\int p d\mu > \int f d\mu - \varepsilon \text{ и } \int q d\mu > \int g d\mu - \varepsilon.$$

Тогда, так как $p+q \leq f+g$, получим

$\int (p+q)d\mu = \int p d\mu + \int q d\mu > \int f d\mu - \varepsilon + \int g d\mu - \varepsilon$.

Переходя к точной верхней грани, имеем:

$$\int (f+g)d\mu \geq \int f d\mu + \int g d\mu - 2\varepsilon.$$

В силу произвольности ε отсюда получаем, что

$$\int (f+g)d\mu \geq \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Это и доказывает аддитивность интеграла для положительных функций.

Очевидно, что если $\lambda \geq 0$ и f – положительная функция, то, так как $\lambda p \leq \lambda f$ тогда и только тогда, когда $p \leq f$,

$$\int \lambda f d\mu = \sup \left\{ \int \lambda p d\mu \ : \ p \leq f \right\} =$$

$$= \sup \left\{ \lambda \int p d\mu \ : \ p \leq f \right\} = \lambda \sup \left\{ \int p d\mu \ : \ p \leq f \right\} = \lambda \int f d\mu.$$

Таким образом, однородность для положительных функций доказана.

4. Докажем теперь аддитивность интеграла для функций произвольного знака.

Пусть сначала $h = u - v$, где u, v – положительные функции. Тогда, так как $h_+ \geq h$, будет $h_+ \leq u$ и, следовательно, найдется положительная функция w такая, что $u = h_+ + w$.

Имеем: $v = u - h = h_+ + w - (h_+ - h_-) = h_- + w$. Так как h_-, w – положительны, $\int v d\mu = \int h_- d\mu + \int w d\mu$.

Таким образом, получаем: $\int f d\mu + \int g d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu + + \int g_+ d\mu - \int g_- d\mu = \int (f_+ + g_+)d\mu - \int (f_- + g_-)d\mu$.

Обозначая $u = f_+ + g_+, v = g_- + f_-$, получаем $\int f d\mu + \int g d\mu =$
$= \int \left(f_+ + g_+ - (f_- + g_-)\right) d\mu = \int (f+g)d\mu$.

5. Далее имеем $(-f)_\pm = f_\mp$. Поэтому $\int (-f)d\mu = \int (-f)_+ d\mu - - \int (-f)_- d\mu = \int f_- d\mu - \int f_+ d\mu = - \int f d\mu$.

Если теперь f – функция произвольного знака и λ – вещественное число, то при $\lambda \geq 0$ будет $\int \lambda f d\mu = \int (\lambda f)_+ d\mu - \int (\lambda f)_- d\mu = \lambda \int f_d \mu - \lambda \int f_- d\mu = \lambda \int f d\mu$. При отрицательном же λ получаем, что $\int (\lambda f)d\mu = \int -(-\lambda f)d\mu = - \int (-\lambda f)d\mu = -(-\lambda) \int f d\mu = \lambda \int f d\mu$.

6. Таким образом, линейность интеграла нами доказана. Остается проверить возможность интегрирования неравенств.

Для простых положительных функций "$p \leq q$ влечет $\int p d\mu \leq \int q d\mu$", получается почти тривиально. Предоставляем читателю возможность в этом убедиться.

Если $0 \leq f \leq g$, то, так как $p \leq f$ влечет $p \leq g$, $\int f d\mu = \sup \left\{ \int p d\mu \ : \ p \leq f \right\} \leq \sup \left\{ \int p d\mu \ : \ p \leq g \right\} = \int g d\mu$.

Если же f, g – функции произвольного знака и $f \leq g$, то, так как $g - f \geq 0$, $\int (g-f) d\mu \geq 0$. Исходя из аддитивности интеграла, имеем: $\int g d\mu - \int f d\mu = \int (g-f) d\mu \geq 0$, то есть $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

В качестве упражнения предлагаем читателю проверить неравенство $\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$. $\diamond$

Предлагаем читателю в качестве упражнения доказать теорему 2.1.2 для интеграла по множеству.

Определение 2.1.5.

Две функции f и g назовем **эквивалентными**, если $\mu\{i \in I \ : \ f(i) \neq g(i)\} = 0$.

Обозначим $\mathbf{S}$ – множество классов эквивалентностей функций из $\mathbb{R}^I$.

Предлагаем читателю убедиться, что это отношение действительно является отношением эквивалентности, то есть симметрично, рефлексивно и транзитивно. Тем самым множество всех функций $\mathbb{R}^I$ разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности.

Определение 2.1.6.

Для элементов $f, g \in \mathbf{S}$ считаем, что $f \leq g$ в том и только том случае, если $\mu\{i \in I \ : \ f(i) \leq g(i)\} = 1$.

Легко показать, что тем самым определено отношение порядка на множестве $\mathbf{S}$.

Замечание. Читатель, знакомый с теорией меры, понимает, что введенное множество классов эквивалентности – это множество измеримых функций (отсюда и обозначение), а множество почти всюду ограниченных функций в случае конечной меры дает множество суммируемых функций.

Предлагаем читателю доказать, что значение $\int\limits_E f d\mu$ не зависит от выбора представителя в классе эквивалентности, то есть интеграл определен и для всех элементов $\mathbf{S}$, обладая всеми свойствами из теоремы 2.1.2.

§2.2. Гипервещественные числа

В этом параграфе мы рассмотрим меру Фреше на множестве натуральных чисел. При этом функции, которые действуют из множества $\mathbb{N}$ в $\mathbb{R}$, являются обычными последовательностями. Поэтому, следуя традиции и из соображений наглядности, будем обозначать их буквами $x, y, \ldots$, а соответствующие значения (члены последовательности) $x_k, y_n, \ldots$. Используя терминологию теории меры, будем говорить, что некоторое свойство выполнено для почти всех $n \in \mathbb{N}$ (или, короче, почти всюду), если множество натуральных чисел, для которых это свойство выполнено, имеет единичную меру Фреше (или, что эквивалентно, множество чисел, для которых оно не имеет места, имеет меру ноль).[5]

Определение 2.2.1.

Обозначим $\Re$ – множество классов эквивалентности последовательностей из $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ по мере Фреше и назовем его множеством **гипервещественных** чисел.

Нетрудно понять, что последовательности, совпадающие, начиная с некоторого номера, эквивалентны (ибо дополнение множества, на котором они различны, конечно) и, следовательно, определяют одно гипервещественное число.

Согласно соглашению об арифметических операциях над функциями операции в множестве последовательностей вводятся "почленно". Покажем, что множество гипервещественных чисел образует упорядоченное поле.

Лемма 2.2.1.

Пусть μ – мера Фреше на множестве натуральных чисел. Пусть, далее, $A \subset \mathbb{N}$, $B \subset \mathbb{N}$ – множества нулевой меры. Тогда $\mu(A \cup B) = 0$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Тривиально следует мз свойств меры, отмеченных на стр. 24 $\diamond$

Теорема 2.2.1.

Для любых $x, y, z \in \Re$

1. $z = x + y$ *тогда и только тогда, когда для почти всех* $n \in \mathbb{N}$ $z_n = x_n + y_n$,
2. $z = xy$ *тогда и только тогда, когда для почти всех* $n \in \mathbb{N}$ $z_n = x_n y_n$,
3. $z = x - y$ *тогда и только тогда, когда для почти всех* $n \in \mathbb{N}$ $z_n = x_n - y_n$,
4. $z = \frac{x}{y}$ *тогда и только тогда, когда для почти всех* $n \in \mathbb{N}$ $z_n = \frac{x_n}{y_n}$, *если, естественно, почти всюду* y *отлично от нуля,*
5. $x = y$ *тогда и только тогда, когда для почти всех* $n \in \mathbb{N}$ $x_n = y_n$,
6. $x \leq y$ *тогда и только тогда, когда для почти всех* $n \in \mathbb{N}$ $x_n \leq y_n$,
7. *для любых двух элементов* $x, y \in \Re$ *либо,* $x \leq y$ *либо* $y \leq x$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Для доказательства достаточно проверить, что введенное в определении 2.1.5 отношение эквивалентности устойчиво относительно арифметических операций и отношения порядка.

Пусть $x^{(1)} \sim x^{(2)}$, $y^{(1)} \sim y^{(2)}$. Покажем, что $x^{(1)} + y^{(1)} \sim x^{(2)} + y^{(2)}$. Отсюда сразу будет следовать утверждение 1. Утверждения 2, 3, 4 доказываются аналогично, и их проверка предоставляется читателю.

---

[5] На самом деле почти все факты, излагаемые в дальнейшем, имеют место для произвольной нетривиальной меры. Предлагаем читателю найти те места, в которых действительно нужна специфика меры.

Обозначим $E_x = \{n \in \mathbb{N} \,:\, x^{(1)}{}_n = x^{(2)}{}_n\}$,

$E_y = \{n \in \mathbb{N} \,:\, y^{(1)}{}_n = y^{(2)}{}_n\}$.

Тогда $\mu\,(E_x \cap E_y)' = \mu\left(E'_x \cup E'_y\right) = 0$, так как множества E_x и E_y имеют единичную меру.

Таким образом, $\mu\,(E_x \cap E_y) = 1$ и, так как для всех $n \in E_x \cap E_y$, $x^{(1)}{}_n + y^{(1)}{}_n = x^{(2)}{}_n + y^{(2)}{}_n$. Отсюда и следует эквивалентность сумм.

Докажем утверждение 5 (утверждение 6 – это определение равенства классов эквивалентности). Пусть для почти всех $n \in \mathbb{N}$ $x_n \le y_n$. Тогда если $x" \sim x$, $y" \sim y$, то $x"_n \le y"_n$ почти всюду, ибо в противном случае для почти всех $n \in \mathbb{N}$ было бы выполнено $x_n = x"_n \ge y"_n = y_n$, что противоречит условию.

Для доказательства линейности порядка предположим, что $x, y \in \Re$. Допустим, далее, что для почти всех $n \in \mathbb{N}$ неверно, что $x_n \le y_n$. Тогда, обозначив

$$E = \{n \in \mathbb{N} \,:\, \text{неверно, что } x_n \le y_n\},$$

получим для $n \in E$ $x_n > y_n$, то есть $x > y$ почти всюду (так как мера множества E, очевидно, равна единице). $\diamond$

Замечание. Теорема 2.2.1 дает определение отношения порядка и арифметических операций в пространстве измеримых функций. В дальнейшем мы, допуская обычную вольность, будем отождествлять функции с соответствующими классами эквивалентности. Обычно такое отождествление не приводит к недоразумениям. Поскольку наши функции – это последовательности вещественных чисел, то часто будем их записывать в развернутом виде $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$. Таким образом, получается, что $x + y = (x_0, x_1, \ldots) + (y_0, y_1, \ldots) = (x_0 + y_0, x_1 + y_1, \ldots)$. Аналогично и для других операций и отношения порядка.

Теорема 2.2.1 показывает, что часть задачи нами выполнена, а именно: множество $\Re$ является упорядоченным полем, элементы которого можно мыслить, согласно предыдущему замечанию, как последовательности вещественных чисел, отождествленные по отношению совпадения почти всюду. Естественное вложение поля вещественных чисел в поле гипервещественных определяется далее. Рекомендуем читателю проверить, что это вложение сохраняет алгебраические операции и порядок. Более того, оно инъективно.

Определение 2.2.2.

Естественным вложением (поля $\mathbb{R}$ в поле $\Re$) назовем "стационарную" функцию $\tilde{}\,:\ \widetilde{r}_n = r$ для почти всех $n \in \mathbb{N}$.

В связи с вышесказанным мы можем не различать $\widetilde{r}$ и $r \in \mathbb{R}$. Более того, ясно, что нулем поля $\Re$ является элемент $\widetilde{0}$, а единицей – $\widetilde{1}$, которые мы, следуя нашему соглашению, будем обозначать 0 и 1 соответственно. Тем самым получается, что отображение $\tilde{}$ является мономорфизмом поля $\mathbb{R}$ в поле $\Re$. Строго говоря, алгебраические операции и отношения равенства и порядка в поле гипервещественных чисел следовало бы обозначать другими, отличными от тех, которые мы используем для обозначения их в поле $\mathbb{R}$, значками, но, благодаря наличию упомянутого мономорфизма, соответствующие операции и отношения на $\Re$ являются продолжениями их аналогов в поле вещественных чисел, поэтому мы не вводим новых обозначений для них.

Далее мы обобщим теорему 2.1.2 для интеграла по мере Фреше. Нам понадобятся важные для дальнейшего понятия.

Определение 2.2.3.

Модулем гипервещественного числа x назовем число $|x|$, определяемое функцией $(|x|)_n = |x_n|$.

Определение 2.2.4.

Число $\varepsilon \in \Re$ будем называть **бесконечно малым**, если $\forall n \left(n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \supset |\varepsilon| < \frac{1}{n}\right)$. Множество всех бесконечно малых чисел будем обозначать I.

Определение 2.2.5.

Обозначим $F = \{x \in \Re \, : \, \exists n \, (n \in \mathbb{N} \,\&\, |x| \leq n)\}$. Множество F назовем множеством **конечных** чисел, а разность $\Re \setminus F$ – множеством **бесконечно больших** чисел.

Нашей ближайшей целью будет показать, что введенные понятия нетривиальны. То, что, очевидно, $0 \in I$, а $\mathbb{R} \subset F$, большой роли не играет. Нас интересуют ненулевые бесконечно малые числа!

Теорема 2.2.2.

1. $x \in F$ *тогда и только тогда, когда* $\int x d\mu$ *конечен.*

2. $\varepsilon \in I$ *тогда и только тогда, когда* $\int \varepsilon d\mu = 0$.

3. $x \in F$ *тогда и только тогда, когда для некоторого* $\varepsilon \in I$ *и некоторого* $r \in \mathbb{R}$ *выполняется равенство* $x = r + \varepsilon$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

1. Если $x \in F$, то для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $-n \leq x \leq n$ и, следовательно, согласно теореме 2.1.2, $-\int n d\mu \leq \int x d\mu \leq \int n d\mu$. Тем самым $-n \leq \int x \leq n$, то есть интеграл конечен.

Обратно, пусть $\int x d\mu$ конечен. Если мы предположим, что $x \notin F$, то для всех натуральных n будет $x > n$ (мы считаем число x положительным). Интегрируя последнее неравенство, получаем, что $\int x d\mu > n$ для всех натуральных n, что противоречит конечности интеграла.

В случае же, если число x имеет произвольный знак, то рассматривая $\int x d\mu$ как разность интегралов от положительных чисел, заметим, что в случае бесконечности числа хотя бы один из интегралов не является конечным.

2. Если ε бесконечно мало, то для любого ненулевого натурального числа m $|\varepsilon| < \frac{1}{m}$. Тогда по теореме 2.2.1 для почти всех $n \in \mathbb{N}$ $\varepsilon_n < \frac{1}{m}$ и, следовательно, $\int \varepsilon d\mu \leq \int \frac{1}{m} d\mu = \frac{1}{m}$ по теореме 2.1.2. Таким образом, вещественное число $\int \varepsilon d\mu$ бесконечно мало, а в силу принципа Архимеда это возможно только тогда, когда $\int \varepsilon d\mu = 0$.

Обратно, если $\int x d\mu = 0$, но $x \notin I$, то для некоторого натурального (ненулевого) числа m будет $|x| \geq \frac{1}{m}$, то есть почти всюду $x \geq \frac{1}{m}$. Тогда по теореме 2.1.2 получаем, что и $\int x d\mu \geq \frac{1}{m} > 0$. Противоречие.

3. Для доказательства третьего утверждения для конечного числа x положим $r = \int x d\mu$. Тогда, применяя доказанное, имеем

$$\int \left(x - \int x d\mu\right) d\mu = \int x d\mu - \int (\int x d\mu) = r - \int r d\mu = r - r = 0.$$

То есть $x - r \in I$.

Обратно, если $x = r + \varepsilon$, то $\int x d\mu = \int r d\mu + \int \varepsilon d\mu = r$. Таким образом, $x \in F$. $\diamond$

§2.3. Арифметика бесконечно малых

Мы покажем, что множество конечных чисел является подкольцом поля гипервещественных чисел, а бесконечно малые образуют в этом кольце идеал. Более того, соответствующее факторкольцо изоморфно полю вещественных чисел.

Теорема 2.3.1.

1. Для любых двух бесконечно малых чисел ε, δ $\varepsilon + \delta \in I$.

2. Если $\varepsilon \in I$, $x \in F$, *то* $\varepsilon x \in I$.

3. Для любых конечных чисел x *и* y *их сумма и произведение конечны.*

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

В силу бесконечной малости ε для любого ненулевого натурального числа $|\varepsilon| < \frac{1}{2n}$. Аналогично $|\delta| < \frac{1}{2n}$. Тогда $|\varepsilon_k + \delta_k| \leq |\varepsilon_k| + |\delta_k| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$ для почти всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $|\,(\varepsilon + \delta)_k\,| < \frac{1}{n}$ для почти всех $k \in \mathbb{N}$. То есть $|\varepsilon + \delta| < \frac{1}{n}$. Это и доказывает первое утверждение.

Доказательство утверждения 2 проводится точно так же и предоставляется читателю в качестве упражнения.

Докажем теперь, что произведение конечных чисел конечно. Для суммы доказательство предоставляется читателю.

Имеем $|x| \leq r_x$, $|y| \leq r_y$, то есть почти всюду $|x_k| \leq r_x$, $|y_k| \leq r_y$. Тогда $|x_k y_k| = |x_k||y_k| = |x_k||y_k| \leq r_x r_y$ для почти всех $k \in \mathbb{N}$. Тем самым $xy \in F$. $\diamond$

Теорема 2.3.2.

Для любого конечного числа x *числа* r *и* ε, *существование которых доказано в теореме 2.2.2, определяются однозначно.*

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Предположим, что $x = r_1 + \varepsilon_1 = r_2 + \varepsilon_2$. Тогда ясно, что $r_1 - r_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \in I$ согласно предыдущей теореме. Таким образом, так как единственное вещественное бесконечно малое число – это ноль, $r_1 = r_2 = r_x$. Таким образом, $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 0$, что и доказывает теорему. $\diamond$

Определение 2.3.1.

Для каждого конечного числа x вещественное число, существование и единственность которого гарантируется теоремами 2.2.2 и 2.3.2, будем называть **тенью** числа x и обозначать ${}^\circ x$.

Как следует из доказательства теоремы 2.2.2 ${}^\circ x = \int x d\mu$ для всех конечных чисел x.

Определение 2.3.2.

Два числа $x, y \in \Re$ будем называть **бесконечно близкими**, если их разность бесконечно мала. Факт бесконечной близости чисел x и y будем обозначать $x \approx y$.

Предлагаем читателю убедиться, что отношение $x \approx y$ тогда и только тогда, когда $x - y \in I$, является отношением эквиваленитности.

Определение 2.3.3.

Для $x \in \Re$ множество

$$O(x) = \{y \in \Re \; : \; y \approx x\}$$

назовем **ореолом** числа x. Прямым следствием теорем 2.3.2, 2.3.1 является

Теорема 2.3.3.

В ореоле любого конечного числа существует единственное вещественное число – его тень. $\diamond$

Теорема 2.3.4.

Отображение $^\circ : F \longrightarrow \mathbb{R}$ *является изоморфизмом факторкольца* F/I *на поле вещественных чисел.*

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что для любых конечных чисел x и y выполнено $^\circ(x+y) = {}^\circ x + {}^\circ y$, $\ ^\circ(xy) = {}^\circ x\ {}^\circ y$ и если $^\circ y \neq 0$, то $^\circ\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{^\circ x}{^\circ y}$.

Утверждение для суммы тривиально следует из того, что тень – это интеграл. Докажем свойство тени произведения. Действительно, можно записать $x = {}^\circ x + \varepsilon,\ y = {}^\circ y + \delta$. Тогда

$$xy = ({}^\circ x + \varepsilon)\,({}^\circ y + \delta) = {}^\circ x\ {}^\circ y + {}^\circ x\delta + \varepsilon\ {}^\circ y + \varepsilon\delta.$$

Произведения ${}^\circ x\delta$, $\varepsilon\ {}^\circ y$, $\varepsilon\delta$ бесконечно малы по теореме 2.3.1. По той же теореме сумма этих чисел бесконечно мала. Таким образом, $xy = {}^\circ x\ {}^\circ y + \varepsilon$, где $\varepsilon \in I$. В силу единственности тени $^\circ(xy) = {}^\circ x\ {}^\circ y$.

Для завершения доказательства проверим, что если $y \in F \setminus I$, то $\frac{1}{y} \in F$ и $^\circ\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{^\circ y}$. Действительно, имеем $\frac{1}{y} - \frac{1}{^\circ y} = \frac{^\circ y - y}{y\ {}^\circ y}$. По определению тени числитель этой дроби бесконечно мал. Рассмотрим $y\ {}^\circ y = ({}^\circ y + \varepsilon)\ {}^\circ y = ({}^\circ y)^2 + \delta$, где $\delta \approx 0$. Если $\frac{1}{({}^\circ y)^2+\delta}$ не является конечным, то это число бесконечно велико и, следовательно, $\left|\frac{1}{({}^\circ y)^2+\delta}\right| > n$ для любого натурального числа $n \neq 0$. Тогда $({}^\circ y)^2 + \delta < \frac{1}{n}$ для всех ненулевых натуральных чисел n. Это означает, что $({}^\circ y)^2 + \delta = \alpha \approx 0$ или $({}^\circ y)^2 \approx 0$, то есть ${}^\circ y = 0$, что противоречит предположению. Таким образом, разность $\frac{1}{y} - \frac{1}{^\circ y}$ бесконечно мала. Этим и завершается доказательство теоремы. $\diamond$

Из доказательства теоремы 2.3.4 легко усмотреть, что имеет место

Теорема 2.3.5.

Гипервещественное число ε *является ненулевым бесконечно малым в том и только том случае, когда число* $\frac{1}{\varepsilon}$ *бесконечно велико.*

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Предоставляется читателю в качестве упражнения. $\diamond$

Теорема 2.3.6.

Для конечных $x, y \in \Re$*, если* $x \leq y$*, то* ${}^\circ x \leq {}^\circ y$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Это утверждение сразу следует из свойств интеграла. $\diamond$

$\diamond \qquad \diamond \qquad \diamond \qquad \diamond$

Настало время предъявить читателю конкретные бесконечно малые числа (и бесконечно большие, но с ними будет проще, благодаря предыдущей теореме). Внимательный читатель заметил, что вышедоказанные теоремы есть не что иное, как аналоги свойств сходящихся последовательностей. Аналогия становится совсем прозрачной, если вспомнить, что гипервещественные числа – это и есть (правда, с точностью до отождествления эквивалентных) числовые последовательности. Более того, справедлива

Теорема 2.3.7.

Пусть вещественная последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный x. Тогда гипервещественное число, определяемое классом эквивалентности этой последовательности, является конечным и имеет тень, равную x.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Мы докажем сначала, что бесконечно малые последовательности, то есть имеющие нулевой предел, дают бесконечно малые гипервещественные числа.

Действительно, если $\lim x_n = 0$, то, по определению, для любого ненулевого натурального числа m существует номер n_0 такой, что для всех $n \in \mathbb{N}$ таких, что $n \geq n_0$ $|x_n| < \frac{1}{m}$. Таким образом, множество тех натуральных чисел, для которых $|x_n| < \frac{1}{m}$ имеет меру Фреше, равную единице (при любом $m \in \mathbb{N}$), то есть число, определяемое бесконечно малой последовательностью, бесконечно мало (вот и пример!).

Далее, если $\lim x_n = x$, то для некоторой бесконечно малой (стремящейся к нулю) последовательности $\{\alpha_n\}$ и для всех n, начиная с некоторого номера (то есть на множестве единичной меры!), $x_n = x + \alpha_n$. Таким образом, гипервещественное число $a = \widetilde{\{x_n\}}$, определяемое последовательностью $\{x_n\}$, является суммой вещественного числа x и бесконечно малого $\beta = \widetilde{\{\alpha_n\}}$.

Тогда это число конечно и есть сумма вещественного и бесконечно малого. Из единственности тени получаем, что $^\circ a = x$. $\diamond$

Из доказанных теорем легко усмотреть геометрическую интерпретацию расширенной (гипервещественной) прямой. Каждое вещественное число r определяет свой ореол, состоящий из множества всех (конечных) чисел, бесконечно близких к r, причем (проверьте!) ореолы различных чисел не пересекаются (ср. аналогию с гирляндой). Так устроена "конечная часть" прямой линии. Она, если угодно, лежит в видимой части горизонта. А за горизонтом влево и вправо от нуля расположены бесконечно большие (положительные и отрицательные) числа. При этом тонкое строение конечной части "невооруженным глазом" разглядеть невозможно, ибо расстояния между бесконечно близкими числами "сколь угодно малы". Для того, чтобы увидеть строение ореола, необходимо применить изобретенный Г. Кейслером "инфинитезимальный микроскоп", увеличивающий "в бесконечно много раз". Аналогично, части прямой, лежащие за горизонтом, доступны наблюдению только через "бесконечно приближающий" телескоп (см. рис. 2.1).

Распространим понятие тени на бесконечно большие числа.

Определение 2.3.4.

Для бесконечно большого $x \in \Re$ положим $^\circ x = +\infty$, если $x > 0$ и $^\circ x = -\infty$, если $x < 0$. Пишем также $x \approx \pm\infty$.

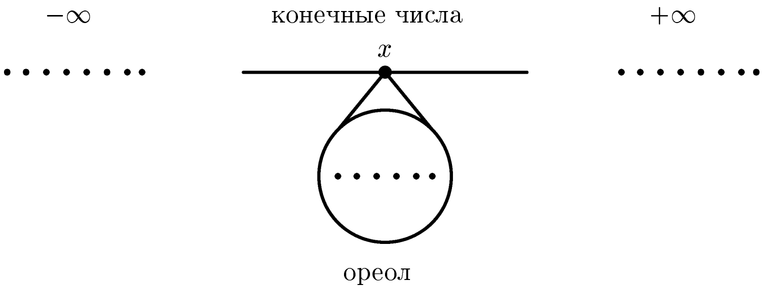

Рис. 2.1. Строение гипервещественной прямой

§2.4. Банахов предел

В предыдущем параграфе мы доказали, что множество гипервещественных чисел содержит все ограниченные последовательности, а для сходящихся последовательностей тень соответствующего числа совпадает с пределом. Кроме того, операция взятия тени согласована с алгебраическими операциями. Таким образом, мы доказали известную теорему о существовании обобщенного предела в смысле С. Банаха.

Теорема 2.4.1.

Существует такое отображение LIM, *называемое обобщенным банаховым пределом и заданное на множестве X всех ограниченных последовательностей вещественных чисел, что для любых $x, y, z \in X$ выполнено:*

1. Если $z = x + y$, *то* $\mathrm{LIM}z = \mathrm{LIM}x + \mathrm{LIM}y$.

2. Если $z = x\,y$, *то* $\mathrm{LIM}z = \mathrm{LIM}x\,\mathrm{LIM}y$.

3. Если $\lim x = a$, *то* $\mathrm{LIM}x = a$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Достаточно в качестве требуемого продолжения предела взять сужение операции взятия тени с множества всех конечных гипервещественных чисел на множество всех гипервещественных чисел, определяемых ограниченными последовательностями. ◇

Более детальное изучение вопроса показывает, что в 2.2 и 2.3 мы считали бесконечно малыми последовательности, имеющие нулевой банахов предел, а бесконечно близкими – отличающиеся на бесконечно малые. Бесконечно большие – это, как обычно, обратные бесконечно малым.

Сказанное выше с учетом теоремы 2.4.1 показывает альтернативный путь к обоснованию актуальных бесконечно малых. Коротко остановимся на основных моментах этого подхода.

Рассмотрим множество всех последовательностей вещественных чисел, которое обозначим $\mathbf{s}$. Пусть $\mathbf{c}$ – множество всех сходящихся последовательностей. Обозначим, далее, $\mathbf{b}$ – множество всех ограниченных последовательностей.

Теорема 2.4.2.

Существует отображение LIM, *заданное на множестве* $\mathbf{b}$ *такое, что для любых* $x, y, z \in \mathbf{b}$

1. Если $z = x + y$, *то* $\mathrm{LIM}z = \mathrm{LIM}x + \mathrm{LIM}y$.

2. Если $z = x\,y$, *то* $\mathrm{LIM}z = \mathrm{LIM}x\,\mathrm{LIM}y$.

3. Если $\lim x = a$, *то* $\mathrm{LIM}x = a$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Ясно, что эта теорема тождественна теореме 2.4.1. Однако нам требуется *альтернативное* ее доказательство. Ввиду эскизности изложения в этом параграфе, мы сошлемся на [30, с. 99], где сформулирован результат и дана идея доказательства – следует положить $\mathrm{LIM}x = \lim \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$, если он существует – подробности в тексте [30, гл.3].

Однако теорема 2.4.2, формально тождественная теореме 2.4.1, тем не менее слабее ее, поскольку в доказательстве теоремы 2.4.1 мы использовали более сильный результат – лемму Куратовского – Цорна. Действительно, класс последовательностей, на которые продолжается операция предельного перехода в теореме 2.4.2, – это множество ограниченных последовательностей, а в теореме 2.4.1 – множество последовательностей, ограниченных *почти всюду* в смысле подходящей меры.

Более того, построенное множество ограниченных последовательностей не является ни полем (даже не есть область целостности!), ни линейно упорядоченным множеством. Поэтому, чтобы получить то, что нам нужно, необходимо отождествить *почти совпадающие* последовательности. Для этого следует на множестве натуральных чисел ввести меру Фреше и, применяя к полученному в 2.4.2 продолжению лемму Куратовского – Цорна, получить некоторое *максимальное продолжение*, которое будет удовлетворять нужным требованиям.

Приведенные соображения показывают, что банахов предел – это все-таки предел по некоторому ультрафильтру. Таким образом, нам не удалось избежать "неудобного" неконструктивного метода (что и неудивительно). Единственный выигрыш состоит в том, что мы не нуждаемся в понятии интеграла, заменяя его понятием предела.

Теперь, построив множества

$$I = \{\varepsilon \in \mathrm{s}\ :\ \mathrm{LIM}\varepsilon = 0\}\,,\quad F = \{x \in \mathrm{s}\ :\ \mathrm{LIM}x \in \mathbb{R}\}\,,$$

где предел понимается уже в множестве вещественных последовательностей, понимаемых с точностью до отождествленных по некоторой мере Фреше, получим множества бесконечно малых и конечных чисел.[6]

Из свойств предела сразу следует, что каждое конечное число однозначно представимо в виде суммы $x = \mathrm{LIM}x + \varepsilon$, где $\varepsilon \in I$, то есть роль тени играет банахов предел.

[6]Как показывает пример последовательностей $x_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n - -\text{четно} \\ 1, & \text{если } n - -\text{нечетно} \end{cases}$ и $y_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } n - -\text{четно} \\ 1, & \text{если } n - -\text{нечетно} \end{cases}$ отношение $LIM(x-y) = 0$ не является отношением эквивалентности. Это говорит о том, что понятия меры (или ультрафильтра) нельзя избежать.

§2.5. Принцип Лейбница

Определение 2.5.1.

Определим для функции f с dom$f \subset \mathbb{R}^m$ и rng$f \subset \mathbb{R}$ ее продолжение $\tilde{f}$.

Положим для $x \in \Re^m$ $\widetilde{f}$: $\widetilde{f}(x) = (f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots)$. Если f – функция с dom$f \subset \mathbb{R}^m$, rng$f \subset \mathbb{R}^k$, то $f =< f_1, f_2, \ldots, f_k >$, где для $s = 1, 2, \ldots k$ f_s – вещественнозначная функция с dom$f_s =$ dom$f$. Тогда продолжением f будет функция $\widetilde{f} =< \widetilde{f_1}, \widetilde{f_2}, \ldots, \widetilde{f_k} >$.

Пусть $\varphi(x^1, x^2, \ldots, x^k)$ – некоторое утверждение о поле $\Re$. Оно выражается с помощью равенств, неравенств и *логических* операций над утверждениями, имеющими более простое строение. К логическим операциям мы относим конъюнкцию, дизъюнкцию, отрицание, импликацию, а также "навешивание" кванторов всеобщности и существования (см. 1.2).

Если утверждение φ не содержит ни кванторов, ни знаков логических операций, то оно обязательно имеет вид $x^1 = x^2$ или $x^1 \leq x^2$. Такие утверждения назовем *простейшими.*

Теорема 2.5.1.

Пусть $x^1, x^2, \ldots, x^k$ – гипервещественные числа. Тогда $\varphi(x^1, x^2, \ldots, x^k)$ справедливо в том и только том случае, когда для почти всех $n \in \mathbb{N}$ имеет место $\varphi\left({x^1}_n, {x^2}_n, \ldots, {x^k}_n\right)$ в поле $\mathbb{R}$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Проведем его индукцией по сложности утверждения. Для простейших утверждений теорема совпадает с теоремой 2.2.1 (п. 5, 6), которая, следовательно, служит базой индукции.

Для произвольного утверждения предположим, что для всех более простых утверждений теорема доказана. Разберем все возможные случаи получения утверждения φ с помощью логических операций. Не умаляя общности, можно считать, что наше утверждение зависит только от двух переменных, то есть имеет вид $\varphi(x, y)$.

1. Если $\varphi = \neg\varphi_1$, то, так как, очевидно, множества $\{n \in \mathbb{N} : \models \varphi(x_n, y_n)\}$ и $\{n \in \mathbb{N} : \models \varphi_1(x_n, y_n)\}$ являются дополнениями друг друга,

$$\mu\{n \in \mathbb{N} : \models \varphi(x_n, y_n)\} = 1 - \mu\{n \in \mathbb{N} : \models \varphi_1(x_n, y_n)\}.$$

Так как справедливость φ означает, что утверждение φ_1 не имеет места, если $\models \varphi(x, y)$, то, по предположению индукции, $\mu\{n \in \mathbb{N} : \models \varphi_1(x_n, y_n)\} = 0$ и, следовательно,

$$\mu\{n \in \mathbb{N} : \models \varphi(x_n, y_n)\} = 1.$$

Обратно, если $\mu\{n \in \mathbb{N} : \models \varphi(x_n, y_n)\} = 1$, то получаем, что

$$\mu\{n \in \mathbb{N} : \models \varphi_1(x_n, y_n)\} = 0.$$

Тогда по индукционному предположению $\varphi_1(x, y)$ не имеет места, то есть справедливо утверждение $\varphi(x, y)$.

2. Предположим, что $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$. Тогда, считая, что φ справедливо тогда и только тогда, когда справедливо хотя бы одно из утверждений φ_1 или φ_2,

$$\{n \in \mathbb{N} \, : \models \varphi(x_n, y_n)\} =$$
$$= \{n \in \mathbb{N} \, : \models \varphi_1(x_n, y_n)\} \cup \{n \in \mathbb{N} \, : \models \varphi_2(x_n, y_n)\}.$$

Обозначая эти множества Φ, Φ_1 и Φ_2 соответственно, получим, что если $\mu\Phi_1 = 1$ или $\mu\Phi_2 = 1$, то и $\mu\Phi = 1$. Таким образом, если $\varphi(x, y)$ справедливо, то $\mu\{n \in \mathbb{N} \, : \models \varphi(x_n, y_n)\} = 1$.

Если теперь $\mu\{n \in \mathbb{N} \, : \models \varphi(x_n, y_n)\} = 1$, то хотя бы одно из множеств Φ_1 или Φ_2 имеет единичную меру (лемма 2.2.1) и, следовательно, для почти всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо одно из утверждений $\varphi_1(x_n, y_n)$ или $\varphi_2(x_n, y_n)$, то есть согласно индукционному предположению имеет место по крайней мере одно из двух утверждений $\varphi_1(x, y)$ или $\varphi_2(x, y)$, то есть справедливо $\varphi(x, y)$.

3. Предлагаем читателю в качестве упражнения провести рассуждения в случае, если $\varphi = \varphi_1 \& \varphi_2$.

4. Пусть $\varphi(x, y) = \exists z \varphi_1(z, x, y)$. Тогда справедливость $\varphi(x, y)$ означает существование гипервещественного числа Z такого, что имеет место утверждение $\varphi_1(Z, x, y)$, для которого по индукционному предположению

$$\mu\{n \in \mathbb{N} \, : \, \varphi_1(Z_n, x_n, y, n)\} = 1.$$

Так как множество $\{n \in \mathbb{N} \, : \, \varphi_1(Z_n, x_n, y, n)\}$ очевидно является подмножеством множества

$$\{n \in \mathbb{N} \, : \, \exists z \varphi_1(z, x_n, y_n)\} = \{n \in \mathbb{N} \, : \, \varphi_1(z, x_n, y_n)\},$$

для почти всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо $\varphi(x_n, y_n)$.

Если теперь $\varphi(x_n, y_n)$ имеет место почти всюду, то почти всюду найдется вещественное число R_n такое, что $\models \varphi_1(R_n, x_n, y_n)$. Но тогда утверждение $\varphi_1(R_n, x_n, y_n)$ справедливо для почти всех $n \in \mathbb{N}$, и по индукционному предположению справедливо утверждение $\varphi_1(R, x, y)$, где R – гипервещественное число, определенное последовательностью $n \mapsto R_n$. Но тогда справедливо и утверждение $\exists z \varphi_1(z, x, y)$, то есть имеет место $\varphi(x, y)$.

5. Для утверждения вида $\varphi = \forall z \varphi_1(z, x, y)$ доказательство предлагается читателю.

6. Для завершения рассуждений по индукционному переходу нам осталось провести доказательства для случая $\varphi = \varphi_1 \supset \varphi_2$.

Пусть $\models \varphi(x, y)$. Тогда из того, что справедливо $\varphi_1(x, y)$, следует, что имеет место утверждение φ_2. По индукционному предположению если φ_1 справедливо, то

$$\mu\{n \in \mathbb{N} \, : \models \varphi_1(x_n, y_n)\} = 1,$$

следовательно, так как

$$\{n \in \mathbb{N} \ : \models \varphi_1(x_n, y_n)\} \subset \{n \in \mathbb{N} \ : \models \varphi_2(x_n, y_n)\},$$

последнее множество имеет единичную меру. Таким образом, для почти всех $n \in \mathbb{N}$ если имеет место $\varphi_1(x_n, y_n)$, то справедливо и $\varphi_2(x_n, y_n)$, то есть утверждение $\varphi(x_n, y_n)$ имеет место почти всюду.

Рассуждения в другую сторону предоставляем провести читателю.

Таким образом, индукционный переход завершен и теорема доказана для всякого утверждения о гипервещественных числах. $\diamond$

Замечание. Внимательный читатель в доказанной теореме без труда узнает основную теорему об ультрапроизведениях.

Теорема 2.5.2.

Поле $\Re$ удовлетворяет принципу Лейбница.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Непосредственно следует из теоремы 2.5.1. $\diamond$

Принцип Лейбница представляет собой связь некоторого утверждения о гипервещественных числах с соответствующим утверждением о вещественных числах.

Для более детального понимания принципа расширения приведем несколько весьма полезных фактов. Их использование поможет доказать принцип Лейбница "в лоб", не используя основную теорему об ультрапроизведениях. Следует, однако, заметить, что без доказанной нами теоремы, вообще говоря, нельзя обосновать исчисление бесконечно малых в полном объеме, то есть только принципа Лейбница для наших целей недостаточно.

Определение 2.5.2.

Для каждого множества $E \subset \mathbb{R}$ определим его **робинсоново расширение** – множество $\widetilde{E}$, получающееся по схеме, рассмотренной в 1.6.

Ясно, как определить расширение и для подмножеств $\mathbb{R}^k$. Нижеследующие теоремы справедливы и для этого случая. Доказательство их мы предлагаем провести читателю.

Напомним эту схему. Пусть χ_E – характеристическая функция множества E. Она, как известно, определяется правилом $\chi_E(x) = 1$ при $x \in E$ и $\chi_E(x) = 0$ в противном случае. Пусть, далее, $\Pi = \widetilde{\chi_E}$ – ее продолжение. Положим $\widetilde{E} = \Pi^{-1}(0)$.

Теорема 2.5.3.

$\widetilde{E} = \{x \in \Re \ : \ x_n \in E$ *для почти всех* $n \in \mathbb{N}\}$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Пусть $x \in \Re$ и $x_n \in E$ для почти всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда для почти всех n $\chi_E(x_n) = 1$, то есть $\Pi(x) = 1$ или, что то же самое, $x \in \widetilde{E}$.

Если же $x \in \widetilde{E}$, то $\Pi(x) = 1$, то есть почти всюду $\Pi(x_n) = 1$. Таким образом, для почти всех $n \in \mathbb{N}$ $\chi_E(x_n) = 1$, что и означает, что $x_n \in E$ почти всюду. $\diamond$

Следствие. $\widetilde{A \cap B} = \widetilde{A} \cap \widetilde{B}$ для любых множеств $A, B \subset \mathbb{R}$.

Действительно, $x \in \widetilde{A \cap B}$ тогда и только тогда, когда для почти всех $n \in \mathbb{N}$ $x_n \in A \cap B$, то есть почти всюду $x_n \in A$ и $x_n \in B$. Таким образом, обозначая $N_A =$

$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in A\}$, $N_B = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in B\}$, получим, что для всех $n \in N_A \cap N_B$ $x_n \in A \cap B$. Но мера пересечения $N_A \cap N_B$, очевидно равна единице. Таким образом, почти всюду $x_n \in A \cap B$, то есть $x \in \widetilde{A} \cap \widetilde{B}$. $\diamond$

Теорема 2.5.4.

1. *Для любого множества* $A \subset \mathbb{R}$ $\widetilde{A} \cap \mathbb{R} = A$.
2. *Для любой функции* f *с* $\mathrm{dom} f \subset \mathbb{R}$ $\widetilde{\mathrm{dom} f} = \mathrm{dom} \widetilde{f}$, *в частности* $\widetilde{\chi_A} = \chi_{\widetilde{A}}$.
3. *Для любого множества* $A \subset \mathbb{R}$ $A \subset \widetilde{A}$, *при этом* $A = \widetilde{A}$ *тогда и только тогда, когда множество* A *конечно.*

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

1. Включение $A \subset \widetilde{A} \cap \mathbb{R}$ очевидно. Пусть $x \in \widetilde{A} \cap \mathbb{R}$. Тогда $x \in \widetilde{A}$ и $x \in \mathbb{R}$. Если при этом $x \notin A$, то $\chi_A(x) = 0$ и, следовательно, $\widetilde{\chi_A(x)} = 0$, то есть $x \notin \widetilde{A}$. Тем самым $x \in A$.

2. Пусть $x \in \mathrm{dom} f$. Тогда $\widetilde{\chi_{\mathrm{dom} f}}(x) = 1$ и, следовательно, $x \in \widetilde{\mathrm{dom} f}$, что и доказывает утверждение 2.

3. Первая часть утверждения – тривиальное следствие определения робинсонова расширения.

Пусть множество A конечно и $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. По доказанному $x \in \widetilde{A}$ тогда и только тогда, когда $x_n \in A$ почти всюду. Но A конечное множество, следовательно, для почти всех $n \in \mathbb{N}$ $x_n = a_1$, или $x_n = a_2$, ..., или $x_n = a_k$. Таким образом, любая последовательность из $\widetilde{A}$ принимает лишь конечное множество различных значений. Таким образом, новых элементов к элементам множества A не добавляется.

Предположим теперь, что $\widetilde{A} = A$. Если множество A бесконечно, то в нем есть счетное (бесконечное же) подмножество $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$. Рассмотрим последовательность $x \in \Re$, определенную правилом $x_n = b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда очевидно, что $x_n \in A$ для почти всех $n \in \mathbb{N}$ – мы считаем, что x – это класс эквивалентности последовательности $\{x_n\}$. Таким образом, $x \in \widetilde{A}$. Очевидно, что $x \notin A$, то есть $A \neq \widetilde{A}$. $\diamond$

Определение 2.5.3.

Множество ${}^{\infty}\mathbb{N} = \widetilde{\mathbb{N}}$ назовем множеством **гипернатуральных чисел**, множество $\aleph = {}^{\infty}\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ – множеством **бесконечных натуральных** чисел.

Пример. Покажем, что продолжение $\widetilde{f}$ функции f "обладает теми же свойствами", что и функция f. Техника этого примера фактически может быть использована для доказательства принципа Лейбница "в лоб".

Мы рассмотрим для простоты одно из свойств функции sin, а именно формулу двойного угла. Имеем $\sin 2r = 2 \sin r \cos r$ для всех $r \in \mathbb{R}$. Так как $\left(\widetilde{\sin} 2x\right)_n = \sin 2x_n = 2 \sin x_n \cos x_n = 2\left(\widetilde{\sin} x\right)_n (\widetilde{\cos} x)_n$, получаем $\widetilde{\sin} 2x = 2 \widetilde{\sin} x \widetilde{\cos} x$ для всех $x \in \Re$.

Определение 2.5.4.

Функцию (или множество), имеющую вид $g = \widetilde{f}$ (соответственно $B = \widetilde{A}$) для некоторой функции f с $\mathrm{dom} f, \mathrm{rng} f \subset \mathbb{R}$ (соответственно для некоторого множества $A \subset \mathbb{R}$), назовем **классической** (соответственно **классическим**).

Аналогично можно рассуждать для любой известной функции. Более детальный анализ доказательства примера и теоремы 2.5.1, показывает, что имеет место

Теорема 2.5.5.

(**Принцип переноса.**) *Любое свойство вещественных чисел, выраженное с помощью неравенств и вещественных функций, справедливо и для гипервещественных функций. Наоборот, свойство, справедливое для классических множеств и функций имеет место для их сужений на вещественную прямую.*

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Предоставляем читателю.

Предлагаем так же вывести отсюда принцип Лейбница. $\diamond$

$\diamond \quad \diamond \quad \diamond \quad \diamond$

Как показывает принцип переноса, классические объекты, с точки зрения их свойств, не отличаются от стандартных вещественных объектов. В связи с этим мы не будем различать вещественные функции и их продолжения, считая, что $\widetilde{f} = f$ и $\mathrm{dom}\widetilde{f} = \widetilde{\mathrm{dom} f} = \mathrm{dom} f$. Иными словами, мы всегда будем считать, что стандартная вещественная функция определена и для всех гипервещественных значений аргумента, принадлежащих робинсонову расширению ее области определения.

Принцип переноса гарантирует, что с классическими объектами можно работать точно так же, как с обычными вещественными объектами, в частности имеет место принцип математической индукции на множестве ${}^{\infty}\mathbb{N}$.

Действительно, если φ свойство натуральных чисел, то его "классический" аналог для гипернатуральных чисел справедлив тогда и только тогда, когда свойство φ для всех (или, начиная с некоторого n_0) натуральных чисел. Если последнее свойство можно доказать по индукции, то, следовательно, и его аналог доказывается по индукции. Так, например, легко доказывается, что для всех натуральных n имеет место $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Тогда это же равенство имеет место и для гипернатуральных чисел – доказательство индукцией.

Следует, однако, отметить, что применение принципа переноса требует определенной осторожности. Дело в том, что именно классические объекты дают нам полные аналоги вещественных. Попытки перенести с помощью принципа переноса стандартные результаты на неклассические и, наоборот, использование свойств неклассических объектов для доказательства свойств стандартных в лоб с помощью принципа переноса, нгесмотря на некоторую привлекательность идеи, может привести к неверному результату. Например, известно, что каждое подмножество натуральных чисел имеет наименьший элемент, однако, как нетрудно видеть, множество $\aleph$ не имеет наименьшего элемента. Точно так же множество бесконечно малых, хотя и ограничено в $\Re$, не имеет ни точной верхней, ни точной нижней границы.

Следующее рассуждение показывает, что любой отрезок вещественной прямой биективен множеству $\{0, 1, \ldots, T$, где T – бесконечно большое натуральное число. Тем самым, создается иллюзия, что, согласно принципу переноса, отрезок (да и вся вещественная прямая) должен вести себя как конечное множество, что, очевидно, не соответствует действительности. Причина – в неклассичности биекции, которую мы предъявим.

Итак, пусть $a < b$ и $a, b \in \mathbb{R}$. Пусть, далее, N – юесконечно большое натуральное число. Положим $x_k = a + \frac{b-a}{N}k$, где $k = 0, 1, \ldots, N$. Тогда для каждого вещественного $x \in [a, b]$ существует k такое, что $x \approx x_k$. Более того, так как $x_{k+1} - x_k \approx 0$, существует множество $\{x_{k_1}, \ldots x_{k_m}\}$ такое, что $x \approx x_{k_s}$ при всех $s = 1, 2, \ldots, m$. Так как ореолы различных вещественных чисел не пересекаются, мы получаем разбиение множества $\{x_0, x_1, \ldots x_N$ на классы $u_1, u_2, \ldots u_T$, в каждом из которых имеется единственное вещественное число. Ясно, что мы построили требуемую биекцию.

С другой стороны, если имеется множество $\{a_1, a_2, \ldots, a_N$, где N – бесконечно большое натуральное число, то с помощью индукции определена сумма $\sum\limits_{k=1}^{N} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_N$.

§2.6. Порядки малости

Хотя нами доказано, что сумма, разность, произведение конечных чисел конечны, утверждение о том, что отношение конечных чисел конечно, требует дополнительного предположения того, что знаменатель не является бесконечно малым. В случае, если знаменатель бесконечно мал, возможны следующие ситуации:

(1) числитель конечен, но не бесконечно мал, тогда, как легко понять, отношение будет бесконечно большим;

(2) числитель бесконечно мал.

Обсудим ситуацию (2) подробнее. Пусть $\alpha, \beta \approx 0$. Чему равно отношение $\frac{\alpha}{\beta}$?

Оказывается, что это отношение представляет собой *неопределенность*. С неопределенностями мы встречаемся в курсе анализа при изучении теории пределов. Так как актуальные бесконечно малые призваны заменить понятие предела в курсе анализа, то ничего неожиданного в том, что появились неопределенности, нет. Более того, мы видели, что тень – это фактически предел последовательности. Это второе соображение, которое объясняет, откуда берутся неопределенности. Поскольку мы предполагаем у читателя знание основ анализа, мы не будем приводить примеры на раскрытие неопределенностей. Отметим, что это место методически наиболее трудное. Поскольку при преподавании мы не можем привести пример конкретного бесконечно малого числа, приходится выкручиваться до тех пор, когда неопределенности возникнут сами собой при вычислении предела или производной, что более естественно.

Определение 2.6.1.

Будем говорить, что гипервещественное число x **мало по сравнению с числом** y или x **имеет больший порядок малости**, чем y, если для некоторого бесконечно малого α имеет место равенство $x = \alpha y$. В обозначениях $x = o(y)$.

Отметим, что Г. Лейбниц считал бесконечно малые нулями (или почти нулями), рассматривая нули *более высокого* порядка, которыми по сравнению с другими величинами можно пренебрегать.

Определение 2.6.2.

Два гипервещественных числа x и y назовем **эквивалентными**, если $x = y + o(y)$. В этом случае будем писать $x \sim y$.

Лемма 2.6.1.

Для любых ненулевых гипервещественных чисел $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $\frac{x}{y} \approx 1$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Действительно, если $x = y + o(y)$, то $\frac{x}{y} = 1 + \frac{o(y)}{y}$. Пусть $o(y) = \beta y$, где $\beta \approx 0$, тогда $\frac{x}{y} = 1 + \beta \approx 1$ по свойству тени. Обратно, если $\frac{x}{y} \approx 1$, то $\frac{x}{y} = 1 + \alpha$, где $\alpha \approx 0$. Отсюда легко получить требуемое. $\diamond$

Теорема 2.6.1.

Для любых $x, y, z \in \Re$

1. $o(x) + o(x) = o(x)$;
2. *если число k – конечно, то $ko(x) = o(kx) = o(x)$, в частности, любое бесконечно малое число имеет вид $o(1)$;*
3. $o(o(x)) = o(x)$;
4. $o(x)o(x) = o(x^2)$;
5. $x \sim x$;
6. *если $x \sim y$, то $y \sim x$;*
7. *если $x \sim y$ и $y \sim z$, то $x \sim z$;*
8. *если $x \sim x_1$ и $y \sim y_1$, то $xx_1 \sim yy_1$ $(x_1, y_1 \in \Re)$.*

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Так как, вообще говоря, символом "о-малое" обозначено *произвольное* число, имеющее больший порядок малости, то, рассуждая формально, имеем $u_1 = o(x), u_2 = o(x), v = o(y)$. Тогда $u_k = \alpha_k x, v = \beta y$ для некоторых $\alpha_1, \alpha_2, \beta \approx 0$, при этом в общем случае $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

1. $o(x) + o(x) = u_1 + u_2 = \alpha_1 x + \alpha_2 x = x(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha x = o(x)$.
2. $ko(x) = ku_1 = k\alpha x = \gamma x$. Поскольку произведение конечного числа на бесконечно малое бесконечно мало, $\gamma \approx 0$, то есть $ko(x) = o(x)$. Аналогично второе равенство.
3. $o(o(x)) = o(u_1) = \gamma u_1$, где $\gamma \approx 0$. Далее имеем $o(o(x)) = \gamma u_1 =$
   $= \gamma\alpha_1 x$, где $\gamma\alpha_1 \approx 0$, то есть $o(o(x)) = o(x)$.
4. $o(x)o(x) = \alpha_1 x \alpha_2 x = \alpha_1\alpha_2 x^2 = o(x^2)$.
5. Очевидно.
6. Имеем $\frac{y}{x} = \frac{1}{\frac{x}{y}} \approx 1$. Далее по лемме 2.6.1.
7. Аналогично $\frac{x}{z} = \frac{\frac{x}{y}}{\frac{y}{z}} \approx 1$.

8. Имеем $\frac{xy}{x_1 y_1} = \frac{x}{x_1} \frac{y}{y_1} \approx 1$. $\diamond$

Доказанная теорема аналогична известным фактам об *"о-малом"*. При желании можно ввести понятие и *"О-большое"*, а именно

Определение 2.6.3.

Будем говорить, что гипервещественное число x есть **О-большое** от числа y и писать $x = O(y)$, если $|x| \leq ky$ для некоторого конечного числа k.

Предлагаем читателю сформулировать и доказать известные из анализа свойства этого понятия.

$\diamond \quad \diamond \quad \diamond \quad \diamond$

На этом мы заканчиваем обзор основных свойств гипервещественных чисел. В следующей главе мы обратимся к применению идей актуальных бесконечно малых в преподавании анализа.

Глава 3.

Основы анализа

В этой главе мы изложим основные понятия математического анализа на языке актуальных бесконечно малых. Мы следуем идеям Г. Лейбница и начинаем с дифференциального и интегрального исчисления, как наиболее важных для приложений. Теорию пределов мы излагаем после этих разделов для полноты. Мы с определенной степенью подробности излагаем теорию только для функций одной переменной. Относительно функций многих переменных, а также теории функций комплексной переменной мы ограничиваемся введением понятия бесконечно малого вектора (числа), оставляя работу для читателя.

То, что предлагаемая конструкция эквивалентна стандартной, объясняется в последнем параграфе. См. также [6].

§3.1. Непрерывность

В этом параграфе мы будем рассматривать внутренние точки области определения функций, то есть такие, что их ореол целиком лежит в робинсоновом расширении области определения.[1]

Определение 3.1.1.

Функция f называется **непрерывной** во внутренней точке a своей области определения, если в точках бесконечно близких к a значение функции бесконечно близко к $f(a)$, то есть для всех $x \approx a$ будет $f(x) \approx f(a)$.

Таким образом, непрерывность понимается в точности в соответствии с нашей интуицией. Согласно понятию тени и свойств конечных чисел, можно определение

[1] Можно доказать, что множество $E \subset \mathbb{R}$ открыто в естественной топологии тогда и только тогда, когда $\forall\, x \in E O(x) \subset \widetilde{E}$.

непрерывности записать в эквивалентной форме: для всех $x \approx a$ $\ ^\circ(f(x)) = f(a)$ или $f(x) = f(a) + \alpha$, где $\alpha \approx 0$.

Еще более интуитивно ясным понятие непрерывности получается, если рассмотреть *приращения.* Так как разность $f(x) - f(a)$ есть приращение функции, а $x - a$ – приращение аргумента, очевидно, что функция непрерывна в точке тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению агрумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции. Последнее можно принять за определение.

Теорема 3.1.1.

1. Класс функций, непрерывных в точке a, замкнут относительно сложения и умножения, а также операции композиции.

2. Отношение двух непрерывных функций (в точке a) непрерывно, если знаменатель в этой точке не обращается в нуль.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

В доказательстве мы используем свойства тени, полученные в теореме 2.3.4. Пусть функции f и g – непрерывны в точке a. Тогда при $x \approx a$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(a) + \alpha + g(a) + \beta =$$

$$= f(a) + g(a) + (\alpha + \beta) \approx f(a) + g(a).$$

Аналогично для произведения.

Пусть теперь функция f – непрерывна в точке a, а функция g – в точке $f(a)$. Тогда для $x \approx a$ $f(x) \approx f(a)$ в силу непрерывности f. Но, так как g – непрерывна в точке $f(a)$, отсюда следует, что $g(f(x)) \approx g(f(a))$, то есть композиция $g \circ f$ непрерывна в точке a.

Для доказательства второго утверждения предположим, что $g(a) \neq 0$, а функции f и g непрерывны в точке a. Тогда для всех $x \approx a$

$$^\circ\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{^\circ(f(x))}{^\circ(g(x))} = \frac{f(a)}{g(a)}. \ \diamond$$

Доказанная теорема дает пример применения методологии актуальных бесконечно малых к доказательству классических фактов анализа.Здесь и в дальнейшем мы обращаем внимание именно на доказательства, использующие технику бесконечно малых, оставляя традиционные доказательства без внимания, указывая только факты.

Определение 3.1.2.

Функцию f назовем **непрерывной слева** в точке a, если для всех $x \approx a$ таких, что $x < a$ $f(x) \approx f(a)$. Аналогично опрделяется непрерывность **справа**.

Предлагаем читателю проверить, что непрерывность в данной точке равносильна одновременной непрерывности и справа и слева.

Определение 3.1.3.

Функцию f назовем **непрерывной на множестве** $E \subset \mathbb{R}$, если она непрерывна в каждой точке этого множества. Причем непрерывность в граничных точках множества E понимается как односторонняя. Класс функций, непрерывных на множестве E, имеет обозначение $\mathbf{C}(E)$.

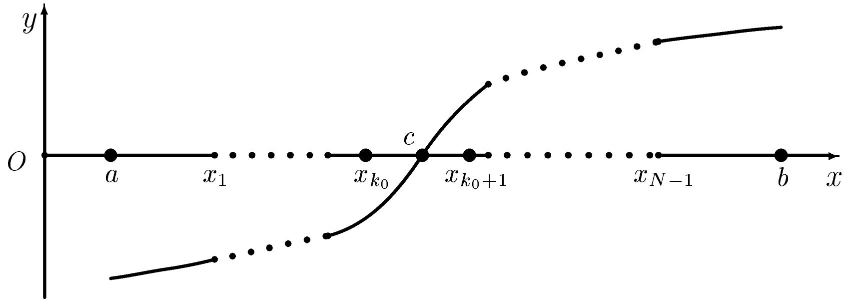

Рис. 3.1. Рисунок к доказательству теоремы Коши

В качестве упражнения предлагаем читателю проверить, что теорема 3.1.1 верна как для односторонней непрерывности, так и для непрерывности на множестве.

Ради полноты изложения мы приведем одну теорему о функциях, непрерывных на отрезке. Доказательство ее демонстрирует методы преподавания анализа на языке актуальных бесконечно малых.

Теорема 3.1.2.

(см. [18, с. 45]). Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, причем на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Тогда в интервале (a, b) найдется точка, в которой функция обращается в нуль.

(Эта теорема известна как теорема Больцано – Коши и обычно комментируется как факт, подтверждающий наши интуитивные представления о непрерывности – непрерывную кривую (график функции) можно нарисовать одним росчерком пера.)

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Интуитивно найти ноль функции тоже нетрудно – следует только взять *первую* точку, в которой функция перестает быть отрицательной (или положительной, в зависимости от знака $f(a)$). Приводимое доказательство (в этом варианте оно принадлежит О. П. Матвеевой) полностью соответствует интуитивному рассуждению. Более того, вышеприведенная идея и есть по сути дела доказательство!

Теперь проведем рассуждения более аккуратно. Для определенности считаем, что $f(a) < 0, f(b) > 0$. Естественно, $f \in \mathbf{C}[a, b]$.

Пусть $N \in \aleph$ (то есть бесконечное натуральное число). Разобьем отрезок $[a, b]$ на N равных частей точками $x_k = a + \frac{b-a}{N}, \ \ k = 1, 2, \dots, N$.

Тогда $f(x_0) < 0$, а так как $f(x_N) > 0$, найдется номер k_0 такой, что $f\left(x_{k_0}\right) \leq 0, \ \ f\left(x_{k_0+1}\right) \geq 0$. Положим $c = \ ^\circ x_{k_0}$ Поскольку N – бесконечно велико, $\frac{b-a}{N} \approx 0$ и, следовательно, $x_{k_0} \approx x_{k_0+1}$. Так как функция f непрерывна в каждой точке отрезка, а $c \in (a, b)$, то f непрерывна в точке c. Таким образом, $\ ^\circ(f(x_{k_0})) = \ ^\circ(f(x_{k_0+1})) = f(c)$.

Так как $f\left(x_{k_0}\right) \leq 0$, $f(c) \leq 0$. Так как $f\left(x_{k_0+1}\right) \geq 0$, $f(c) \geq 0$. Таким образом, $0 \leq f(c) \leq 0$, то есть $f(c) = 0$ (см. рис. 3.1). $\diamond$

Доказательство, приведенное нами, имеет "почти конструктивный" характер. Мы, естественно, не можем реально разбить отрезок на части бесконечно малой длины, но, тем не менее, можем разбить его на отрезки *сколь угодно малой* длины. То есть если нас интересует корень уравнения с точностью до некотрой ошибки err, то, подбирая $N \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\frac{b-a}{N}$ было бы строго меньше указанной ошибки (точности) и разбивая отрезок так, как указано в доказательстве теоремы, мы получим значение корня с точностью до err. В качестве соответствующего приближения можно взять либо x_{k_0}, либо x_{k_0+1}, либо середину отрезка между ними, где x_{k_0} выбирается из условия x_{k_0} – первая точка такая, что $f\left(x_{k_0}\right) \leq 0$, $f\left(x_{k_0+1}\right) \geq 0$. Ясно, что в случае err ≈ 0 мы имеем доказательство нашей теоремы, ибо, как из него видно, разность между соседними точками, удовлетворяющими приведенному условию, как раз и равна err. Очевидно, что указанная идея легко программируется.

Внимательный анализ предложенного в доказательстве алгорифма показывает, что по данной схеме, найдя один корень (кстати, как нетрудно понять, наименьший на данном отрезке), продолжая вычислять знаки функции в точке x_k, мы найдем и все остальные (если они есть) корни уравнения. Более того, этим методом можно решать и уравнение $f(x) = C$, где C – произвольное вещественное число, то есть доказать обобщенный вариант теоремы Больцано – Коши о пересечении графиком непрерывной функции любой прямой $y = C$, в случае, если C лежит между наибольшим и наименьшим значениями функции на данном отрезке.

Само же существование наибольшего и наименьшего значения у функции, непрерывной на отрезке, известное как вторая теорема
К. Вейерштрасса о непрерывных функциях, можно получить, сравнивая значения функции в точках x_k и выбирая из них самое большое и самое маленькое. Тогда, если для всех $k = 1, 2, \ldots, N$ $f\left(x_{k_o}\right) \geq f\left(x_k\right)$, то точка $c = {}^\circ x_{k_0}$ дает наибольшее значение функции. Как и выше, можно добиться того, что это "первая" такая точка. Более того, задавшись некоторой точностью вычислений err, можно построить приближенно наибольшее значение с точностью до err, что снова легко программируется.

Отметим, что при доказательстве теоремы К. Вейерштрасса требуется факт, что в множестве $x_1, x_2, \ldots, x_N$, где N – бесконечное натуральное число, имеется наибольший и наименьший элемент. Это верно для любого *конечного* множества, то есть элементы которого занумерованы отрезком натурального ряда. Нам же нужен этот результат для *гиперконечного* множества – занумерованного отрезком гипернатурального ряда[2].

Теорема 3.1.3.

В гиперконечном множестве имеются наибольший и наименьший элементы.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Применим принцип переноса к "перебору" элементов множества.

[2]Имеется в виду существование *внутренней* биекции, то есть функции, описываемой в терминах специального языка (см. главу 5).

Рассмотрим очевидно верное утверждение о вещественных числах

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\} a_k \leq a_m.$$

Применяя к нему принцип переноса, получим существование наибольшего элемента у множества $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ для любого гипернатурального n. Аналогично в таком множестве есть и наименьший элемент. $\diamond$

§3.2. Дифференциальное исчисление

3.2.1. Дифференциал

Определение 3.2.1.

Отображение $L : \Re \longrightarrow \Re$ назовем **линейным**, если для любых гипервещечственных x и a выполнено $L(ax) = aL(x)$.

Лемма 3.2.1.

Если L – линейное отображение, то для всех $x \in \Re$ имеет место равенство $L(x) = \mathbf{l}x$, где $\mathbf{l} \in \Re$.[3]

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

По определению имеем $L(x) = L(x1) = xL(1) = \mathbf{l}x$, где $\mathbf{l} = L(1)$. $\diamond$

Определение 3.2.2.

Линейное отображение L назовем **дифференциалом**, если соответствующее число $\mathbf{l}$ вещественное.

Следуя Г. Лейбницу, дифференциал будем обозначать буквой D, а соответствующее вещественное число d.

Определение 3.2.3.

Будем обозначать $\mathbf{dx}$ (а также, сообразно с необходимостью, $\mathbf{dy}, \mathbf{dz}, \mathbf{dt}$) **дифференциал независимой переменной**, то есть дифференциал, определенный правилом $\mathbf{dx}(x) = x$ для всех $x \in \Re$.

3.2.2. Эквивалентные функции

Определение 3.2.4.

Будем говорить, что функции f и g **эквивалентны** и писать $f \simeq g$, если для всех бесконечно малых α имеет место $f(\alpha) \sim g(\alpha)$.

Нетрудно понять, что мы определяем просто понятие эквивалентных в нуле функций.

Теорема 3.2.1.

Отношение $\simeq$ является отношением эквивалентности.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Оставляем в качестве упражнения для читателя. $\diamond$

[3] Следовательно, линейное отображение обладает естественным свойством – $L(ax + by) = aL(x) + bL(y)$.

Определение 3.2.5.

Пусть f и g – две вещественные[4] функции. Пусть, далее, точка $a \in \mathbb{R}$ такая, что $O(x) \setminus \{a\} \cap \mathrm{dom} f \neq \emptyset$ (такие точки являются точками прикосновения области определения f). Введем функцию $f_a \ : \ f_a(\alpha) = f(a+\alpha)$ (для бесконечно малых α). Функция g_a вводится аналогично.

Будем говорить, что функции f и g **эквивалентны в точке** a, если функции f_a и g_a эквивалентны. Пишем $f \simeq_a g$.

Легко понять (упражнение), что теорема 3.2.1 справедлива и для случая эквивалентности в точке.

3.2.3. Дифференцируемость функции

Определение 3.2.6.

Пусть $O(a) \subset \mathrm{dom} f$. **Приращением** функции f в точке a, вызванным приращением аргумента Δx, назовем функцию Δf, определенную правилом $\Delta f_a(\Delta x) = f(a+\Delta x) - f(a)$.

Определение 3.2.7.

Функцию f назовем **дифференцируемой** в точке a, если ее приращение, вызванное бесконечно малым Δx, эквивалентно некоторому дифференциалу, то есть существует дифференциал D_a, такой, что $D_a \simeq \Delta f_a$. Дифференциал D_a будем обозначать $\mathbf{df}(a)$. Таким образом, для всех бесконечно малых Δx $\Delta f_a(\Delta x) = \mathbf{df}(a)(\Delta x) + o(\Delta x)$.

Так как $\mathbf{df}(a)(\Delta x) = \mathrm{d}_a \Delta x$, то $\Delta f_a(\Delta x) = \mathrm{d}_a \Delta x + o(\Delta x)$, где $\mathrm{d}_a \in \mathbb{R}$.

Определение 3.2.8.

Число d_a назовем **производной** функции f в точке a и будем обозначать $f'(a)$ или $\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}(a) = \frac{\mathbf{df}(a)}{\mathbf{dx}}$.

Оправданность последнего обозначения обусловлена следующим рассуждением.

Рассмотрим линейную функцию L и ее дифференциал $\mathbf{d}L_a$. Тогда $\Delta L_a(\Delta x) = L(a+\Delta x) - L(a) = \mathbf{l}(a+\Delta x) - \mathbf{l}a = \mathbf{l}\Delta x$. Таким образом, линейная функция совпадает со своим дифференциалом. Поэтому мы можем не различать $\mathbf{dx}$ и умножение на аргумент. Далее имеем

$$\Delta f_a(\Delta x) = \mathbf{df}(a)(\Delta x) + o(\Delta x) =$$

$$= \mathbf{df}(a)\left(\mathbf{dx}\,(a)\right)(\Delta x) + o(\Delta x) =$$

$$= f'(a)\mathbf{dx}(a)\Delta x + o(\Delta x).$$

Таким образом, $\mathbf{df}(a) = f'(a)\mathbf{dx}$ и, следовательно, $f'(a) = \frac{\mathbf{df}(a)}{\mathbf{dx}}$.

При этом, простоты ради, мы можем не различать эквивалентные приращение и дифференциал функции.

Теорема 3.2.2.

$f'(a) = \ ^\circ\left(\frac{\Delta f_a(\Delta x)}{\Delta x}\right)$ *при ненулевых* $\Delta x \approx 0$.

[4] $(\mathrm{dom} f, \mathrm{rng} f, \mathrm{dom} g, \mathrm{rng} g \subset \mathbb{R})$

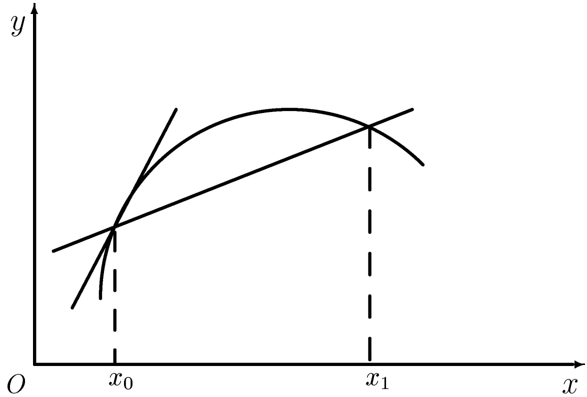

Рис. 3.2. Проведение касательной к кривой

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Пусть Δx – ненулевое бесконечно малое число. Согласно определению, $\mathbf{df}(a)(\Delta x) = f'(a)\Delta x + o(\Delta x)$. Так как $\Delta x \neq 0$, отсюда получаем, что $f'(a) = \frac{\mathbf{df}(\Delta x) - o(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{\mathbf{df}(\Delta x)}{\Delta x} - \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$. Так как по определению последняя дробь бесконечно мала, получаем требуемое. $\diamond$

Пример. Рассмотрим производную функции $f\ :\ f(x) = x^2$. Имеем $\Delta f_x(\Delta x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$. Отсюда $f'(x) = 2x$.

Более вольное рассуждение выглядит следующим образом: $\mathbf{dx}^2 = (x + \mathbf{dx})^2 - x^2 = 2x\mathbf{dx} + \mathbf{dx}^2$. Отсюда $\frac{\mathbf{dx}^2}{\mathbf{dx}} = 2x + \mathbf{dx} \approx 2x$, то есть $f'(x) = 2x$. Причем рассуждение это, согласно вышесказанному, абсолютно законно!

3.2.4. Уравнение касательной

Мы проведем еще раз рассуждение о проведении касательной (см. 1.5), но уже со строго обоснованным существованием актуальных бесконечно малых. Естественно, рассуждения будут почти тождественны (см. рис. 3.2).

Пусть f – некоторая функция и $M_0 =< x_0, f(x_0) >$ – некоторая точка ее графика, причем f дифференцируема в точке x_0. Рассмотрим точку $M =< x_1, f(x_1) >$ графика функции f и проведем прямую, соединяющую эти две точки (секущую). Ее уравнение будет $\frac{y - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$. После элементарных преобразований получим $y = f(x_0) + \Delta f_{x_0}(\Delta x)(x - x_0)$ $(\Delta x = x_1 - x_0)$. Пусть теперь $x_1 \approx x_0$. Тогда, так как функция f дифференцируема,

$$y = f(x_0) + \Delta f_{x_0}(\Delta x)(x - x_0) = f(x_0) + \mathbf{df}(x_0)(\mathbf{dx})(x - x_0) + o(\mathbf{dx}) =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(\mathbf{dx}).$$

Рассмотрим прямую с уравнением $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Пусть $x \approx x_0$, $y = f(x)$. Тогда расстояние от точки $< x, f(x) >$ до точки на прямой $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, вычисленное по перпендикуляру к оси абсцисс, будет равно $f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$. Так как $x \approx x_0$, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(\mathbf{dx})$ и, следовательно, вычисляемое расстояние равно $o(\mathbf{dx}) = o(x - x_0)$, то есть отклонение прямой $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ от графика функции мало по сравнению с отклонением точки от точки x_0. Таким образом, наша прямая "в малом" имеет единственную общую точку с графиком функции и "сколь угодно мало" отклоняется (отходит) от графика функции, то есть является касательной.

3.2.5. Основные теоремы дифференциального исчисления

Для иллюстрации метода приведем доказательства теорем о дифференцируемости результатов арифметических операций над дифференцируемыми функциями, а также теорему о дифференцируемости композиции. Предварительно докажем непрерывность дифференцируемой функции.

Теорема 3.2.3.

Если функция f дифференцируема в точке a, то она непрерывна в этой точке.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Имеем при $x \approx a$

$$f(x) - f(a) = \Delta f_a(x - a) = \mathbf{df}(a)(x - a) + o(x - a) =$$
$$= f'(a)(x - a) + o(x - a) \approx 0. \ \diamond$$

Теорема 3.2.4.

Пусть функции f и g дифференцируемы в точке a. Тогда функции $f + g$, fg – дифференцируемы в точке a.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Мы докажем дифференцируемость произведения. Дифференцируемость суммы доказывается точно так же.

Имеем

$$\Delta(fg)_a(\Delta x) = fg(a + \Delta x) - fg(a) = f(a + \Delta x)g(a + \Delta x) - f(a)g(a) =$$
$$= f(a + \Delta x)g(a + \Delta x) + f(a)g(a + \Delta x) - f(a)g(a + \Delta x) - f(a)g(a) =$$
$$= (f(a + \Delta x) - f(a))\, g(a + \Delta x) + f(a)\,(g(a + \Delta x) - g(a)) =$$

$= \Delta f_a(\Delta x)g(a+\Delta x)+f(a)\Delta g_a(\Delta x)$. Так как $a+\Delta x \approx a$ и функция g, будучи дифференцируемой, непрерывна в точке a, $g(a+\Delta x) = g(a)+o(1)$. В силу дифференцируемости

$$\Delta f_a(\Delta x) = \mathbf{df}(a)(\Delta x) + o(\Delta x),\ \Delta g_a(\Delta x) = \mathbf{dg}(a)(\Delta x) + o(\Delta x).$$

Таким образом,

$$\Delta(fg)_a(\mathbf{dx}) = (\mathbf{df}(a)(\Delta x) + o(\Delta x))\,(g(a) + o(1)) +$$

$$+f(a)\left(\mathbf{dg}(a)(\Delta x)+o(\Delta x)\right)=\mathbf{df}(a)(\Delta x)g(a)+f(a)\mathbf{dg}(a)(\Delta x)+$$
$$+\mathbf{df}(a)(\Delta x)o(1)+o(\Delta x)g(a)+o(\Delta x)o(1)+f(a)o(\Delta x).$$

Покажем, что

$$\mathbf{df}(a)(\Delta x)o(1)+o(\Delta x)g(a)+o(\Delta x)o(1)+f(a)o(\Delta x)=o(\Delta x).$$

Действительно,

$$\mathbf{df}(a)(\Delta x)o(1)+o(\Delta x)g(a)+o(\Delta x)o(1)+f(a)o(\Delta x)=$$
$$=f'(a)\Delta x o(1)+\alpha\Delta x g(a)+\beta\Delta x o(1)+f(a)\gamma\Delta x,$$

где α,β,γ бесконечно малы.

Таким образом,

$$\mathbf{df}(a)(\Delta x)o(1)+o(\Delta x)g(a)+o(\Delta x)o(1)+f(a)o(\Delta x)=$$
$$=\left(f'(a)o(1)+\alpha g(a)+\beta o(1)+f(a)\gamma\right)\Delta x=\varepsilon\Delta x=o(\Delta x),$$

так как очевидно, что $f'(a)o(1)+\alpha g(a)+\beta o(1)+f(a)\gamma\approx 0$.

Таким образом, $\Delta(fg)_a=\left(f'(a)g(a)+f(a)g'(a)\right)\Delta x+o(\Delta x)$, что и означает дифференцируемость произведения. Более того, доказано правило дифференцирования произведения $(fg)'=f'g+fg'$.

Предлагаем читателю доказать теорему о дифференцируемости частного (с известными ограничениями) самостоятельно. $\diamond$

Теорема 3.2.5.

Пусть функция f дифференцируема в точке a, а функция g дифференцируема в точке $f(a)$. Пусть композиция $g\circ f$ определена в некоторой окрестности точки a. Тогда $g\circ f$ дифференцируема в точке a и $(g\circ f)'(x)=g'(f(x))f'(x)$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

В силу дифференцируемости f имеем

$$\Delta f_a(\Delta x)=D(f(a)\Delta x+o(\Delta x)=f'(a)\mathbf{dx}+o(\Delta x).$$

В силу дифференцируемости g

$$\Delta g_{f(a)}(\Delta y)=\mathbf{dg}(f(a))(\Delta y)+O(\Delta y).$$

Имеем $\Delta g\circ f_a(\Delta x)=g(f(a+\Delta x))-g(f(a))$. Так как $f(a+\Delta x)\approx f(a)$, то, положив $\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)$, получим

$$\Delta g\circ f_a(\Delta x)=\Delta g_{f(a)}(\Delta y)+o(\Delta y)=g'(f(a)\left(f(a+\Delta x)-f(a)\right)+o(\Delta y).$$

Или

$$\Delta g\circ f_a(\Delta x)=g'(f(a))\left(\Delta f_a(\Delta x)+o(\Delta x)\right)+o(\Delta y)=$$
$$=g'(f(a))f'(a)\Delta x+g'(f(a))o(\Delta x)+\alpha\Delta y=$$
$$=g'(f(a))f'(a)\Delta x+g'(f(a))\beta\Delta x+\alpha\left(\Delta f_a(\Delta x)\right)=$$
$$=g'(f(a))f'(a)\Delta x+g'(f(a))\beta\Delta x+\alpha\left(f'(a)\Delta x+\gamma\Delta x\right)=$$

$$= g'(f(a))f'(a)\Delta x + g'(f(a))\beta\Delta x + \alpha f'(a)\Delta x + \alpha f'(a)\gamma\Delta x =$$

$= g'(f(a))f'(a)\Delta x + \varepsilon\Delta x$. Отсюда – требуемое. $\diamond$

Замечание о дифференциалах. Теорема 3.2.5 показывает, что $dg \circ f = dg \bullet df$. Тем самым, стандартная форма дифференциала $dy = f'(x)dx$ при замене переменной с помощью равенства $x = \varphi(t)$ приводится простым вычислением $dx = \varphi'(t)dt, dy = f'(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ к виду для замены переменной в неопределенном интеграле.

Мы приведем еще доказательство теоремы П. Ферма о критических точках. Остальная часть "французских" теорем доказывается традиционно, и, тем самым, дальнейшее изложение дифференциального исчисления ничем не отличается от традиционного.

Теорема 3.2.6.

Пусть a – точка экстремума (локального) функции f. Тогда либо f недифференцируема в точке a, либо $f'(a) = 0$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Пусть функция f дифференцируема в точке a, которая, для определенности, является точкой максимума. Предположим, что $\mathbf{dx} \approx 0$ и $\mathbf{dx} > 0$. Тогда $f(a+\mathbf{dx}) - f(a) \leq 0$, следовательно, $\frac{f(a+\mathbf{dx})-f(a)}{\Delta x} \leq 0$. Тем самым $f'(a) = {}^{\circ}\left(\frac{f(a+\mathbf{dx})-f(a)}{\Delta x}\right) \leq 0$.

Аналогично, рассматривая строго отрицательные бесконечно малые $\mathbf{dx}$, получим, что $f'(a) \geq 0$, то есть $f'(a) = 0$. $\diamond$

§3.3. Интеграл

3.3.1. Определение

В этом параграфе мы построим интеграл Римана. Докажем, что всякая непрерывная на отрезке функция интегрируема, и докажем теорему о среднем интегрального исчисления. После этого традиционно можно излагать теорему Барроу о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом, понятие первообразной, формулу Ньютона – Лейбница, а также несобственные интегралы. Мы приведем пример того, как на языке актуальных бесконечно малых можно получить формулу для вычисления длины дуги.

Пусть $[a, b] \subset \mathrm{dom} f$. Возьмем бесконечное натуральное число N и разобьем отрезок $[a, b]$ на N равных частей точками $x_k = a + \frac{b-a}{N}k$. Вычислим сумму

$$\sigma_f(N) = \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = \frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(x_k).$$

Определение 3.3.1.

Если существует вещественное число $\mathbf{I}$ такое, что для всех бесконечных натуральных чисел N $\sigma_f(N) \approx \mathbf{I}$, то функция f называется **интегрируемой** по отрезку $[a, b]$, а число $\mathbf{I}$ называется **интегралом** от функции f по отрезку $[a, b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f$ или, если функция устроена сложно, или следует подчеркнуть переменную, то $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Лемма 3.3.1.

Ореолы двух различных вещественных чисел не пересекаются.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Предлагается читателю. $\diamond$

Лемма 3.3.2.

Если $f \in \mathbf{C}[a,b]$, то для любых $x, y \in\subset \Re$, если $a \leq x, y \leq b$ и $x \approx y$, то $f(x) \approx f(y)$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Если $x \approx y$, то существует (единственное) вещественное число $c \in [a,b]$ такое, что $x, y \in O(c)$. Поэтому $x \approx c$, $y \approx c$ и, следовательно, $f(x) \approx f(c)$, $f(y) \approx f(c)$, по транзитивности отношения бесконечной близости отсюда получается заключение леммы. $\diamond$

Предлагаем читателю убедиться, что доказанная лемма является ни чем иным, как теоремой Г. Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке.

Теорема 3.3.1.

Если функция f интегрируема и ограничена на $[a,b]$ сверху числом M, то $\int\limits_a^b f \leq M(b-a)$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Имеем для всех $x \in [a,b]$ $f(x) \leq M$. Рассмотрим $\sigma = \sigma_f(N) = \frac{b-a}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1} f(x_k)$. Так как f ограничена сверху, каждое слагаемое меньше M. Таким образом, $\sigma \leq \frac{b-a}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1} M = M(b-a)$. $\diamond$

Аналогично доказывается соответствующее неравенство и для ограниченной снизу интегрируемой функции.

Следствие. (Теорема о среднем.) Если для всех $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}$ $m \leq x \leq M$, то $m(b-a) \leq \int\limits_a^b f \leq M(b-a)$. $\diamond$

Теорема 3.3.2.

Если $f \in \mathbf{C}[a,b]$, то функция f интегрируема на этом отрезке.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

То, что все интегральные суммы конечны, следует из второй теоремы К. Вейерштрасса и предыдущего следствия. Нам следует доказать, что все интегральные суммы бесконечно близки друг другу.

Рассмотрим суммы $\frac{b-a}{N}\sum\limits_{j=0}^{N-1} f(x_j)$ и $\frac{b-a}{K}\sum\limits_{j=0}^{K-1} f(t_j)$. Не умаляя общности считаем, что $N \geq K$. В силу того, что N бесконечно велико каждая точка x_j бесконечно близка к некоторой единственной точке t_j. В силу равномерной непрерывности $f(x_j) \approx f(t_j)$. Пусть $|f(x_j) - f(t_j)| = \frac{\alpha_j}{b-a}$, где $\alpha_j \approx 0$ $(j = 0, 1, \ldots K-1)$. Положим $\alpha = \min(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{K-1})$. Тогда

$$|\frac{b-a}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) - \frac{b-a}{K}\sum_{j=0}^{K-1} f(t_j)| \leq \frac{b-a}{K}\sum_{j=0}^{K-1} |f(x_j) - f(t_j)| =$$

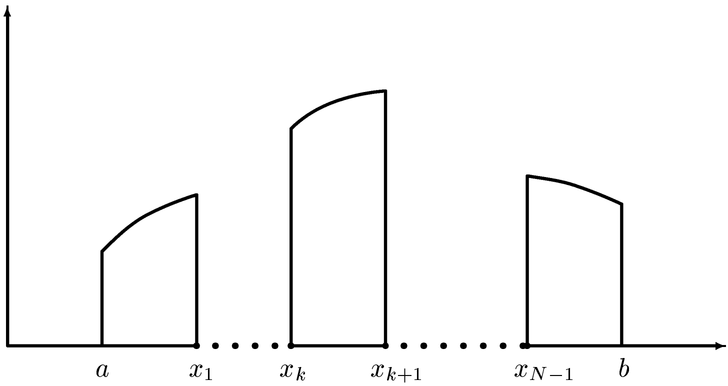

Рис. 3.3. Вычисление площади криволинейной трапеции

$$= \frac{b-a}{K} \sum_{j=0}^{K-1} \frac{\alpha_j}{b-a} \le \frac{b-a}{K} \sum_{j=0}^{K-1} \frac{\alpha}{b-a} = \alpha.$$

Так как, очевидно, $\alpha \approx 0$, получаем, что для любого разбиения отрезка $[a,b]$ на бесконечно много частей соответствующая интегральная сумма бесконечно близка к $\frac{b-a}{K} \sum\limits_{j=0}^{K-1} f(t_j)$. Иными словами, $\int\limits_a^b f =^\circ \left(\frac{b-a}{K} \sum\limits_{j=0}^{K-1} f(t_j) \right)$. $\diamond$

Доказанная теорема дает нам и геометрический смысл интеграла с одной стороны, а с другой понимание площади как "суммы длин" всех вертикальных отрезков (см. рис. 3.3).

3.3.2. Основные свойства

Теорема 3.3.3.

Пусть функции f и g интегрируемы на отрезке $[a,b]$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогда

1. $\int\limits_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int\limits_a^b f + \mu \int\limits_a^b g$;
2. *если для всех вещественных* $x \in [a,b]$ $f(x) \le g(x)$,

   то $\int\limits_a^b f \le \int\limits_a^b g$;

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

1. Вычислим интегральную сумму $\sigma_{\lambda f + \mu g}(N)$. Имеем для бесконечного натурального N $(\lambda f + \mu g)(x_k) = \lambda f(x_k) + \mu g(x_k)$. Поэтому $\sigma_{\lambda f+\mu g}(N) = \lambda \sigma_f(N) + \mu \sigma_g(N)$. В силу того, что функции f и g интегрируемы, $\sigma_f(N) \approx \int\limits_a^b f$ и $\sigma_g(N) \approx$

$\int\limits_a^b g$. Отсюда по свойству тени получаем требуемое.

2. Доказывается аналогично теореме о среднем.
3. Доказывается точно так же, как и в традиционном изложении. Поэтому доказательство предоставляется читателю. $\diamond$

Теорема 3.3.4.

Пусть функция f интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$. Тогда f интегрируема на $[a,b]$ и $\int\limits_a^b = \int\limits_a^c + \int\limits_c^d$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Проводится традиционно и поэтому опускается. $\diamond$

Замечание. Как сообщил автору А. Н. Подкорытов интегрируемость на всем отрезке $[a,b]$ в общем случае не влечет интегрируемости на подсегментах $[a,c]$ и $[c,d]$. Однако, это свойство сохраняется для непрерывных функций.

Точно так же и справедливость оценки $\left|\int\limits_a^b f\right| \leq \int\limits_a^b |f|$ предполагает (при отсутствии непрерывности) интегрируемость как самой функции, так и ее абсолютной величины.

3.3.3. Длина дуги кривой

Под *кривой на* плоскости будем понимать функцию $r : T \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Для каждого $t \in T$ имеем, следовательно, $r(t) = x(t)i + y(t)j$ – разложение радиус-вектора точки кривой по декартову базису. Непрерывной кривой назовем кривую, для которой функции x и y являются непрерывными. Кривую считаем гладкой, если функции x и y в каждой точке имеют производные, причем $x'^2 + y'^2 > 0$[5].

Примем по определению $r'(t) = x'(t)i + y'(t)j$. Можно доказать,что при $\mathbf{dt} \approx 0$ имеет место равенство $\Delta r = r(t+\mathbf{dt}) - r(t) = r'(t)\mathbf{dt} + o(\mathbf{dt})$, где $|o(\mathbf{dt})| = \alpha\mathbf{dt}$ для некоторого бесконечно малого α.

Предположим, что вектор-функция r задает кривую на плоскости.

Определение 3.3.2.

Впишем в дугу AB ломаную с бесконечным числом звеньев N и обозначим ее периметр L_N. Если для всех $N \in \aleph$ будет $L_N \approx \mathrm{L} \in \mathbb{R}$, то дугу назовем **спрямляемой**, а число L – ее **длиной**.

Вычислим длину дуги гладкой кривой от точки $r(t^1)$ до точки $r(t^2)$ (см. рис. 3.4).

Разобьем дугу AB на части $A = A_0, A_1, \ldots, A_N = B$, где N – бесконечное натуральное число. Это разбиение, очевидно, получается разбиением отрезка t^1, t^2 на части точками $t_k = t^1 + \frac{t^2-t^1}{N}k, k = 0,1,2,\ldots,N$. Длина получившейся ломаной будет, как нетрудно доказать, отличаться от длины дуги AB на бесконечно малое число. Таким образом,

$$\mathrm{L} = \,^\circ\!\left(\frac{t^1-t^2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|r(t_{k+1}) - r(t_k)|\right) = \,^\circ\!\left(\frac{t^2-t^1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|\Delta r(t_k)|\right) =$$

[5] Иногда накладывается ограничение неравенства производных нулю.

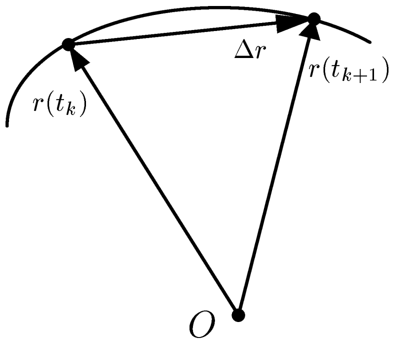

Рис. 3.4. К вычислению длины кривой

$$= {}^\circ\Big(\frac{t^2 - t^1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |r'(t_k) + o(1/N)|\Big) = {}^\circ\Big(\frac{t^2 - t^1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |r'(t_k)|\Big) = \int_{t^1}^{t^2} |r'|.$$

3.3.4. Несобственные интегралы

Пусть функция f задана на луче $[c, +\infty) \subset \mathbb{R}$.

Определение 3.3.3.

Если для каждого вещественного $b \geq c$ существует интеграл $\int_c^b f = F(b)$, то положим $\int_c^{+\infty} f = {}^\circ F(b)$ для бесконечно больших b. Если это вещественное число, то говорим, что **несобственный интеграл сходится**.

Аналогично определяется и $\int_{-\infty}^{c} f$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f$.

Определение 3.3.4.

Для функции f, заданной и возможно не ограниченной в окрестности точки b, определим **несобственный интеграл** $\int_c^b f = {}^\circ F(b')$ для $b' \approx b, b' < b$.

Ниже мы увидим, что несобственный интеграл – это не что иное, как *последнее значение* первообразной.

3.3.5. Неопределенный интеграл

Мы приведем лишь схему дальнейшего изложения материала, ибо оно ничем не отличается от традиционного даже в доказательствах, разве лишь при доказательстве дифференцируемости интеграла с переменным пределом, после чего вводится понятие первообразной и доказывается формула Ньютона – Лейбница. Свойства неопределенного интеграла и методы интегрирования излагаются традиционно и поэтому соответствующие теоремы опускаются. Докажем теорему Барроу. До этого, естественно, следовало бы доказать теорему об интегральном среднем для непрерывной функции, но ее доказательство сразу получается из теоремы о среднем, приведеной нами, и теоремы Больцано – Коши о непрерывных функциях.

Теорема 3.3.5.

Пусть $f \in \mathbf{C}[a,b]$ и $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}$. Тогда функция Φ, определенная правилом $\Phi(x) = \int\limits_a^x f$, дифференцируема в точке x, и ее производная равна значению подынтегральной функции в точке дифференцирования, то есть для любого $x \in [a,b]$ $\Phi'(x) = f(x)$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Имеем $\Delta_\Phi(\Delta x) = \int\limits_a^x f - \int\limits_a^{x+\Delta x} f = \int\limits_x^{x+\Delta x} f = f(c+\theta\Delta x)\Delta x \approx f(c)\Delta x.$

Из этих вычислений тривиально следует требуемое. $\diamond$

Таким образом, доказано, что у непрерывной функции существует **неопределенный интеграл**, имеющий вид $\int f(x)dx = C + \int\limits_a^x$ f.

§3.4. Теория пределов

3.4.1. Предел функции

Очень часто студенты на вопрос, что такое предел функции в точке, отвечают: "Это последнее значение в этой точке". Лучше, конечно, *крайнее*. Полностью в соответствии с этим и нашей интуицией введем соответствующее понятие. Мы считаем точку a обладающей свойством $O(a) \setminus \{a\} \subset \mathrm{dom} f$.

Определение 3.4.1.

Пределом слева, или **левым предельным (крайним) значением функции**, в точке a будем называть число, если оно существует, $^\circ f(x)$ при (всех) $x < a$, $x \approx a$. Обозначение: $f(a-) = \lim\limits_{x\to a-} f(x)$.

Все теоремы о пределах автоматически следуют из свойств тени, например, если существуют пределы слева у функций f и g в точке a, то $(f+g)(x) = f(x)+g(x) \approx f(a-)+g(a-)$, то есть существует $\lim\limits_{x\to a-}(f+g)(x)$, равный сумме соответствующих пределов.

Аналогично следует понимать и *правосторонний* предел, а также *предел* функции в точке, который, естественно, будет равен общему значению левого и правого предела в данной точке. Детали предоставляются читателю.

Теорема 3.4.1.

Функция f непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда она определена в этой точке и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Согласно определению непрерывности, если $x \approx a$, то $f(x) \approx f(a)$. Тем самым для всех x бесконечно близких к a значения функции (и справа и слева) бесконечно близки к $f(a)$, что и означает, что $f(a)$ – предел функции в точке a.

Обратно, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, то по определению предела для всех $x \approx a$ $f(x) \approx f(a)$, то есть f непрерывна в этой точке. $\diamond$

Теорема 3.4.2.

Пусть $f(a-) = A$, $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$. *Тогда существует* $\lim\limits_{x\to a-} g\circ f(x) = B$, *если, естественно, композиция определена.*

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

При $x < a$, $x \approx a$ имеем $f(x) \approx A$. Тогда $g(f(x)) \approx B$ по определению предела g в точке A. $\diamond$

Определение 3.4.2.

Функцию f назовем **бесконечно большой в точке a слева**, если для всех $x < a$, $x \approx a$ $f(x)$ – бесконечно большое число. При этом, естественно, уместно различать бесконечно большие положительные и бесконечно большие отрицательные функции.

Нетрудно понять, что если f – бесконечно большая в точке a, то при бесконечно малом (отрицательном) приращении аргумента, так как значения функции бесконечно велики, график функции "сколь угодно близко подходит" к прямой $x = a$, то есть данная прямая является *вертикальной асимптотой* (левой).

Очевидным образом сказанное переносится и на правый случай.

Таким образом, понятие предела описывает не что иное, как "поведение функции вблизи данной точки", то есть дает с точностью до бесконечно малых значение функции в бесконечно близких точках. Точнее, имеет место

Теорема 3.4.3.

Если $f(a-) = A$, *то для всех* $x \approx a$, $x < a$ *имеет место равенство* $f(x) = A + \alpha(x)$, *где* $\alpha(x) \approx 0$ *для всех таких гипервещественных чисел.*

Иными словами, $f(x) = A + o(1)$ *для* $x \approx a$, $x < a$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О очевидно. $\diamond$

Следующие понятия предполагают, что для некоторого $c \in \mathbb{R}$
$(c, +\infty) \subset \mathrm{dom} f$.

Определение 3.4.3.

Правым последним значением функции, или **пределом функции на** $+\infty$, или **значением функции на** $+\infty$, называется число (если существует) $f(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =^{\circ} (f(x))$ при $x \approx +\infty$.

Определение 3.4.4.

Функция f называется **бесконечно большой** на $+\infty$, если для всех $x \approx +\infty$ $f(x) \approx +\infty$.

Аналогично вводится пронятие предела на $-\infty$.

Как известно, понятие предела на бесконечности тесно связано с понятием *наклонных асимптот* графика функции (левой и правой).

Определение 3.4.5.

Прямая $y = kx+b$ называется **правой наклонной асимптотой** графика функции f, если расстояние между точками графика и точками прямой бесконечно мало при бесконечно больших значениях аргумента, то есть при $x \approx +\infty$ $f(x) - (kx + b) \approx 0$.

Теорема 3.4.4.

Прямая $y = kx + b$ является правой наклонной асимптотой графика функции f тогда и только тогда, когда

$k = {}^{\circ}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$, $b = {}^{\circ}(f(x) - kx)$ *при* $x \approx +\infty$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Если прямая $y = kx + b$ – асимптота, то по определению $f(x) - (kx + b) = \alpha(x) \approx 0$ при $x \approx +\infty$. Таким образом,

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}.$$

Так как x бесконечно велико, последние два слагаемых бесконечно малы ($k, b \in \mathbb{R}$), то есть $\frac{f(x)}{x} \approx k$.

Отсюда, учитывая, что $f(x) - (kx + b) = \alpha(x) \approx 0$, получаем $b = f(x) - kx - \alpha(x) \approx f(x) - kx$.

Обратно, $f(x) - (kx + b) = (f(x) - kx) - b \approx b - b = 0$. $\diamond$

Приведем теорему, связывающую понятие предела с производной.

Теорема 3.4.5.

Функция f дифференцируема в точке a тогда и только тогда, когда существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_a(\Delta x)}{\Delta x} = f'(x)$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

То, что производная может быть вычислена по приведенной формуле, следует из теоремы 3.2.2 и определения предела.

Докажем, что если предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_a(\Delta x)}{\Delta x} = A \in \mathbb{R}$ существует, то функция дифференцируема и этот предел есть производная в точке a.

Действительно, по теореме 3.4.3, $\frac{\Delta f_a(\Delta x)}{\Delta x} = A + o(1)$. Тогда $\Delta f_a(\Delta x) = A\Delta x + o(1)\Delta x \simeq A\Delta x$, что и означает, согласно определению, дифференцируемость функции f в точке a и равенство $A = f'(a)$. $\diamond$

Точно так же доказывается

Теорема 3.4.6.

Функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда существует $\lim\limits_{N \to +\infty} \sigma_f(N) = \int\limits_a^b f$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О предоставляется читателю. $\diamond$

Теорема 3.4.7.

$\int\limits_a^{+\infty} f = \lim\limits_{x \to +\infty} \int\limits_a^x f$. Аналогичные утверждения для несобственных интегралов другого вида и типа предоставляются читателю.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Положим $F\ :\ F(x) = \int\limits_a^x f$. По определению $\int\limits_a^{+\infty} = {}^{\circ}F(x)$ при $x \approx +\infty$. С другой стороны, по определению предела $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = {}^{\circ}F(x)$ при $x \approx +\infty$. Таким образом, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \int\limits_a^{+\infty} f$. $\diamond$

3.4.2. Последовательности и ряды

Определение 3.4.6.

Число $a \in \mathbb{R}$ называется **пределом** последовательности $\{x_n\}$ и обозначается $a = \lim x_n$, если для всех бесконечных натуральных чисел $N \quad x_N \approx a$.

Иными словами, предел – это с точностью до бесконечно малых член последовательности с бесконечным номером. Более подробно $\lim x_n = {}^\circ(x_N)$ при $N \in \aleph$ или, как легко видеть, $x_N = \lim x_n + o(1)$ для всех $N \in \aleph$. Предлагаем читателю доказать последнее утверждение.

Определение 3.4.7.

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если для всех бесконечных номеров $x_N \approx +\infty$.

Учитывая, что предел последовательности – это тень члена с бесконечным номером, легко выводятся все теоремы о пределах последовательности.

Теорема 3.4.8.

$a = \lim\limits_{x \to a-} f(x) = A$ *тогда и только тогда, когда для всякой последовательности* $\{x_n\} \subset \mathrm{dom} f \quad x_n < a$ *из* $x_n \to a$ *следует, что* $f(x_n) \to A$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Необходимость следует сразу из того, что при $N \in \aleph \quad x_N \approx a$ и, по определению предела функции, отсюда следует, что $f(x_N) \approx A$, то есть $f(x_n) \to A$.

Для доказательства достаточности предположим, что при некотором $x \approx a, \quad x < a \quad f(x)$ не бесконечно близко к A. Тогда, если $x_N \approx a \approx x$ $(x_N < a)$, то, так как $x_n \to a$, $f(x_N) \approx A$, но неверно, что $f(x_n) \approx f(x)$, ибо в противном случае $f(x) \approx A$.

С другой стороны, $f(x_N) - A = f(x_N) - f(x) + f(x) - A$ не может быть бесконечно малым по предположению. Полученное противоречие и дает достаточность. $\diamond$

Аналогичное утверждение (внимательный читатель узнал, естественно, теорему об эквивалентности определений предела функции по О. Коши и по Х. Хайне) верно и для случая предела на бесконечности, а также для бесконечных предельных значений.

Определение 3.4.8.

Числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ назовем **сходящимся**, если для всех бесконечных натуральных $N \quad \sum\limits_{k=0}^{N} x_k \approx \mathrm{S} \in \mathbb{R}$.

Таким образом, **сумма** сходящегося ряда – это тень гиперконечной суммы при любом бесконечном количестве членов.

Теорема 3.4.9.

Ряд сходится тогда и только тогда, когда существует (конечный) предел последовательности его частичных сумм.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Если $\sum\limits_{k=0}^{N} x_k \approx S$ для всех $N \in \aleph$, то для последовательности $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k \quad (n \in \mathbb{N})$ это означает существование предела, равного S.

Обратно, если $\lim S_n = S$, то для всех бесконечных номеров $S_N \approx S$, то есть $\sum\limits_{k=0}^{N} x_k \approx S$, что и дает сходимость ряда. $\diamond$

Теорема 3.4.10.

Общий член сходящегося ряда с бесконечным номером бесконечно мал. (Необходимый признак сходимости ряда.)

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Пусть ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится. Тогда для всех бесконечных натуральных чисел N $S_N \approx S_{N-1} \approx S$. Тогда $a_N = S_{N+1} - S_N \approx 0$.

Таким образом, общий член с бесконечным номером сходящегося ряда бесконечно мал. $\diamond$

Мы приведем необходимый и достаточный признак сходимости положительных рядов, а также формулируемый на языке частичных сумм и интегральный признак О. Коши.

Предварительно приведем важный пример.

Пример. Рассмотрим геометрическую прогрессию q^n. Имеем $S_N = \sum\limits_{k=0}^{N} q^k = \frac{1-q^N}{1-q}$ для $N \in \aleph$.

Покажем, что при $|q| > 1$ $q^N \approx +\infty$. Действительно, как легко понять, $|q^N| > N$. Но тогда при $|q| < 1$ $q^N \approx 0$. Таким образом, при $0 < |q| < 1$ сумма $S_N \approx \frac{1}{1-q}$, то есть ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ сходится и его сумма равна $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

Теорема 3.4.11.

Положительный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Необходимость очевидна, ибо легко проверить, что сходящаяся последовательность ограничена.

Докажем достаточность. Пусть для всех $n \in \mathbb{N}$ $S_N \leq M \in \mathbb{R}$. Тогда это неравенство выполнено и для бесконечных N. Пусть $L, N \in \aleph$ и $L \geq N$. Тогда очевидно, что $S_L \geq S_N$. Очевидно, что обе частичные суммы конечны. Возьмем вещественное строго положительное число ε и положим $E = \sup\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$. Тогда найдется номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $S_{n_0} > E - \varepsilon$.

Докажем, что $S_L \approx S_N$. Предположим противное и, положив $\varepsilon = {}^\circ S_L - {}^\circ S_N$, найдем $n \in \mathbb{N}$ так, что $S_N > E - \varepsilon$. Но тогда ясно, что $S_n > S_N$, что противоречит тому, что $N > n$. Таким образом, для всех $N, L \in {}^\infty\mathbb{N}$ $S_L \approx S_N$. Теперь, положив $S = {}^\circ S_N$ при $N \in {}^\infty\mathbb{N}$, получим сумму ряда. $\diamond$

Ниже (см. с. 87) мы приведем факт, который позволяет не привлекать в этом рассуждении понятие точной грани.

Теорема 3.4.12.

(Признак сравнения положительных рядов). Пусть два положительных ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k$ удовлетворяют неравенству $x_k \leq y_k$ для всех $k \geq k_0$. Тогда, если

второй ряд сходится, то и сходится первый, и наоборот, из расходимости ряда первого следует расходимость второго.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О проводится традиционно и поэтому опускается. $\diamond$

Далее традиционным способом можно изложить обычные факты теории рядов.

Теорема 3.4.13.

Рассмотрим положительную убывающую функцию f, заданную на луче $[1, +\infty)$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ и интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f$ "ведут себя одинаково", то есть сходятся и расходятся одновременно.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Пусть $x \geq 1,\ \ k = [x] + 1$. В силу убывания функции

$$f(k) \leq f(x) \leq f(k-1) \ \ (k = 2, 3, \ldots, N \in \mathbb{N}).$$

Обозначим $F\ :\ F(x) = \int\limits_{1}^{x} f$. Тогда, так как для натуральных k $\int\limits_{k-1}^{k} f = F(k) - F(k-1)$, для всех $k = 2, 3, \ldots, N$ имеем

$$f(k) \leq F(k) - F(k-1) \leq f(k-1).$$

Суммируя эти неравенства, получим

$$\sum_{k=2}^{N} f(k) \leq F(N) \leq \sum_{k=1}^{N-1} f(k).$$

Обозначая через S_N N-ю частичную сумму, получим

$$S_N - f(1) \leq F(N) \leq S_{N-1}.$$

Если ряд сходится, то для всех $N \in \aleph$ $S_N \approx S_{N-1} \approx S$ и, следовательно, $F(N) \approx S$. Отсюда легко вывести сходимость интеграла.

Обратно, если сходится интеграл, то из полученного неравенства имеем $S_N \leq f(1) + F(N)$, откуда легко получается ограниченность частичных сумм ряда. $\diamond$

§3.5. Традиционный подход

В этом параграфе мы докажем, что наш подход к основам анализа, основанный на понятии актуального бесконечно малого количества, эквивалентен канонизированному в настоящее время подходу, основанному на понятии предела, точнее, на подходе, при котором бесконечно малое понимается как переменое количество, "стремящееся к нулю", то есть как потенциально бесконечно малое количество.

В первых параграфах этой главы мы ввели понятие непрерывности и дифференцируемости, а в параграфе 3.4.1 указанные понятия сведены к понятию предела функции (теоремы 3.4.1, 3.4.5). Теорема 3.4.6 сводит к этому понятию понятие интеграла. Согласно же теореме 3.4.8, понятие предела функции сведено к понятию предела последовательности.

В этом параграфе мы докажем равносильность нашего определения предела последовательности 3.4.6 каноническому ($\varepsilon - N$)-определению.

Теорема 3.5.1.

Последовательность $\{x_n\}$ сходится к пределу a по определению 3.4.6 тогда и только тогда, когда для любого (вещественного) $\varepsilon > 0$ существует натуральное число (номер) n_0 такое, что для всех $n \geq n_0$ $|x_n - a| < \varepsilon$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Необходимость. Пусть $x_n \longrightarrow a$ и вещественное число $\varepsilon > 0$. Пусть, далее, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ такое число, что $\varepsilon > \frac{1}{k}$.

По определению сходимости для всех бесконечно больших натуральных N $x_N \approx a$, то есть $|x_N - a| < \frac{1}{k} < \varepsilon$. Если теперь $N_1 > N$, то и подавно $|x_{N_1} - a| < \varepsilon$. Таким образом, существует такое гипернатуральное число N, что при $N_1 \geq N$ $|x_{N_1} - a| < \varepsilon$. Согласно принципу переноса это утверждение верно и для натуральных чисел, то есть существует натуральное число n_0 такое, что при $n \geq n_0$ $|x_n - a| < \varepsilon$.

В силу произвольности ε необходимость доказана.

Достаточность. Пусть последовательность $\{x_n\}$ "канонически" сходится к a и пусть $N \in \aleph$. Тогда, если $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, то найдется номер n_0 такой, что при $n \geq n_0$ $|x_n - a| < \frac{1}{k}$. Но так как $N > n_0$ $|x_N - a| < \varepsilon$, то есть $x_N \approx a$, что и означает, в силу произвольности N, что последовательность сходится и в смысле определения 3.4.6. $\diamond$

Замечание. То, что приведенные нами определения эквивалентны каноническим, доказывается независимо от понятия предела последовательности в [6].

§3.6. Методические замечания

По нашему мнению, актуальные бесконечно малые естественны и интуитивно понятны. Допустив существование бесконечно малых, автоматически доказываем существование бесконечно больших чисел. При этом студенту сообщается лишь факт существования в виде аксиомы расширения и принципа Лейбница. Совершенно не обязательно студенту знать неконструктивность и неединственность такого расширения. Итак, поле гипервещественных чисел следует вводить *аксиоматически*, перечислив все основные свойства чисел, операций над ними, отношений между числами. При этом автоматически повторяются все свойства вещественных чисел. Затем вводится аксиома расширения и принцип Лейбница.

Далее можно идти двумя путями в зависимости от качества математической подготовки слушателей и желаемых целей. Для нематематиков уместно просто ввести как аксиому (или теорему, но недоказываемую в курсе) факт существования тени и доказать ее свойства. Предварительно следует, естественно, ввести понятия конечного и бесконечно большого числа, доказать свойства бесконечно малых (сумма, произведение бесконечно малого и конечного и т.п.).

По мнению автора основную трудность здесь представляет мотивировка введения бесконечно малых в рассмотрение, а также убеждение студентов в их существовании.

В своей практике автор использует для этого несколько приемов, которые взаимно дополняют друг друга и иллюстрируют "происхождение" бесконечно малых и их необходимость в жизни вообще и в математике в частности с разных (почти независимых) точек зрения.

Во-первых, начинаем с того, что по сравнению с расстоянием от Земли до Солнца путь, проделываемый лектором вдоль доски (в один конец), ничтожно мал. С другой стороны, по сравнению с этим путем размеры атома также ничтожно малы.

После этого сравниваем размеры атома с расстоянием от Земли до Солнца. Можно, естественно, рассмотреть и еще какие-либо промежуточные величины. То есть "доводим до абсурда" сформулированную мысль. Результатом "доведения до абсурда" понятия ничтожно малых по сравнению с другими количеств и будет понятие бесконечно малого числа. Ясно, что таким же путем можно ввести и понятие бесконечно большого числа. То есть бесконечно малое число (количество) – это число, которое мало по сравнению с любым наперед заданным (строго положительным) числом. Аналогично бесконечно большое число – это число, большее любого наперед заданного (положительного). Здесь мы апеллируем к интуиции и желанию заполнить пробел – должно существовать количество, которое есть результат "доведения до абсурда"!

Второй момент связан с упомянутой интерпретацией единства и противоположности непрерывного и дискретного строения прямой как луча света. Обычно это тоже принимается интуицией, ибо "всем известно, что свет – это поток фотонов, проявляющий волновые свойства", а между фотонами есть "дыры", которые уместно заполнить. И если фотон – это вещественное число, то между двумя фотонами находятся числа, бесконечно близкие к одному, но не к другому. В этом случае можно использовать и понятие геометрической и физической прямой как множества точек. При этом физическая прямая состоит из отдельно расположенных точек – кусочков мела, графита и т.д. В этом случае очень хорошо помогает пример с гирляндой лампочек, который затем используется и для иллюстрации понятия тени.

Таким образом, существование бесконечно малых и бесконечно больших чисел интуитивно обосновано, но на геометрической прямой, к которой все "привыкли", их не найти. На помощь приходят упомянутый выше инфинитезимальный микроскоп и телескоп, позволяющий заглянуть за горизонт.

На рисунке 3.5 изображена плоскость горизонта, ограниченная бесконечно удаленной (недостижимой) окружностью (линией горизонта). Любая хорда этой окружности является моделью геометрической прямой, но, считая плоскость окружности касательной к поверхности Земного шара в точке наблюдения, мы приходим к выводу, что за линией горизонта есть еще точки прямой линии. Они не видимы, но поскольку лежат, например, правее, чем все положительные числа (точнее, точки, их изображающие), то эти точки изображают числа, строго большие, нежели любое строго положительное число. Их-то и можно увидеть в телескоп Г. Кейслера.

Таким образом, мы нашли место (реальное!) для бесконечно больших чисел. Поскольку мы предполагаем, что расширенное множество вещественных чисел является полем, то мы вынуждены признать, что "вблизи" нуля есть точки, которые тоже

Рис. 3.5. Плоскость горизонта

недоступны нашему взору, но тем не менее реально существуют, ибо изображают бесконечно малые числа. Для того, чтобы их разглядеть, требуется инфинитезимальный микроскоп. Ясно теперь, где искать ореолы вещественных чисел.

Отметим еще один важный момент. Как известно, вещественные числа на практике появляются в результате измерений (наблюдений). Каждое конкретное измерение имеет определенную погрешность. Поэтому, когда мы говорим, что значение наблюдаемой величины равно A, то предполагаем, что возникающая погрешность измерения мала, настолько мала, что ею можно пренебречь. Если быть абсолютно точным, мы должны говорить: "Значение наблюдаемой величины равно $A + \delta_A$, где δ_A – погрешность измерения. Поэтому при работе с конкретными измеренными (измеряемыми) величинами мы имеем дело не с вещественными числами как математическими объектами, а с числами "размазанными" по некоторому множеству (интервалу), или с *интервальными* числами. Таким образом, для корректной работы со многими измеряемыми величинами мы должны предполагать, что погрешности измерений для них достаточно малы, чтобы ими пренебречь. Иными словами, в качестве значения нашей наблюдаемой величины мы берем интервал $(A - \Delta, A + \Delta)$, где Δ – "глобальная" погрешность (для всех измерений), при этом, если в вычислениях появляются "малые более высокого порядка", их отбрасывают, а в окончательном результате отбрасывают и члены, содержащие Δ.

Если теперь считать такие погрешности бесконечно малыми, то возникает хороший фрагмент теории конечных чисел. Например, при измерении расстояний между объектами на поверхности Земли свободно можно пренебрегать отрезками длиной в милиметр, то есть 10^{-6} километра. Ясно, что расстояние между городами, измеренное в километрах, определяется в этом случае "глобальной" погрешностью вида $\frac{const}{10^{-6}}$. Нетрудно понять, что числа меньшие чисел такого вида ведут себя как бесконечно малые, а опрерация взятия тени соответствует отбрасыванию погрешности в окончательном результате.

Однако, если измеряемые расстояния малы, например длины сторон оконных стекол, то ошибка в 1 милиметр уже покажется большой. Точно так же величина, обратная выбранной "глобальной" погрешности – 1 миллион километров – в масштабах

Земли может считаться бесконечно большой (это больше диаметра орбиты Луны), но в рамках Солнечной системы составляет лишь малую часть расстояния от Земли до Солнца.

Таким образом, мы приходим к необходимости вводить в рассмотрение все более и более мелкие "бесконечно малые". Если мы хотим иметь "глобальную" погрешность "на все случаи жизни", мы должны признать актуальное существование бесконечно малых чисел.

Далее изложение может следовать в любом порядке, например, в том, который предложен в настоящей главе с той или иной степенью подробности и количеством материала. Отчасти можно следовать учебному пособию [18].

Что касается изложения математикам или слушателям, имеющим достаточно высокую математическую подготовку, то им существование тени и ее свойства можно (и, по-видимому, нужно) доказать, не прибегая, однако, к теории интегрирования. О том, как это сделать и на некоторых более глубоких вопросах методики преподавания для студентов "математизированных" специальностей, а также студентам-математикам педагогического направления, мы расскажем в следующей главе. Читателю же, прежде, чем читать дальше, мы рекомендуем еще раз, уже с позиций актуального существования бесконечно малых и бесконечно больших, прочитать примеры из 1.5.

§3.7. Функции многих переменных

Сделаем несколько замечаний о функциях многих переменных. Поскольку все основные понятия – предел, непрерывность, дифференцируемость и интеграл – формулируются точно так же, как и для функций с одномерной областью определения, мы лишь обзорно остановимся на основных понятиях. Самым важным понятием при нашей методике изложения, на основе которого строятся все дальнейшие, является понятие бесконечной близости.

Пусть s – натуральное число. Рассмотрим s-мерное арифметическое пространство $\Re^s$ с (декартовым) базисом, состоящим из элементов – s-векторов – $i^1, i^2, \ldots, i^s$, где $i^k =< 0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0 >$ (единица на k-м месте).

Определение 3.7.1.

Длиной s-вектора x называется число

$|x| = \left(\sum\limits_{k=0}^{s} {x_k}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, где x_k – k-я координата вектора x.

Определение 3.7.2.

Вектор назовем **конечным**, если его длина является конечным числом, и **бесконечно малым**, если длина его бесконечно мала.

Можно доказать, что вектор конечен (бесконечно мал), если все его компоненты конечны (бесконечно малы).

Определение 3.7.3.

Два вектора $x, y \in \Re^s$ назовем **бесконечно близкими**, если $|x - y| \approx 0$, то есть если расстояние между ними бесконечно мало.

Определение 3.7.4.

Будем говорить, что вектор x **мал по сравнению с вектором** y, если $|x| = o(|y|)$.

Определение 3.7.5.

Тенью вектора x назовем s-вектор

$$^\circ x =< {}^\circ x_1, {}^\circ x_2, \ldots, {}^\circ x_s > .$$

Предлагаем читателю в качестве упражнения доказать свойства введенной операции, аналогичные свойствам предела последовательности s-векторов.

Определение 3.7.6.

Функцию $f \; : \; E \subset \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$ назовем **непрерывной** в точке $c \in E$, если $\forall\, x\, (x \approx c\;\, f(x) \approx f(c))$.

Предлагаем читателю дать определения предела функции многих переменных и доказать основные теоремы о пределах и непрерывных функциях самостоятельно.

Определение 3.7.7.

Функцию $f \; : \; E \subset \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$ назовем **дифференцируемой** в точке c, если для всех бесконечно малых Δx выполнено $f\,(c + \Delta x) \;=\; f(x) + L\,(\Delta x) + o\,(\Delta x)$, где L – линейное отображение из $\Re^s$ в $\Re$.

Можно доказать (упражнение), что отображение L действует по правилу $L(x) = (l, x)$, где $l \in \Re^s$. (Через (x, l) обозначено, как обычно, скалярное произведение.)

Определение 3.7.8.

Вектор $^\circ l$ назовем **градиентом** функции f.

Можно доказать, что его компоненты являются частными производными.

Предлагаем читателю самостоятельно разобраться с многомерным интегрированием.

Глава 4.

Числовые системы

В этой главе мы сначала приведем доказательство существования тени для конечных гипервещественых чисел, опирающееся только на свойства вещественных чисел (и существования бесконечно малых, естественно). Затем мы предложим некоторый способ построения числовых систем до *гиперкомплексных* чисел включительно, причем вещественные числа мы построим, исходя из существования расширенного множества натуральных чисел – множества ${}^{\infty}\mathbb{N}$. Таким образом, для обоснования существования актуальных бесконечно малых достаточно потребовать существования расширения для моноида натуральных чисел, удовлетворяющего всем аксиомам Пеано, но допускающего в то же время бесконечные (натуральные) числа – актуальные бесконечно большие числа[1].

§4.1. Существование тени

В этом параграфе мы приведем еще один путь обоснования существования актуальных бесконечно малых, который отличается от предложенных в 2.3, 2.4 только способом доказательства существования тени, которое получается непосредственно из принципа Лейбница. Поскольку приводимое доказательство использует только аксиому расширения Г. Лейбница и понятие точной верхней грани (или дедекиндова сечения), то оно доступно студентам-математикам или "математизированным" слушателям.

Итак, мы либо рассматриваем множество всех последовательностей вещественных чисел, факторизованное по некоторой мере Фреше, которое содержит (актуальные) бесконечно малые числа, либо постулируем принцип Лейбница. Множество гипервещественных чисел обозначаем, как обычно, через $\Re$.

[1]Речь идет о предъявлении нестандартной модели арифметики.

Теорема 4.1.1.

Для каждого конечного гипервещественного числа x существует единственное вещественное число r такое, что $x \approx r$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Единственность доказывается стандартным путем, исходя из того, что единственное бесконечно малое вещественное число – это ноль.

Докажем существование. Пусть x – конечное число. Если $x \in \mathbb{R}$, то доказательство закончено.

Предположим, что $x \notin \mathbb{R}$ и пусть $E = \{y \in \mathbb{R} : y > x\}$. Ясно, что множество E непусто и ограничено снизу. Положим $x^0 = \inf E$.

Пусть $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Тогда число $x^0 + \frac{1}{n}$ не является нижней границей множества E, то есть для некоторого элемента $y \in E$ $y < x^0 + \frac{1}{n}$, то есть $y - x^0 < \frac{1}{n}$. Но так как $x < y$, $x - x^0 < \frac{1}{n}$ при всех $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Аналогично, вводя множество $F = \{z \in \mathbb{R} : z > x\}$ и обозначая $x_0 = \sup F$, получим, что при всех $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $x_0 - x < \frac{1}{n}$.

Тогда ясно, что $x_0 - x^0 < \frac{1}{n}$ для всех ненулевых $n \in \mathbb{N}$. Действительно, $x_0 - x^0 = x_0 - x + x - x^0 < \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{2}{m}$. С другой стороны, $x^0 - x_0 = x^0 - x + x - x_0 > -\frac{1}{m} - \frac{1}{m} = -\frac{2}{m}$. Таким образом, для всех $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $|x_0 - x^0| < \frac{1}{n}$. Отсюда, учитывая, что модуль – вещественое число, получаем, что $x_0 = x^0$.

Покажем, что $x^0 \approx x$. Для этого предположим, что $y = x^0 - x$ не является бесконечно малым числом.

Ясно, что y – конечное число и, так как $x^0 = \inf E$, $x^0 \geq x$ и, следовательно, $y \geq 0$.

Аналогично, так как $x^0 = x_0 = \sup F$, $y \leq 0$.

Таким образом, $x \in \mathbb{R}$ вопреки предположению. $\diamond$

Замечание. Нетрудно заметить, что множества E и F образуют дедекиндово сечение и, следовательно, определяют единственное вещественное число. То, что оно искомое, легко вывести из свойств дедекиндова сечения. В этом состоит другое доказательство теоремы.

Далее уместно доказать все основные свойства бесконечно малых и свойства тени, существование которой *внутренним* образом доказано. Позже идет обычное изложение анализа.

§4.2. Гипернатуральные числа

Известно, что множество натуральных чисел удовлетворяет аксиомам Пеано (Мы формулируем аксиомы в "наивной" форме. За точными формулировками отсылаем читателя к специальной литературе.):

1. Для каждого натурального числа имеется *непосредственно следующее* за ним число;

2. Ноль является натуральным числом, не следующим ни за каким натуральным числом;

3. Если последователи двух натуральных чисел равны, то равны и сами числа;

4. Сумма любого натурального числа с нулем равна этому числу;

5. Произведение натурального числа на ноль равно нулю;

6. Последователь суммы двух натуральных чисел равен сумме одного из них с последователем другого;

7. Произведение натурального числа на последователя другого натурального числа равно сумме произведения первого числа на второе и первого числа;

8. *Принцип математической (полной) индукции*: если некоторое свойство имеет место для натурального числа n_0 и из того, что оно справедливо для (произвольного) натурального числа $n \geq n_0$ следует, что оно имеет место и для последователя числа n, то данное свойство справедливо для всех натуральных чисел $n \geq n_0$.

Под множеством *натуральных чисел* понимают обычно структуру, состоящую из множества $\mathbb{N}$ с двумя бинарными операциями сложения и умножения и одной унарной операцией следования, удовлетворяющую аксиомам Пеано. На самом деле операции сложения и умножения можно *определить*, исходя из операции следования и принципа индукции по следующему правилу:

$$n + 0 = n, \;\; n + (m + 1) = (n + m) + 1, \, nm = \underbrace{n + n + \ldots + n}_{n \text{ раз}}.$$

Свойства операций – аксиомы Пеано и законы коммутативности и ассоциативности – легко проверяются (упражнение для читателя).

Теорема 4.2.1.

Натуральные числа существуют.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Мы приведем эскиз доказательства и определения арифметических операций и порядка.

Рассмотрим множество всех слов, составленных из алфавита, содержащего единственный символ (букву), которую будем обозначать $|$. Под *словом* мы понимаем произвольную (возможно пустую) последовательность букв, например $|||$. Пустое слово, то есть слово, не содержащее ни одного символа, обозначим Λ.

Для каждого слова ξ введем слово $\xi^+ = \xi|$, получающееся приписыванием к слову ξ буквы. Назовем слово ξ^+ последователем слова ξ.

Определим теперь сумму двух слов $\xi_1 + \xi_2 = \xi_1\xi_2$ как результат приписывания к слову ξ_1 слова ξ_2. Точнее, положим для слова ξ $\xi + 0 = \xi$, $\xi + \eta^+ = (\xi + \eta)^+$.

Произведение слов ξ_1 и ξ_2 определим правилом:

$\xi \bullet 0 = 0$, $\xi \bullet \eta^+ = \xi \bullet \eta + \xi$.

Легко понять, что наивно имеет место равенство

$$\xi_1 * \xi_2 = \underbrace{\xi_1 + \ldots + \xi_1}_{\xi_1 \text{ раз}}.$$

Легко проверить выполнение для введенных операций всех аксиом Пеано, включая аксиому индукции. Предлагаем читателю сделать это самостоятельно.

Мы приведем лишь рассуждение, доказывающее принцип индукции, введя предварительно отношение порядка на множестве слов: будем считать, что $\xi_1 < \xi_2$, если существует конечная последовательность слов $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ такая, что $\xi_1 = \eta_1$, $\xi_2 = \eta_k$ и $\eta_{s+1} = \eta_s^+$. Легко проверить, что получается отношение линейного порядка, при котором слово ξ_1 больше слова ξ_2, если оно "длиннее", то есть содержит больше букв. Также ясно, что цепочка слов $\xi_1 > \xi_2 > \ldots$ обрывается, ибо наименьшим элементом является пустое слово[2].

Доказательство принципа индукции:

Пусть ϕ – некоторое свойство, истинное для слова ξ_0 и слово $\xi \geq \xi_0$. Предположим, что если свойство ϕ имеет место для ξ, то оно справедливо и для ξ^+, но, вопреки утверждению принципа индукции, найдется слово, для которого свойство ϕ не выполнено. Обозначим это слово Θ.

Если $\Theta = \Lambda$, то, очевидно, что $\xi_0 = \Lambda$ и свойство ϕ справедливо для Θ. Таким образом, слово Θ непусто. Рассмотрим слово Θ_1 такое, что $\Theta_1^+ = \Theta$. Тогда $\Theta_1 < \Theta$ и свойство ϕ не имеет место для Θ_1, ибо, в противном случае, оно выполнялось бы для Θ по индукционному переходу.

Рассуждая далее со словом Θ_1 точно так же, как и со словом Θ, получим слово $\Theta_2 < \Theta_1$, для которого свойство ϕ также не имеет места. Продолжая аналогичные рассуждения, получим последовательность $\Theta > \Theta_1 > \Theta_2 > \ldots$, которая оборвется. Совершенно ясно, что в этой последовательности встретится слово ξ_0, ибо $\Theta > \xi_0$. При этом по построению свойство ϕ для слова ξ_0 не имеет место, а по условию (база индукции) – выполнено. Полученное противоречие и доказывает требуемое.

Таким образом, множество слов, введеное нами, обладает всеми свойствами, которые присущи (и требуются) множеству натуральных чисел. Обозначая теперь $0 = \Lambda,\ 1 = \Lambda^+, \ldots, n+1 = n^+, \ldots$ получаем привычное обозначение для натуральных чисел. Множество натуральных чисел обозначаем, как обычно, символом $\mathbb{N}$. $\diamond$

Замечание. Существование натуральных чисел можно доказать и в рамках некоторой теории множеств (и наивной в том числе) путем введения конечных ординалов или кардиналов. Также возможно обоснование существования натуральных чисел в рамках теории множеств как теоретико-множественной арифметики [17, с. 46]. Во всех случаях натуральными числами фактически являются множества $0 = \emptyset,\ 1 = 0 \cup \{0\} = 0^+ = \{\emptyset\} = \{0\},\ 2 = 1^+ = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0,1\}$, $3 = 2^+ = 2 \cup \{2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0,1,2\}, \ldots$. Вообще $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

[2]Здесь мы фактически используем аксиому фундирования, запрещающую безобрывные цепочки вида $\ldots \in x_k \ldots \in x_2 \in x_1 \in x_0$. Обосновать обрыв цепочки слов можно и тем, что каждое последующее слово получается "стиранием" одной буквы. Следовательно, при повторении этой операции столько раз, сколько требуется для написания исходного слова мы придем к пустому слову, ибо все буквы будут стерты. Возникает естественный вопрос, можно ли, используя конструктивные методы [22] избежать использования аксиомы фундирования.

Приведем теперь аксиому, которая гарантирует существование бесконечно больших натуральных чисел.

Аксиома расширения:

Существует такое (гипернатуральное) число N, что для всех натуральных чисел n имеет место $n < N$.

Теорема 4.2.2.

Существует множество $^{\infty}\mathbb{N}$*, содержащее множество натуральных чисел. При этом для элементов множества* $^{\infty}\mathbb{N}$ *имеют место акиомы Пеано, а также аксиома расширения.*

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Первый способ. Мы приведем доказательство существования множества гипернатуральных чисел, следуя схеме 2.2. Это доказательстово мы считаем основным для нашего изложения.

Пусть $^{\infty}\mathbb{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}/\mu^{-1}(0)$ – пространство измеримых функций (последовательностей натуральных чисел), по некоторой мере Фреше. Докажем, что в $^{\infty}\mathbb{N}$ справедливы аксиомы Пеано. Для этого требуется доказать аналог теоремы 2.2.1.

В действительсти это делается точно так же, как и в 2.2, ибо ясно, что, по определению, $m = m_1 + m_2$ тогда и только тогда, когда для почти всех $k \in \mathbb{N}$ $m_1(k) + m_2(k) = m(k)$. Аналогично $m \leq n$ тогда и только тогда, когда $m(k) \leq n(k)$ для почти всех натуральных k.

Отсюда легко вывести все аксиомы Пеано для множества гипернатуральных чисел. Детали предоставляются читателю.

Приведем доказательство принципа индукции для $^{\infty}\mathbb{N}$.

Пусть принцип индукции нарушается. Тогда для некоторого утверждения φ имеет место $\varphi(0)$ и $\forall n\,(\varphi(n) \supset \varphi(n+1))$, однако существует число $N \in {}^{\infty}\mathbb{N}$ такое, что $\neg\varphi(N)$. Тогда согласно принципу переноса для почти всех $k \in \mathbb{N}$ имеет место $\neg\varphi(N_k)$. Фиксируем $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\neg\varphi(N_{k_0})$.

Так как база индукции и индукционный переход имеют место в $^{\infty}\mathbb{N}$, для почти всех k справедливо $\varphi(0_k)$ и $\forall n_k\,(\varphi(n_k) \supset \varphi(n_k+1))$. Так как последние утверждения представляют собой утверждения о натуральных числах, более того они являются ничем иным, как базой индукции и индукционным переходом, утверждение $\varphi(n_k)$ имеет место для почти всех $k \in \mathbb{N}$, для которых справедлиы база и переход, в частности для k_0. Таким образом $\varphi(N_{k_0})$ справедливо.

Сопоставляя полученные утверждения, имеем, что одновременно имеет место утверждение и его отрицание. Полученное противоречие и доказывает поринцип индукции для $^{\infty}\mathbb{N}$.

Для доказательства аксиомы расширения построим вложение множества $\mathbb{N}$ в множество $^{\infty}\mathbb{N}$ по правилу $\mathrm{in}(n)$ – класс эквивалентности постоянной функции $\widetilde{n}(k) = n$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что это вложение сохраняет порядок и арифметические операции. Действительно, это следует из определения операций и порядка.

Покажем теперь, что в $^{\infty}\mathbb{N}$ имеется бесконечно большой элемент. Для этого положим N : $N(k) = k$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Очевидно, что если $m \in \mathbb{N}$, то при

$k \geq m+1$ $\widetilde{m}(k) = m < k = N(k)$. Поэтому мера Фреше множества $\{k \in \mathbb{N}\ :\ m_k < N_k\}$ равна единице и, следовательно, $m < N$, то есть построенное число N является бесконечным. $\diamond$

Определение 4.2.1.

Множество ${}^{\infty}\mathbb{N}$ называется множеством **гипернатуральных чисел**.

Замечание. Очевидно, что вместе с N бесконечным являются все числа вида $N + l$, где l – произвольное целое число. Таким образом, каждому бесконечному натуральному числу соответствует "блок" чисел, порядково изоморфный множеству целых чисел. Всего таких блоков бесконечно много, при этом любое число блока $N + k$ строго меньше любого числа из блока $M + k$ при $N < M$. В силу линейности порядка на множестве ${}^{\infty}\mathbb{N}$ блоки также линейно упорядочены. Очевидно, что нет наибольшего блока. Можно доказать, используя свойства ультрафильтра, что нет и наименьшего блока. Также между двумя различными блоками можно вставить (отличный от них) блок. Схематично строение множества ${}^{\infty}\mathbb{N}$ показано ниже.

$$\overbrace{\underbrace{0,1,2,\bullet,\bullet,\bullet}_{\mathbb{N}}\underbrace{\cdots * * \cdots \{N+k\ :\ k \in \mathbb{Z}\} \cdots * * \cdots}_{\text{блоки }\ \aleph}}^{{}^{\infty}\mathbb{N}}$$

То есть порядковый тип множества ${}^{\infty}\mathbb{N}$ равен $\omega + (\omega^* + \omega)\,\eta$, где ω и η – порядковые типы натуральных и рациональных чисел, а через ω^* обозначен тип двойственного упорядочения – см. [14].

§4.3. Целые и гиперцелые числа

Построение целых чисел из натуральных осуществляется путем *симметризации*. Мы применим этот процесс к множеству гипернатуральных чисел. При этом, опираясь на то, что натуральные числа изоморфно вложены в множество гипернатуральных чисел, мы покажем, что их образ при симметризации даст обычное множество целых чисел.

Естественно, можно было построить сначала множество целых чисел, а затем множество гиперцелых, например, с помощью факторизации множества всех целочисленных последовательностей по некоторой мере Фреше. Однако это путь мы не выбираем, считая, что следует как можно меньше использовать неконструктивные приемы. Мы, конечно, не исключаем и такого варианта, при котором все нужные гиперчисла строятся из соответствующих "канонических" чисел тем или иным способом.

Процедура симметризации.[3]

Определение 4.3.1.

Рассмотрим множество ${}^{\infty}\mathbb{N} \times {}^{\infty}\mathbb{N}$. Две пары $< n_1, n_2 >, < m_1, m_2 > \in {}^{\infty}\mathbb{N} \times {}^{\infty}\mathbb{N}$ назовем **эквивалентными**, если $n_1 + m_2 = n_2 + m_1$.

[3] Речь идет о стандартной процедуре построения группы по полугруппе. Общую конструкцию можно найти в [33, с.110 – 113].

Как явствует из определения, для любого натурального числа l
$< n+l, m+l > \sim < n,m >$.

Лемма 4.3.1.

Введенное отношение является отношением эквивалентности.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Действительно, очевидно, что $< n,m > \sim < m,n >$, и если
$< n_1,m_1 > \sim < n_2,m_2 >$, то $< n_2,m_2 > \sim < n_1,m_1 >$.

Далее, если $< n_1,m_1 > \sim < n_2,m_2 >$ и $< n_2,m_2 > \sim < n_3,m_3 >$, то, так как $n_1 + m_2 = n_2 + m_1,\ \ n_2 + m_3 = n_3 + m_2$, получаем, что $n_1 + m_2 + n_2 + m_3 = n_2 + m_1 + n_3 + m_2$. Отсюда $n_1 + m_3 = n_3 + m_1$. $\diamond$

Определение 4.3.2.

Фактормножество множества ${}^{\infty}\mathbb{N} \times {}^{\infty}\mathbb{N}$ по введенному отношению эквивалентности назовем множеством **гиперцелых** чисел и будем обозначать ${}^{\infty}\mathbb{Z}$.

Лемма 4.3.2.

Для любого гиперцелого числа $z = [< n,m >]$ (через $[< n,m >]$ обозначен класс эквивалентности пары $< n,m >$) существует единственное гипернатуральное число k такое, что либо z совпадает с классом эквивалентности пары $< k,0 >$, либо z совпадает с классом эквивалентности пары $< 0,k >$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Пусть сначала $n \geq m$. Тогда положим $k = n - m$. Имеем $k + m = n - m + m = n = n + 0$, то есть $< n,m > \sim < k,0 >$.

Если $n \leq m$, то, положив $k = m - n$ и проведя аналогичное рассуждение, получим требуемое. $\diamond$

Определение 4.3.3.

Для гиперцелых чисел z_1 и z_2 определим

$z_1 + z_2$ – класс эквивалентности пары $< n_{11} + n_{21}, n_{12} + n_{22} >$, где $z_k = [< n_{k1}, n_{k2} >]$ $(k = 1,2)$.

Теорема 4.3.1.

Определение суммы гиперцелых чисел корректно.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Докажем, что если $< n_1,n_2 > \sim < m_1,m_2 >$ и $< n_1',m_1' > \sim$
$< n_2',m_2' >$, то $< n_1 + n_2, m_1 + m_2 > \sim < n_1', n_2', m_1', m_2' >$. Действительно, имеем $n_1 + n_2 + m_1' + m_2' = m_1 + n_2' + m_2 + n_2'$. $\diamond$

Определение 4.3.4.

Класс эквивалентности пары $< 0,0 >$ назовем **нулем** и будем обозначать 0.

Определение 4.3.5.

Класс эквивалентности пары $< 1,0 >$ обозначим 1, а класс эквивалентности пары $< 0,1 >$ – -1.

Определение 4.3.6.

Противоположным числом к числу $z = [< n,m >]$ назовем число $-z = [< m,n >]$.

Определение 4.3.7.

Для $z \in {}^{\infty}\mathbb{Z}$ положим $z \geq 0$ тогда и только тогда, когда z эквивалентно паре $< n, 0 >$ для гипернатурального n. Будем говорить, что $z_1 \geq z_2$, если $z_1 - z_2 \geq 0$.

Предлагаем читателю в качестве упражнения проверить, что при этом получается сложение, удовлетворяющее всем "нужным" свойствам.

Определим функцию $\pi \ : {}^{\infty}\mathbb{N} \longrightarrow {}^{\infty}\mathbb{Z}$ правилом $\pi(n)$ – класс эквивалентности пары $< n, 0 >$.

Теорема 4.3.2.

Функция π является инъекцией, сохраняющей отношение порядка и операцию сложения.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Пусть $n, m \in {}^{\infty}\mathbb{N}$.

Имеем:

$\pi(n) = [< n, 0 >],\ \pi(m) = [< m, 0 >], \pi(n + m) = [< n + m, 0 >] =$
$= [< n, 0] > +[< m, 0 >]$, как отмечено при доказательстве леммы 4.3.2. Порядок так и определен, чтобы гипернатуральные числа были положительными при этом вложении. Поэтому если $n < m$, то
$\pi(n) - \pi(m) = [< 0, m - n >] < 0$. $\diamond$

В дальнейшем, допуская обычную вольность, мы отождествляем гипернатуральные числа с их образами, то есть считаем, что $\pi(n) = n$ для всех $n \in {}^{\infty}\mathbb{N}$.

Лемма 4.3.3.

$z_1 \geq z_2$ тогда и только тогда, когда для некоторого гипернатурального числа n $z_1 = z_2 + n$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Пусть $z_1 \geq z_2$. Тогда $z_1 - z_2 \geq 0$ и, следовательно, $z_1 - z_2 =$
$= [< n, 0 >]$ для некоторого гипернатурального n.

Обратно, если $z_1 = z_2 + n$, то $z_1 - z_2 = [< n, 0 >]$.

Предлагаем читателю в качестве упражнения убедиться в том, что введенное отношение порядка линейно, то есть для любых двух гиперцелых чисел z_1 и z_2 либо $z_1 > z_2$, либо $z_1 < z_2$, либо $z_1 = z_2$. $\diamond$

Определение 4.3.8.

Модулем (абсолютной величиной) гиперцелого числа z назовем максимальное из чисел z и $-z$, то есть модуль гипернатурального (положительного) числа совпадает с ним самим, а модуль отрицательного равен ему противоположному. Модуль числа z обозначается $|z|$.

Определение 4.3.9.

Для $z \in {}^{\infty}\mathbb{Z}$ положим

$$\mathrm{sign} z = \begin{cases} 1, & \text{если } \ z > 0 \\ 0, & \text{если } \ z = 0 \\ -1, & \text{если } \ z < 0 \end{cases} .$$

Число $\mathrm{sign} z$ назовем **знаком** z.

Определение 4.3.10.

Произведением гиперцелых чисел z_1 и z_2 назовем число

$$z_1z_2 = \begin{cases} 0, & \text{если одно из чисел равно нулю,} \\ |z_1||z_2|, & \text{если для ненулевых чисел } \mathrm{sign} z_1 = \mathrm{sign} z_2, \\ -|z_1||z_2|, & \text{если для ненулевых чисел } \mathrm{sign} z_1 \neq \mathrm{sign} z_2. \end{cases}$$

Лемма 4.3.4.

1. Для любого гиперцелого числа $z = \mathrm{sign} z|z|$.

2. Для любых гиперцелых чисел z_1, z_2 их произведение вычисляется по правилу $z_1z_2 = \mathrm{sign} z_1 \mathrm{sign} z_2 |z_1||z_2|$.

3. Для любого гиперцелого числа z справедливо $-z = -1z$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Очевидно. $\diamond$

Теорема 4.3.3.

Множество ${}^\infty\mathbb{Z}$ с введенными операциями и отношением порядка является целостным кольцом.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Покажем, например, что введеное умножение дистрибутивно (остальные свойства тривиальны). Действительно,

$$z_1(z_2 + z_3) = \mathrm{sign} z_1 |z_1| \mathrm{sign}(z_2 + z_3)|z_2 + z_3| = \mathrm{sign} z_1 \mathrm{sign}(z_2 + z_3)|z_1||z_2 + z_3|.$$

Рассмотрим пять случаев:

1. Одно из чисел z_2 или z_3 равно нулю. Тогда $|z_2 + z_3| = |z_2|$ $(z_3 = 0)$ (случай $|z_2| = 0$ рассматривается аналогично).

   Тогда $|z_1||z_2 + z_3| = |z_1||z_2| = |z_1||z_2| + |z_1||z_3|$, $\mathrm{sign}(z_2 + z_3) = \mathrm{sign} z_2$.

2. $z_2 > 0, z_3 > 0$: тогда $|z_2| = z_2, |z_3| = z_3$ и, следовательно, можно считать, что это гипернатуральные числа. Тем самым, так как $|z_1| \in {}^\infty\mathbb{N}$ $|z_1||z_2 + z_3| = |z_1|(|z_2| + |z_3|) = |z_1||z_2| + |z_1||z_3|$, что, очевидно, дает дистрибутивность в этом случае.

3. $z_2 > 0, z_3 < 0$: тогда $|z_3| = -z_3$.

   (a) $|z_2| \geq |z_3|$. Тогда $|z_2 + z_3| = z_2 - z_3 \geq 0$ и, следовательно, $|z_1||z_2 + z_3| = |z_1|(z_2 - z_3) = |z_1||z_2| - |z_1|z_3 = |z_1||z_2| + |z_1||z_3|$.

   (b) $|z_2| \leq |z_3|$. Тогда $|z_2 + z_3| = -z_2 - z_2$. Далее аналогично.

4. $z_2 < 0, z_3 > 0$: рассматривается аналогично предыдущему.

5. $z_2 < 0, z_3 < 0$: расматривается аналогично случаю 2.

Докажем, что произведение двух гиперцелых чисел равно нулю тогда и только тогда, когда одно из них равно нулю.

Пусть $z_1z_2 = 0$. Тогда $\mathrm{sign} z_1 \mathrm{sign} z_2 |z_1||z_2| = 0$. Предположим, что $z_1 \neq 0$. Тогда $\mathrm{sign} z_1 \neq 0$. Если $\mathrm{sign} z_2 = 0$, то $z_2 = 0$ по определению и утверждение доказано. Пусть $\mathrm{sign} z_2 \neq 0$.

Пусть сначала $\text{sign}z_1 > 0$. В этом случае возможно, что $\text{sign}z_2 > 0$, но тогда мы имеем нулевое произведение натуральных чисел, поэтому $|z_2| = 0$. Если же $\text{sign}z_2 < 0$, то число $-\text{sign}z_1\text{sign}z_2|z_1||z_2|$ является гипернатуральным и равно нулю, следовательно, снова $|z_2| = 0$. В обоих случаях $z_2 = 0$.

Аналогично рассматривается случай, когда $\text{sign}z_1 < 0$.

Дальнейшие детали предоставляются читателю. $\diamond$

Определение 4.3.11.

Гиперцелое число z назовем **конечным**, если для некоторого натурального числа n будет $|z| < n$.

Теорема 4.3.4.

Для любых двух гиперцелых чисел z_1, z_2 справедливо

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|.$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Действительно, рассмотрим два случая: 1. $\text{sign}z_1 = \text{signz}_2$ и 2. $\text{sign}z_1 = -\text{signz}_2$.

В первом случае, по определению модуля $|z_k| = \pm z_k$ и, следовательно, $|z_1| + |z_2| = \pm z_1 + \pm z_2 = \pm(z_1 + z_2) = |z_1 + z_2|$, так как в этом случае знак суммы совпадает, очевидно, со знаком слагаемых.

В случае, когда z_1 и z_2 имеют разные знаки, не умаляя общности имеем $|z_1| = z_1$, $|z_2| = -z_2$. Будем также считать, что $|z_1| \leq |z_2|$. Тогда ясно, что $z_1 + z_2 \leq 0$ и, следовательно, $|z_1| + |z_2| = z_1 - z_2, |z_1 + z_2| = -z_2 - z_1$. Далее имеем $|z_1 + z_2| - (|z_1| + |z_2| = -z_2 - z_1 - (-z_2 + z_1) = -2z_1 \leq 0$, то есть $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, что и требовалось.

Аналогично проверяется и второе свойство. $\diamond$

Теорема 4.3.5.

Существует подкольцо $\mathbb{Z}$ кольца ${}^{\infty}\mathbb{Z}$, являющееся архимедовым упорядоченным целостным кольцом – кольцом целых чисел.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Рассмотрим в качестве $\mathbb{Z}$ множество конечных гиперцелых чисел. Совершенно очевидно, что это множество получается в результате симметризации множества всех конечных гипернатуральных, то есть натуральных чисел, то есть является кольцом целых чисел. $\diamond$

Замечание. В множестве гиперцелых чисел операция умножения может быть введена правилом: $[< n_1 m_2 >][< n_2, m_2 >] =$
$= [< n_1 n_2 + m_1 m_2, m_1 n_2 + n_1 m_2 >]$. Предлагаем читателю проверить, что это умножение совпадает с введенным нами.

Теорема 4.3.6.

Вложение π сохраняет произведение.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Имеем $\pi(n)\pi(m) = [< n, 0 >][< m, 0 >] = |[< n, 0 >]||[< m, 0 >]| = [< n, 0 >][< m, 0 >] = [< nm, 0 >] = \pi(nm)$. $\diamond$

Теорема 4.3.7.

Сужение π на множество натуральных чисел является изоморфным вложением множества $\mathbb{N}$ в $\mathbb{Z}$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Предоставляется читателю. $\diamond$

Теорема 4.3.8.

Кольцо $^{\infty}\mathbb{Z}$ *является пространством измеримых функций, принимающих значение в кольце* $\mathbb{Z}$*, по некоторой мере Фреше. При этом имеет место принцип переноса.*

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Выше (4.3.5) уже отмечено, что $\mathbb{Z}$ получается из $\mathbb{N}$ в результате симметризации. Так как $^{\infty}\mathbb{Z}$ получается тем же процессом из $^{\infty}\mathbb{N}$, которое есть результат факторизации множества последовательностей натуральных чисел по некоторой мере Фреше (пространство измеримых натуральнозначных функций), то, рассматривая пары $< m, n >$ гипернатуральных чисел, мы расматриваем пары функций

$$< (n_0, n_1, n_2, \dots), (m_0, m_2, m_2, \dots) > .$$

Вводя отношение эквивалентности, симметризующее множество $^{\infty}\mathbb{N}$, мы симметризуем множество функций. Точнее, легко проверить (упражнение), что $< n, m >\sim$ $\sim< k, l >$ тогда и только тогда, когда для почти всех натуральных s $< n_s, m_s >\sim< k_s, l_s >$, что фактически и завершает доказательство, ибо согласно этому пары натуральных чисел образуют множество конечных гиперцелых чисел. Действительно, если $< k, 0 >\in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, то соответствующее гиперцелое число есть не что иное, как натуральное число k. $\diamond$

Принцип переноса получается автоматически из принципа переноса для гипернатуральных чисел. Ниже мы приведем общий принцип переноса, охватывающий все возможные переносы нашего изложения, а пока предлагаем читателю доказать принцип переноса в каждом случае самостоятельно.

§4.4. Рациональные числа

В этом параграфе, следуя обычной процедуре построения поля (тела) отношений, мы построим поле гиперрациональных чисел, а поле рациональных чисел получится как подполе кольца конечных гиперрациональных чисел.

Определение 4.4.1.

На множестве $^{\infty}\mathbb{Z} \times {}^{\infty}\mathbb{N} \setminus \{0\}$ введем отношение **эквивалентности**: $< u, v >\sim< u_1, v_1 >$ тогда и только тогда, когда $uv_1 = vu_1$.

В качестве упражнения для читателя предлагается

Лемма 4.4.1.

Введенное отношение действительно является отношением эквивалентности. $\diamond$

Определение 4.4.2.

Множество $^{\infty}\mathbb{Q}$ классов эквивалентности $^{\infty}\mathbb{Z} \times {}^{\infty}\mathbb{N} \setminus \{0\}$ по введенному отношению назовем множеством **гиперрациональных чисел**.

Таким образом, множество $^{\infty}\mathbb{Q}$ – это множество пар (точнее, классов пар) вида $q = [< u, v >]$, где $u \in {}^{\infty}\mathbb{Z}$, $v \in {}^{\infty}\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Определение 4.4.3.

Определим **сумму** и **произведение** гиперрациональных чисел правилами:

$$q_1 + q_2 = [< u_1 v_2 + u_2 v_1, v_1 v_2 >],$$

$$q_1 q_2 = [< u_1 u_2, v_1 v_2 >].$$

Теорема 4.4.1.

Введенные операции не зависят от выбора представителей классов эквивалентности, то есть если

$$< u'_1, v'_1 > \sim < u_1, v_1 >, \ < u'_2, v'_2 > \sim < u_2, V_2 >,$$

$$\text{то} \quad < u'_1 v'_2 + u'_2 v'_1, v'_1 v'_2 > \sim < u_1 v_2 + u_2 v_1, v_1 v_2 >$$

$$\text{и} \quad < u'_1 u'_2, v'_1 v'_2 > \sim < u_1 u_2, v_1 v_2 > .$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Имеем $u'_1 v_1 = v'_1 u_1, \ \ u'_2 v_2 = v'_2 u_2$. Тогда

$$(u'_1 v'_2 + u'_2 v'_1) v_1 v_2 = \underline{u'_1} v'_2 \underline{v_1} v_2 + \underline{u'_2} v'_1 v_1 \underline{v_2} =$$

$$= v'_1 u_1 v'_2 v_2 + v'_2 u_2 v'_1 v_1 = v'_1 v'_2 (u_1 v_2 + u_2 v_1).$$

Аналогично проводится доказательство и для произведения. $\diamond$

Определение 4.4.4.

Будем считать гиперрациональное число $q = [< u, v >]$ **положительным**, если $u \geq 0$. Отношение **порядка** введем по правилу: $p \geq q$ тогда и только тогда, когда $p - q \geq 0$.

Теорема 4.4.2.

С введенными операциями и отношением порядка множество $^\infty\mathbb{Q}$ *является упорядоченным полем, содержащим подкольцо* $^\infty\mathbb{Z}$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Докажем, к примеру, закон дистрибутивности. Имеем $r(p+q) = [< u, v >] \cdot$ $\cdot ([< x, y >] + [< z, w >]) = [< u, v >][< xw + yz, yw >] = [< u(xw + yz), vyw >] =$ $= [< uxw + uyz, vyw >]$. С другой стороны

$$rp + rq = [< u, v >][< x, y >] + [< u, v >][< z, w >] = [< ux, vy >]+$$

$$+[< uz, vw >] = [< uxvw + vyuz, vyvw >] = [< v(xuw + yuz), vvyw >] =$$

$= [< xuw + yuz, vyw >]$. Мы пользуемся законами дистрибутивности, ассоциативности и коммутативности, справедливыми для гиперцелых чисел, а также определением эквивалентности пар.

Проверим, что если $p, q > 0$, то и $p + q > 0$. Действительно, по определению $p = [< u, v >]$, $q = [< z, w >]$ и $u, z > 0$. Имеем $p + q = [< uw + vz, zw >]$. Так как сумма строго положительных гиперцелых чисел строго положительна, отсюда заключаем, что $p + q > 0$.

Проверим, что любые два гиперрациональных числа сравнимы. Имеем для $p, q \in {}^{\infty}\mathbb{Q}$ $\quad p - q = [< uw - zv, vw >]$. Так как $z, w \in {}^{\infty}\mathbb{N}$, а $uw - zv \in {}^{\infty}\mathbb{Z}$, мы можем определить знак разности и, следовательно, какое из чисел больше.

Рассмотрим функцию Φ, определенную на множестве ${}^{\infty}\mathbb{Z}$ правилом $\Phi(m) = [< m, 1 >]$. Покажем, что функция Φ является мономорфизмом кольца ${}^{\infty}\mathbb{Z}$ в кольцо ${}^{\infty}\mathbb{Q}$. Действительно, $\Phi(m + n) =$
$= [< m, 1 >] + [< n, 1 >] = [< m1 + n1, 1 >] = \Phi(m) + \Phi(n)$. Аналогично $\Phi(mn) = \Phi(m)\Phi(n)$.

Определим $\mathbf{0} = [< 0, 1 >]$, $\mathbf{1} = [< 1, 1 >]$. Легко понять (проверьте!), что введенные числа являются нейтральными относительно введенных операций сложения и умножения гиперрациональных чисел. Покажем, что если $\Phi(m) = \mathbf{0}$, то и $m = 0$. Действительно, имеем $[< m, 1 >] = [< 0, 1 >]$. Но тогда $m1 = 0$ и, так как множество ${}^{\infty}\mathbb{Z}$ является целостным кольцом, $m = 0$.

Ясно, что противоположным числом к числу $[< u, v >]$ будет число $[< -u, v >]$ и, следовательно, множество гиперрациональных чисел действительно является кольцом – проверьте остальные свойства!

Очевидно, что ноль и единица в ${}^{\infty}\mathbb{Q}$ определены так, чтобы выполнялось $\Phi(0) = \mathbf{0}$, $\Phi(1) = \mathbf{1}$.

Докажем теперь, что множество гиперрациональных чисел образует поле. Пусть $p \neq \mathbf{0}$. Тогда $p = [< u, v >]$ и $u, v \neq 0$. Положим $p^{-1} = [< v, u >]$. Тогда $pp^{-1} = [< uv, vu >] = [< 1, 1 >] = \mathbf{1}$.

Обозначим $|p| = [< |u|, v >]$. Рекомендуем читателю проверить все свойства модуля. $\diamond$

Таким образом, мы можем считать, что упорядоченное кольцо гиперцелых чисел является подкольцом поля гиперрациональных чисел. Допуская обычную вольность, мы отождествляем гиперцелые числа с их Φ-образами, а введенные ноль и единицу обозначаем обычными символами.

Определение 4.4.5.

Гиперрациональное число p назовем **конечным**, если для некоторого натурального числа n $|p| \leq n$.

Теорема 4.4.3.

В поле ${}^{\infty}\mathbb{Q}$ существуют бесконечно малые числа.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Действительно, так как ${}^{\infty}\mathbb{N} \subset {}^{\infty}\mathbb{Z} \subset {}^{\infty}\mathbb{Q}$, если N – бесконечно большое натуральное число, то $N \neq 0$ и, следовательно, существует число $N^{-1} \in {}^{\infty}\mathbb{Q}$. Легко понять, что оно бесконечно мало. $\diamond$

Определение 4.4.6.

Множество бесконечно малых чисел обозначим через I.

Таким образом, $I = \left\{x \in {}^{\infty}\mathbb{Q} \ : \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} |x| < \frac{1}{n}\right\}$.

Доказательство следующей теоремы предоставляется читателю (ср. 2.3.1).

Теорема 4.4.4.

Для любых двух бесконечно малых чисел x, y и любого конечного числа $p \in {}^{\infty}\mathbb{Q}$

1. $x \pm y \in I$

2. $xp \in I$

$\diamond \quad \diamond \quad \diamond \quad \diamond$

Рассмотрим теперь поле отношений кольца целых чисел. Обозначим его через $\mathbb{Q}$. Нетрудно понять, что

$$\mathbb{Q} = \{[< m, n >] \ : \ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\},$$

где классы пар берутся по отношению эквивалентности, введенному так же, как в 4.4.1 на множестве $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Определение 4.4.7.

Множество $\mathbb{Q}$ называется множеством **рациональных** чисел.

Так как каждый элемент $u \in {}^{\infty}\mathbb{Z}$ является с точностью до эквивалентности по мере Фреше функцией $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, то очевидно, что всякая пара и, следовательно, гиперцелое число $[< u, v >]$ является функцией $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Таким образом, всякое гиперрациональное число определяется с точностью до класса эквивалентности по мере Фреше некоторой функцией $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$. Тем самым доказана

Теорема 4.4.5.

Поле гиперрациональных чисел является пространством измеримых функций $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$, то есть ультрастепенью поля рациональных чисел. Более того, очевидно, что всякое рациональное число конечно (принадлежит множеству конечных гиперрациональных чисел).

Теорема 4.4.6.

Для полей $\mathbb{Q}$ и ${}^{\infty}\mathbb{Q}$ справедлив принцип переноса.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Рассматривая гиперрациональные числа как функции (точнее их классы) из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{Q}$, имеем $p \geq 0$ тогда и только тогда, когда для почти всех натуральных $k \ \ p_k \geq 0$. Действительно, так как $p_k = [< u_k, v_k >]$, где для почти всех $k \ \ u_k \in \mathbb{Z}, v_k \in \mathbb{N}$, то $p_k \geq 0$ тогда и только тогда, когда $u_k \geq 0$. Аналогично доказывается, что $p = q$ тогда и только тогда, когда для почти всех $k \in \mathbb{N} \ \ p_k = q_k$.

Пусть теперь $p, q \in {}^{\infty}\mathbb{Q}$. Тогда $p + q = [< u, v >] + [< z, w >] =$
$[< uw + vz, vw >]$, где $u, z \in \mathbb{Z}, \ \ v, w \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

С другой стороны, u, v, z, w являются классами функций из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{Z}$. Следовательно, $(p + q)_k = [< u_k w_k + v_k z_k, v_k w_k >]$ для почти всех натуральных k. Таким образом, $(p + q)_k = p_k + q_k$ для почти всех k. Аналогично доказывается, что $(pq)_k = p_k q_k$.

Из доказанного сразу следует, что всякое утверждение, сформулированное в терминах равенств и неравенств, с использованием алгебраических операций о рациональных числах равносильно соответствующему утверждению о гиперрациональных числах, что и есть содержание принципа переноса. Детали предоставляются читателю. $\diamond$

Определение 4.4.8.

Для двух гиперрациональных чисел p и q положим $p \approx q$, если $|p-q| \in I$. Такие два числа назовем **бесконечно близкими**.

Лемма 4.4.2.

Отношение бесконечной близости есть отношение эквивалентности на множестве всех гиперрациональных чисел.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Используя теорему 4.4.4, легко увидеть, что если $p-q \in I$, $q-r \in I$, то и $p-r = (p-q)+(q-r) \in I$, то есть из $p \approx p$, $q \approx r$ следует, что $p \approx r$. Остальные свойства очевидны. $\diamond$

Замечание. Как явствует из предыдущей леммы, множество I совпадает с множеством $\{\varepsilon \ : \ \varepsilon \approx 0\}$.

Теорема 4.4.7.

Обозначим множество конечных чисел через F. Тогда

1. $\mathbb{Q} \subset F$
2. *F – подкольцо поля $^\infty\mathbb{Q}$*
3. *I – идеал кольца F*

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Первое утверждение очевидно. Докажем, что арифметические операции не выводят из множества конечных чисел. Действительно, используя свойства модуля, получаем, что для конечных чисел $p, q \in {}^\infty\mathbb{Q}$ $\ |p+q| \le |p|+|q| \le n+m$, где $n, m \in \mathbb{N}$ таковы, что $|p| \le n, |q| \le m$. Аналогично произведение конечных чисел конечно. Очевидно, что ноль и единица по самому своему определению являются конечными числами.

Теорема 4.4.4 показывает, что множество бесконечно малых является идеалом в I. $\diamond$

§4.5. Вещественные числа

Определение 4.5.1.

Обозначим через $\mathbb{R}$ – факторкольцо кольца F по идеалу I, точнее $\mathbb{R}$ – множество классов эквивалентности множества конечных чисел по отношению бесконечной близости, или $\mathbb{R} = \{[q] \ : \ q \in F\} = \{r = q + I \ : q \in F\}$. Множество $\mathbb{R}$ назовем множеством **вещественных** чисел.

Очевидна следующая теорема, в которой читатель, знакомый с теорией вещественных чисел, без труда узнает теорему о плотности множества рациональных чисел в множестве вещественных.

Теорема 4.5.1.

Для любого вещественного числа x существует конечное гиперрациональное число p_x такое, что $x = p_x + \alpha$ для некоторого бесконечно малого α.[4] $\diamond$

---

[4]Интересное применение этого результата к вещественному анализу имеется в [13] приложение 1.

Целью этого параграфа будет доказать, что так введенное поле вещественных чисел является "обычным" множеством вещественных чисел. Для этого достаточно проверить, что с естественными операциями и отношением порядка множество $\mathbb{R}$ является упорядоченным полем, в котором всякое непустое ограниченное сверху подмножество имеет верхнюю грань (supremum). Тогда из известного факта единственности такого поля (с точностью до изоморфизма) следует, что построенное поле изоморфно дедекиндову пополнению поля рациональных чисел.

Для читателя, знакомого с теорией полей (колец), скажем, что алгебраические операции и порядок в $\mathbb{R}$ индуцируются из кольца F в факторкольцо и соответствующее факторкольцо является полем, что будет доказано ниже, хотя и следует из общей теории. Мы, однако, не предполагаем у читателя знакомство с общей теорией, поэтому предлагаем соответствующие операции и отношение порядка принять по определению.

Определение 4.5.2.

Определим для вещественных чисел x, y **сумму** и **произведение** правилом: $x + y = [p_x + p_y] = p_x + p_y + I$, $xy = [p_x p_y] = p_x p_y + I$.

Теорема 4.5.2.

С введенными операциями множество вещественных чисел является полем, то есть операции обладают обычными свойствами, присущими арифметическим операциям над числами. При этом существует мономорфизм (взаимно однозначное отображение, сохраняющее алгебраические операции) поля $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

1. Сначала проверим, что для любых двух гиперрациональных чисел p и q если $p' \approx p, q' \approx q$, то $p + p' \approx q + q'$.

   Действительно, так как $p' = p + \alpha$, $q' = q + \beta$, где $\alpha, \beta \approx 0$, $p' + q' = p + q + \alpha + \beta = p + q + \gamma$, где $\gamma \approx 0$. Отсюда сразу получается, что сумма вещественных чисел определена корректно.

2. Аналогично доказывается, корректность определения произведения вещественных чисел.

3. Нулем и единицей в $\mathbb{R}$ служат, очевидно, числа $1 + I = 1$ и $0 + I = 0$. Легко видеть, что они являются нейтральными элементами относительно введенных операций сложения и умножения.

4. Для введенных операций справедливы все свойства арифметических операций.

   (a) Для любых вещественных чисел x, y справедливо $x + y = y + x$.

   (b) Для любых вещественных чисел x, y, z имеет место равенство $x + (y + z) = (x + y) + z$.

   (c) $\forall x(x + 0 = x)$.

   (d) $\forall x \exists (-x)(x + (-x) = 0)$.

   (e) Для любых вещественных чисел x, y $xy = yx$.

(f) Для любых вещественных чисел x, y, z $x(yz) = (xy)z$.

(g) $\forall x(x1 = x)$.

(h) $\forall x \neq 0 \exists x^{-1}(xx^{-1} = 1)$.

(i) Для любых вещественных чисел x, y, z справедливо $x(y+z) = xy + xz$.

Мы проверим закон дистрибутивности, оставляя читателю проверку других свойств. Итак, пусть $x, y, z \in \mathbb{R}$. Рассмотрим $\alpha, \beta, \gamma \in I$ такие, что $x = p_x + \alpha$, $y = p_y + \beta$, $z = p_z + \gamma$. Тогда $x(y+z) = (p_x+\alpha)((p_y+\beta)+(p_z+\gamma)) = (p_x+\alpha)(p_y+p_z+\delta) = p_x(p_y+p_z)+p_x\delta+\alpha(p_y+p_z)$. Здесь мы пользуемся свойствами операций над гиперрациональными числами и тем фактом, что $\delta \approx 0$ как сумма бесконечно малых. Далее, так как числа p_x, p_y, p_z конечны, числа $\alpha(p_y+p_z)$ и $p_x\delta$ бесконечно малы, $x(y+z) = p_x(p_y+p_z)+\sigma$, где $\sigma \approx 0$. Таким образом, $x(y+z) = p_xp_y + p_xp_z + \sigma$.

Рассмотрим теперь $xy + xz = (p_x+\alpha)(p_y+\beta)+(p_x+\alpha)(p_z+\gamma)$. Рассуждая как и выше, получим

$$xy + xz = p_xp_y + \delta_1 + p_xp_z + \delta_2 = p_xp_y + p_xp_z + \sigma_1.$$

Так как σ и σ_1 бесконечно малы, то $x(y+z) \approx xy + xz$, то есть определяют один класс эквивалентности, то есть одно и то же вещественное число. Иными словами, $x(y+z) = xy + xz$.

5. Докажем теперь, что множество $\mathbb{R}$ является полем. Для этого рассмотрим не бесконечно малое конечное число p и покажем, что число p^{-1} также конечно. Действительно, считая, не умаляя общности, число p положительным и предположив, что p^{-1} не является конечным, получим, что для любого ненулевого натурального числа n число $\frac{1}{p} > n$. Отсюда, используя свойства неравенств, получим, что для всех $n \in \mathbb{N}$ число $p < \frac{1}{n}$, то есть число p бесконечно мало.

   Используя теперь доказанный факт, покажем, что всякий ненулевой элемент поля $\mathbb{R}$ имеет обратный.

   Пусть $x = p_x + \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{p_x+\alpha} = \frac{1}{p_x\left(1+\frac{\alpha}{p_x}\right)} = p_x^{-1}\left(1+\frac{\alpha}{p_x}\right)^{-1} = p_x^{-1} + \beta,$$

   где $\beta \approx 0$.

   Имеем $x(p_x^{-1}+\beta) = (p_x+\alpha)(p_x^{-1}+\beta) = p_xp_x^{-1}+\gamma = 1+\gamma$. Таким образом, мы нашли число, обратное к x.

Предлагаем читателю завершить доказательство, построив естественную проекцию $\pi : F \longrightarrow \mathbb{R}$ и доказав, что она сохраняет алгебраические операции и нейтральные элементы. $\diamond$

Введем теперь отношение порядка в множестве вещественных чисел. Для этого докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 4.5.1.

Пусть p не бесконечно малое гиперрациональное число и $\alpha \approx 0$. Тогда $p > 0$ в том и только том случае, когда $p + \alpha > 0$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Необходимость. Согласно теореме 4.4.5 и принципу переноса, для почти всех натуральных k $p_k > 0$, $-\frac{1}{n} < \alpha_k < \frac{1}{n}$ для любого ненулевого натурального n.

Имеем для почти всех k

$$p_k > 0$$
$$\alpha_k < \frac{1}{n}.$$

Следовательно, $p_k - \alpha_k > -\frac{1}{n}$. С другой стороны, $\alpha_k > -\frac{1}{n}$. Тогда $p_k + \alpha_k > -\frac{1}{n}$.

Таким образом, $2p_k > -\frac{2}{n}$ и, следовательно, $0 > p_k > -\frac{1}{n}$, или, $0 < -p_k < -\frac{1}{n}$, то есть $p \approx 0$.

Достаточность. Если $p \leq 0$, то, так как для почти всех $k \in \mathbb{N}$ и любого натурального $n \neq 0$ будет $-\frac{1}{n} < \alpha_k < \frac{1}{n}$ и $p_k \leq 0$, для почти всех $k \in \mathbb{N}$ $p_k + \alpha_k \leq \frac{1}{n}$.Отсюда $0 < p + \alpha \leq \frac{1}{n}$ и, следовательно, число $p + \alpha$ бесконечно мало. Теперь уже легко проверить, что и $p \approx 0$. $\diamond$

Определение 4.5.3.

Для $x, y \in \mathbb{R}$ будем считать, что x **больше** y, если $p_x \geq p_y$. Обозначаем это отношение как обычно $x \geq y$.

Предлагаем в качестве упражнения доказать следующее утверждение:

Лемма 4.5.2.

Введенное в определении 4.5.3 отношение является отношением линейного порядка на множестве вещественных чисел, и $x \geq y$ тогда и только тогда, когда $x - y \geq 0$. $\diamond$

Теорема 4.5.3.

Поле $\mathbb{R}$ является упорядоченным полем.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Проверим, что если $x, y > 0$, то и $x+y > 0$. Действительно, $x+y = p_x+\alpha+p_y+\beta = p_x + p_y + \gamma$. Так как в поле ${}^\infty\mathbb{Q}$ $p_x + p_y > 0$, то и $x + y > 0$ согласно лемме 4.5.1.

Аналогично доказывается и то, что произведение строго положительных чисел строго положительно. Завершить доказательство следует, сославшись на лемму 4.5.2. $\diamond$

В следующем утверждении, изящное доказательство которого любезно сообщил автору профессор В. Н. Алексюк, читатель без труда узнает теорему о фундаментальности возрастающей и ограниченной последовательности рациональных чисел. Более глубокий анализ показывает, что это утверждение есть не что иное, как теорема о сходимости монотонной и ограниченной последовательности вещественных чисел.

Теорема 4.5.4.

Пусть $Q = \{q_n \ : n \in {}^\infty\mathbb{N}\}$ некоторое множество гиперрациональных чисел, и для всех $n \in {}^\infty\mathbb{N}$ имеем $q_{n+1} \geq q_n$. Предположим, что для любого $n \in {}^\infty\mathbb{N}$ справедливо $q_n \leq M$ для некоторого натурального числа $M > 0$.
Тогда при любых $m, n \in {}^\infty\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ будет $q_n \approx q_m$.

Замечание. Прежде чем доказывать это утверждение, прокомментируем его. Фактически заключение теоремы означает, что все числа из множества Q с бесконечными номерами определяют одно единственное вещественное число. Точно так же обстоит дело и в случае гипервещественных чисел, однако там мы можем утверждать, что все эти числа лежат в ореоле какого-то (единственного) вещественного числа. В случае же гиперрациональных чисел это утверждение ложно. Причина этого, как нетрудно видеть, лежит в отсутствии условной полноты в упорядоченном множестве рациональных чисел. Наши дальнейшие рассуждения покажут, что построенное нами поле вещественных чисел является условно полным, тем самым является пополнением множества рациональных чисел. Более глубокий анализ показывает, что наше построение эквивалентно известному построению поля вещественных чисел как множества дедекиндовых сечений в поле рациональных чисел.

Поэтому теорема 4.5.4 имеет ключевое значение.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Нам следует проверить, что для любого $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ при всех $m, n \in {}^\infty\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ будет $|q_m - q_n| < \frac{1}{k}$. Иными словами, при всех $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ найдется бесконечно большое натуральное число n такое, что при всех $m \geq n$ справедливо $q_m - q_n < \frac{1}{k}$.

Предположим, что это не так, то есть найдется ненулевое натуральное число k_0 такое, что для каждого $n \in {}^\infty\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ можно указать гипернатуральное $m_n \geq n$ так, что $q_{m_n} - q_n \geq \frac{1}{k_o}$.

Пусть для $n = m_1$ найдено число $m_2 \geq m_1$ такое, что $q_{m_2} - q_{m_1} \geq \frac{1}{k_0}$. Тогда найдем число $m_3 \geq m_2$ так, что $q_{m_3} - q_{m_2} \geq \frac{1}{k_0}$. Тогда $q_{m_3} - q_{m_1} = q_{m_3} - q_{m_2} + q_{m_2} - q_{m_1} \geq \frac{2}{k_0}$. Для числа m_3 найдем число m_4, обладающее соответствующими свойствами. При этом $q_{m_4} - q_{m_1} \geq \frac{3}{k_0}$. И так далее. Продолжая процесс построения по индукции, построим числа $m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq \ldots \leq m_l$ так, чтобы $q_{m_l} - q_{m_1} \geq \frac{l-1}{k_0}$. Действительно, пусть m_l, обладающее нужными свойствами, построено. Тогда найдем для него число $m_{l+1} \geq m_l$ так, что $q_{m_{l+1}} - q_{m_l} \geq \frac{1}{k_0}$. Но тогда $q_{m_{l+1}} - q_{m_1} = q_{m_{l+1}} - q_{m_l} + q_{m_l} - q_{m_1} \geq \frac{1}{k_0} + \frac{l-1}{k_0} = \frac{l}{k_0}$. Теперь требуемое свойство следует для всех $l \in {}^\infty\mathbb{N}$ из принципа индукции.

Таким образом, для некоторого q_m мы построили $\{q_{m_l} : l \in {}^\infty\mathbb{N}\}$ так, что при всех $l \in {}^\infty\mathbb{N}$ справедливо $q_{m_l} \geq q_m + \frac{l-1}{k_0}$. Выбирая теперь число $l \in {}^\infty\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, получим, что число q_{m_l} бесконечно велико (проверьте!), что противоречит тому, что $q_{m_l} \in Q$, так как все числа из Q по условию конечны. Полученное противоречие и доказывает теорему 4.5.4. $\diamond$

Для завершения доказательства того, что поле $\mathbb{R}$, построенное нами, имеет полное право именоваться полем вещественных чисел, следует только доказать, что всякое непустое ограниченное сверху его подмножество имеет точную верхнюю грань (supremum). Напомним, что элемент a упорядоченного множества P называется точной верхней гранью подмножества $E \subset P$ и обозначается $a = \sup E$, если

1. для всех $e \in E$ $e \leq a$,
2. если $p \in P$ и $p < a$, то существует элемент $e_p \in E$ такой, что $e_p \geq p$.

Предлагаем читателю убедиться в том, что если множество E имеет наибольший элемент e_0, то есть $e_0 \in E$ и для всех $e \in E$ $e \leq e_0$, то $e_o = \sup E$.

Теорема 4.5.5.

Всякое непустое ограниченное сверху подмножество множества $\mathbb{R}$ имеет точную верхнюю грань.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Будем считать, что множество E ограничено сверху и не имеет наибольшего элемента. Выберем какой-либо элемент $e_0 \in E$. Так как он не является наибольшим, то существует элемент $e_1 \in E$ так, что $e_1 > e_0$. Аналогично существует элемент e_2 из множества E строго больший e_1 и так далее. Построим по индукции элементы $e_0 < e_1 < e_2 < \ldots < e_n < \ldots$ $(n \in {}^\infty\mathbb{N})$.

Пусть $e_n = q_n + \alpha_n$. Тогда по лемме 4.5.1 $q_{n+1} > q_n$ при всех $n \in {}^\infty\mathbb{N}$. Поскольку множество E ограничено сверху, то и для всех гипернатуральных n $q_n \leq M$ для некоторого $M \in \mathbb{N}$. Применяя теорему 4.5.4, найдем единственное вещественное число из класса чисел бесконечно близких ко всем q_n при $n \in {}^\infty\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ и обозначим его A.

Докажем, что $A = \sup E$. Действительно, неравенство $e \leq A$ для всех $e \in E$ выполнено по построению. Если же $A' < A$, то $A' = Q + \alpha$ и $Q < q_n$. Поэтому $e_n = q_n + \alpha_n \geq A'$. $\diamond$

§4.6. Гиперкомплексные числа

Построение системы гипервещественных чисел теперь можно провести как пространства измеримых функций по некоторой мере Фреше.

Далее, следуя известной схеме удвоения [8], можно построить систему гиперкомплексных чисел C как удвоения поля $\Re$. При этом, очевидно, обычные комплексные числа получатся как результат удвоения поля $\mathbb{R} \subset \Re$. Мы не будем приводить здесь конструкцию, отсылая читателя к [8]. Отметим лишь, что в указанной книге термин гиперкомплексные числа (системы) имеет другой смысл и относится, в первую очередь, к кватернионам и числам Кэлли. Предлагаем читателю построить систему гиперкватернионов и гипероктав в нашей терминологии, исходя из системы гипервещественных чисел, а как соответствующие подмножества, получить системы комплексных чисел, кватернионов и чисел Кэлли.

Заметим, что комплексное число считается *бесконечно малым* (*конечным*), если таков его модуль. При этом имеет место

Лемма 4.6.1.

Гиперкомплексное число конечно (бесконечно мало) в том и только том случае, если его вещественная и мнимая части конечны (бесконечно малы).

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О предоставляется читателю в качестве упражнения. $\diamond$

§4.7. Заключительные замечания

Мы не будем излагать анализ функций комплексной переменной. Отметим, что определения всех основных понятий – предела, непрерывности, дифференцируемости функций – дословно повторяют соответствующие определения из главы 3.

Предлагаем читателю разобраться в разнице между полюсом и существенно особой точкой функции комплексной переменной и дать соответствующие определения на языке актуальных бесконечно малых.

Как известно, дифференциальное исчисление функций комплексной переменной, в отличие от дифференциального исчисления отображений $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, имеет ряд особенностей. Представляется интересным, построив соответствующие теории, опираясь на понятие актуального бесконечно малого числа, выяснить степень различия между каноническим изложением и изложением на основе нашей методологии.

Что касается интегрирования, представляет интерес не только интегрирование дифференциальных форм вида $f(z)dz$, но и общий случай криволинейного интегрирования в многомерном пространстве, а также теория интегралов по поверхностям.

Относительно понятий теории вероятностей упомянем факт, что всякое множество (в наивной или аксиоматической теории множеств), которое рассматривается как вероятностное пространство является *гиперконечным*, то есть количество его элементов выражается бесконечным гипернатуральным числом. Поэтому, если Ω – множество элементарных исходов, а $E \subset \Omega$ – некоторое событие, то вероятность события E можно определить формулой $P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$, где через $|E|$ обозначено количество элементов множества E. Тем самым, как и в классическом (конечном) вероятностном пространстве, вероятность события – это отношение числа исходов, благоприятствующих ему, к числу всех исходов. Весьма подробно и красиво с точки зрения теории внутренних множеств основы теории вероятностей изложены в работе [26].

Этим замечанием мы закончим обзор числовых систем.

Глава 5.

Теоретико-модельный подход

В этой главе мы приведем понятия из математической логики и теории моделей, необходимые для строгого обоснования принципа Лейбница. В этом данная глава призвана заменить параграф 1.2. Завершим же мы наше изложение основной теоремой об ультрапроизведениях в виде, адаптированном к основному содержанию.

Несмотря на то, что все понятия логики и теории моделей мы определяем, материал, в силу краткости изложения, предназначен для более подготовленного читателя. Читатель же, прошедший через все трудности основного изложения, восполнивший пробелы в доказательствах, решивший все упражнения, будет вознагражден тем, что даже без специальной подготовки сможет самостоятельно не только доказать основную теорему, но и привести необходимые примеры.

В процессе своего развития математика, как и всякая другая дисциплина, проходит ряд этапов, несколько стадий. Во-первых, накапливается фактический материал, затем вырабатываются методы для решения конкретных задач, групп задач. В дальнейшем происходит "изобретение" и разработка общих методов и понятий. На следующей стадии возникает потребность философского осмысления и обоснования разработанных методов, понятий, концепций. Так, например, геометрия, развиваясь из созерцания, измерения, решения конкретных землемерческих задач в Древнем Египте, дошла до появления общих теорем и логического осмысления в трудах древнегреческих математиков. В настоящее время геометрия является строгой аксиоматической теорией.

Точно так же и исчисление бесконечно малых, начавшись из принципа исчерпывания, получило развитие в методы и приемы решения конкретных задач у Архимеда, Б. Кавальери, И. Кеплера. Наивысшего уровня исчисление бесконечно малых достигло в работах Г. В. Лейбница, который развил общие методы и фактически дал аксиоматическую концепцию исчисления бесконечно малых. В дальнейшем, в XVIII – XIX веках, встал вопрос о строгом логическом обосновании понятия "бесконечно малый".

В решении этой проблемы было возможно по крайней мере два пути. Первый – создать строгую логическую теорию, в которой актуальные бесконечно малые существовали бы точно так же, как существуют целые, вещественные и комплексные числа, то есть то, что мы, следуя Г. Лейбницу, и попытались сделать. Но все-таки у нас осталась некоторая недоговоренность, нет четких формулировок, что такое свойство, свойство справедливо, хотя, в сравнении с Г. Лейбницем, мы несколько продвинулись вперед.

Однако математика XIX века была не готова к подобному обоснованию, не говоря уже о том, что у нее не хватило логических средств для построения современной теории. Отчасти по этой причине, отчасти от того, что этот период времени ознаменовался бурным развитием физики, возобладала другая концепция бесконечно малого – "исчезающего", стремящегося к нулю количества, что более соответствует концепции И. Ньютона. Таким образом, в математике укоренилось понятие потенциально бесконечно малого, несмотря на меньшее соответствие такого понимания нашей интуиции.

И лишь с развитием в конце XIX – начале XX веков теории множеств, когда математика стала по-настоящему философской дисциплиной, "доросла" до логики, появились средства для осуществления первого варианта.

Но потребовалось еще более полувека на то, чтобы теория моделей, стоящая на стыке абстрактной алгебры и математической логики, разработала методы, позволяющие провести строгое обоснование существования актуальных бесконечно малых. На это впервые обратил внимание в 1960 году А. Робинсон [28].

§5.1. Теории первого порядка

Одним из основных объектов исследования в математичекой логике явлется теория. Для того, чтобы объяснить, что следует понимать под этим термином, требуется описать специальный **язык**. Мы ограничимся понятием языка *первого порядка.*

Любой язык полностью определяется своим *синтаксисом.* Опишем синтаксис нашего языка.

Определение 5.1.1.

1. **Алфавит** $\mathbb{A}$ состоит из непересекающихся множеств[1]:

$$\mathbb{A} = X \cup C \cup P \cup F \cup S \cup Q \cup M.$$

   (a) Множество X является счетным и называется множеством **переменных**.

   (b) Множество C называется множеством **констант** и имеет произвольную мощность.

   (c) Множество **предикатов** имеет вид $P = \bigcup\limits_{n=o}^{\infty} P_n$, где каждое множество P_n состоит из *n-местных* предикатов и имеет произвольную мощность.

   (d) Множество **функциональных символов** имеет вид $F = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} F_n$, где каждое множество F_n состоит из *n-местных* функциональных символов и имеет произвольную мощность.

   (e) Множество S **логических связок** конечно[2]:

$$S = \{\neg, \vee, \&, \supset, \equiv\}.$$

   (f) **Кванторы** – множество $Q = \{\forall\,, \exists\,\}$ – имеют тот же смысл, что и в 1.2.

   (g) Множество M имеет вспомогательный смысл и содержит разделительные скобки для удобства прочтения слов.

2. **Слово** – это произвольная конечная последовательность[3] символов алфавита.

   Два слова считаются *равными*, если они равны графически. При этом предполагается, что множество всех символов состоит из некоторых идеальных знаков, написание которых не зависит от места и времени, а так же от "пишущего". Иными словами, знаки на письме должны четко идентифицироваться как равные (одинаковые) и различные. На письме для обозначения графического равенства мы используем знак обычного равенства $=$. В логике, как и везде, используются правильно составленные слова:

   (a) **Терм** образуется из переменных и констант, кои являются простейшими термами, с помощью правила образования:

   если $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – термы, а $F \in F_n$, то слово $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ является термом (более сложного строения). Множество всех термов – это наименьшее множество слов, содержащее множества X и C и замкнутое относительно правила образования.

---

[1]Естественно, так как мы будем пытаться с помощью подходящего языка определить, что есть множество, то возникает некоторый порочный круг. Однако, так как мы стоим на позициях наивной теории множеств, это противоречие для наших целей не существенно. Читателя, который желает работать в аксиоматической теории, отсылаем к книге [14]. Обсуждение проблем теории множеств и онтологического статуса этого понятия см. в [34]

[2]Смысл и прочтение логических связок те же, что и в 1.2.

[3]Имеется в виду возможность механически (по определенным правилам) за конечное число шагов выписать все символы, образующие данное слово

(b) Множество **формул** определяется как наименьшее множество, содержащее все слова вида $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$, где $P \in P_n$, а $t_1, t_2, \dots, t_n$ – термы (эти слова называют *атомарными* (простейшими) формулами) и замкнутое относительно правила образования:

i). если φ – формула, то $\neg\varphi$ – формула;

ii). если φ и ψ – формулы, а $*$ – бинарная логическая связка, то слово $\varphi * \psi$ является формулой;

iii). если φ – формула, x – переменная, а $q \in Q$, то $q\,x\,\varphi$ – формула.

3. Слово ξ является *подсловом* слова η, если имеет место равенство $\eta = \lambda_1\xi\lambda_2$, где λ_1, λ_2 – произвольные (возможно, пустые) слова. Подслово формулы, являющееся формулой, называется **подформулой**.

4. Говорят, что переменная x является **связанной** в формуле φ, если в φ есть подформула вида $qx\psi$. Не связанная переменная называется **свободной**. Если $x_1, x_2, \dots, x_n$ – все свободные переменные формулы φ, то мы пишем $\varphi = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Формула, не содержащая свободных переменых, называется **высказыванием**.

Отметим, что понятие формулы является формализацией понятия "свойство", а высказывание – есть формальный аналог понятия "утверждение".

Определение 5.1.2.

К **логическим аксиомам** относятся высказывания вида[4]:

1. $\alpha \supset (\beta \supset \alpha)$.
2. $(\alpha \supset (\alpha \supset \beta)) \supset (\alpha \supset \beta)$.
3. $(\alpha \supset \beta) \supset ((\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \gamma))$.
4. $(\alpha \& \beta) \supset \alpha$; $(\alpha \& \beta) \supset \beta$.
5. $\alpha \supset (\alpha \vee \beta)$; $\beta \supset (\alpha \vee \beta)$.
6. $(\alpha \supset \gamma) \supset (\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \vee \beta) \supset \gamma$.
7. $(\alpha \equiv \beta) \supset (\alpha \supset \beta)$; $(\alpha \equiv \beta) \supset (\beta \supset \alpha)$.
8. $(\alpha \supset \beta) \supset ((\beta \supset \alpha) \supset (\alpha \equiv \beta))$.
9. $(\alpha \supset \beta) \supset (\neg\beta \supset \neg\alpha)$.
10. $\alpha \supset \neg\neg\alpha$; $\neg\neg\alpha \supset \alpha$.
11. $(\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \supset \gamma) \supset (\alpha \supset (\beta \& \gamma)))$.

---

[4] Мы приводим аксиомы классической логики и безоговорочно применяем закон исключенного третьего – tertium nor datum. Однако возможны формализации, где этот принцип нарушается. Более того, есть основания считать, что логические системы, не использующие tertium nor datum более адекватно описывают математическую реальность – см. [4]

12. $\forall y\varphi(y) \supset \varphi(a)$ для любой константы a.

13. $\varphi(a) \supset \exists y\varphi(y)$ для любой константы a.

Здесь α, β, γ – произвольные высказывания, а $\varphi(x)$ – формула со свободной переменной.

Формально все приведенные аксиомы являются *схемами*, то есть содержат бесконечное количество аксиом. Путем незначительного изменения синтаксиса эту сложность можно обойти.

Определение 5.1.3.

Аксиомами равенства называют следующие аксиомы для двуместного предиката ε:

1. $\forall x\varepsilon(x,x)$.
2. $\forall x\forall y(\varepsilon(x,y) \supset \varepsilon(y,x))$.
3. $\forall x\forall y\forall z(\varepsilon(x,y)\&\varepsilon(y,z) \supset \varepsilon(x,z))$.
4. $\forall x_1\forall x_2\ldots\forall x_n\forall y_1\forall y_2\ldots\forall y_n((\varepsilon(x_1,y_1)\&\varepsilon(x_2,y_2)\&\ldots\varepsilon(x_n,y_n) \supset$ $(P(x_1,x_2,\ldots,x_n) \equiv P(y_1,y_2,\ldots,y_n))$ для любого предиката $P \in P_n$.
5. $\forall x_1\forall x_2\ldots\forall x_n\forall y_1\forall y_2\ldots\forall y_n((\varepsilon(x_1,y_1)\&\varepsilon(x_2,y_2)\&\ldots\varepsilon(x_n,y_n) \supset$ $\varepsilon(F(x_1,x_2,\ldots,x_n),F(y_1,y_2,\ldots,y_n))$.

   для любого функционального символа $F \in F_n$

Определение 5.1.4.

Теорией называется произвольное множество высказываний, не пересекающееся с множеством логических аксиом и с множеством аксиом равенства. Это множество часто называют системой **нелогических аксиом** теории.

◇ ◇ ◇ ◇

Приведем примеры. Описывая язык, мы будем указывать только *изменяемые* символы алфавита: предикатные символы, функциональные символы, константы, именно в указанном порядке, разделяя множества символов знаком ";", а символы внутри множества – знаком ",". При отсутствии какого-либо множества символов (то есть когда оно пусто) мы оставляем на соответствующем месте пробел.

1. **Геометрия.**

   Язык имеет только предикатные символы: $L\,(Pt_1, Li_1, Pl_1, \varepsilon_2;\,;)$. Индексы внизу означают арность предикатов. Содержательно предикаты следует понимать: "точка", "прямая", "плоскость", "лежать на".

   Примером формулы в языке геометрии является слово[5]

$$Pt(x)\&Li(y)\&\varepsilon(x,y),$$

[5] Для краткости мы здесь и в дальнейшем опускаем индекс местности у предикатов и арности у функциональных символов.

означающее, как легко видеть, "точка x лежит на прямой y". Это формула с двумя свободными переменными x и y. В формуле

$$Li(x)\&Li(y)\&\exists\, z(Pl(z)\&\varepsilon(x,z)\&\varepsilon(y,z))\&\neg(\exists\, u(Pt(u)\&\varepsilon(u,x)$$

$\&\varepsilon(u,y))),$

выражающей факт параллельности прямых x и y, эти переменные являются свободными, а переменные z и u – связанными.

Примером высказывания является аксиома о единственности точки пересечения двух прямых:

$$\forall\, x\forall\, y(Li(x)\&Li(y) \supset (\exists\, z(Pt(z)\&\varepsilon(z,x)\&\varepsilon(z,y)) \supset \forall\, u(Pt(u)\&$$

$\varepsilon(u,x)\&\varepsilon(u,y) \supset \varepsilon(z,u))).$

2. Рассмотрим **язык арифметики** $L_{ar}\,(\varepsilon_2; p_2, s_2; \theta, e)$. Единственным предикатом является предикат равенства, функциональные символы произведения и суммы, а также две константы ноль и единица – таково содержание символов языка.

   Наличие функциональных символов делает понятие терма в языке арифметики, в отличие от языка геометрии, нетривиальным. Примером терма будет слово $p(x,y)$, означающее произведение x и y. Атомарной формулой является формула $\varepsilon(p(x,y),e)$, выражающая факт того, что произведение x и y равно единице.

   Вместо громоздкой формальной записи $p(x,y)$ и $\varepsilon(p(x,y),e)$ применяют более привычную запись xy и $xy = 1$. Аналогичное соглашение действует и во всех других языках, в которых есть общепринятые обозначения для предикатных, функциональных и константных символов, а также традиционные формы записи слов. Таким образом, язык арифметики можно описать как язык $L\,(=; \bullet, +; 0, 1)$.

   Так, например, в языке арифметики теория *колец* задается аксиомами:

   r1 $\forall\, x\forall\, y(x + y = y + x)$.

   r2 $\forall\, x\forall\, y\forall\, z(x + (y + z) = (x + y) + x)$.

   r3 $\forall\, x(x + 0 = x)$.

   r4 $\forall\, x\exists\, y(x + y = 0)$.

   r5 $\forall\, x\forall\, y\forall\, z((xy)z = x(yz))$.

   r6 $\forall\, x\forall\, y\forall\, z(x(y + z) = xy + xz)$.

   r7 $\forall\, x\forall\, y\forall\, z((x + y)z = xz + yz)$.

   Добавление аксиомы r8: $\forall\, x\forall\, y(xy = yx)$ дает теорию *коммутативных* колец, а аксиома r9: $\forall\, x(x1 = x)$ приводит к теории колец *с единицей.*

   Теория полей получается добавлением к теории коммутативных колец с единицей аксиомы $\forall\, x(\neg(x = 0) \supset \exists\, y(xy = 1))$.

3. Теория **порядка** имеет язык с двумя бинарными предикатами $=$ и $\leq$.

   Аксиомы порядка:

   o1 $\forall x(x \leq x)$.

   o2 $\forall x \forall y(x \leq y \& y \leq x \supset x = y)$.

   o3 $\forall x \forall y \forall z(x \leq y \& y \leq z \supset x \leq z)$.

   Теория *линейного* порядка получается добавлением аксиомы
$$\forall x \forall y(x \leq y \vee y \leq x).$$

4. В языке $L\,(=, \leq; +, \bullet; 0, 1)$ рассматривается важнейшая для нас теория **упорядоченных полей**, вместе с аксиомами поля и аксиомами линейного порядка содержащая дополнительно аксиомы:
$$\forall x \forall y \forall z(x \leq y \supset x + z \leq y + z),$$
$$\forall x \forall y \forall z(x \leq y \& 0 \leq z \supset xz \leq yz),$$
$$0 \leq 1 \& \neg(0 = 1).$$

   Последняя аксиома делает любое упорядоченное поле содержащим по крайней мере два различных элемента.

   В теории упорядоченных полей можно выразить практически любое свойство вещественных чисел, опирающееся на понятия равенства, неравенства и арифметические операции. Таким образом, эта теория достаточна для формулировки принципа Лейбница. Предлагаем читателю сформулировать его самостоятельно.

§5.2. Понятие модели

Модель теории – это основное понятие, которое реализует формальные объекты (константы, предикаты, функциональные символы) как существующие объекты, которые можно фактически исследовать и даже "потрогать". Так, теория колец реализуется на множестве целых чисел. При этом в смысл формальных понятий вкладывается содержание естественных теоретико-числовых операций, отношения порядка и т.д.

В этом параграфе мы приведем формальные понятия, позволяющие осуществить акт реализации для произвольной теории. Читателю предлагается самостоятельно проработать различные реализации теории упорядоченных полей.

Определение 5.2.1.

Алгебраической структурой для языка L называется пара $\mathfrak{M} =< M, \Pi >$, где M – множество, а Π – соответствие, сопоставляющее каждой константе c языка элемент $c^{\mathfrak{M}} \in M$, каждому предикату $P \in P_n$ – n-местное отношение $P^{\mathfrak{M}}$ на M, каждому функциональному символу $f \in F_n$ – n-арную алгебраическую операцию $f^{\mathfrak{M}}$ на множестве M.

Определение 5.2.2.

Интерпретацией s языка L в структуре $\mathfrak{M}$ называется функция, заданная на множестве всех переменных языка, принимающая значение в M.

Для интерпретации s', совпадающей с интерпретацией s всюду, кроме аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$, введем обозначение $s\binom{x_1, x_2, \dots, x_n}{m_1, m_2, \dots, m_n}$, где m_k – значение $s'(x_k)$.

Определение 5.2.3.

Для каждого терма t в языке L определим его **стандартное имя** в структуре $\mathfrak{M}$ при интерпретации s рекурсией по строению:

1. если $t = x$ – переменная языка, то положим $t^{\mathfrak{M}}[s] = s(x)$.
2. если $t = c$ – константа языка, то положим $t^{\mathfrak{M}}[s] = c^{\mathfrak{M}}$.
3. для терма t вида $t = f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ положим
$$t^{\mathfrak{M}}[s] = f^{\mathfrak{M}}\left(t_1^{\mathfrak{M}}[s], t_2^{\mathfrak{M}}[s], \dots, t_n^{\mathfrak{M}}[s]\right).$$

Определение 5.2.4.

Для формулы $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_m)$ в языке L, структуры $\mathfrak{M}$ и интерпретации s в ней языка определим отношение $\mathfrak{M} \models \varphi[s]$ φ **истинно в $\mathfrak{M}$ при интерпретации** s рекурсией по строению формулы:

1. если φ имеет вид $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$, то $\mathfrak{M} \models \varphi[s]$ тогда и только тогда, когда $< t_1^{\mathfrak{M}}, t_2^{\mathfrak{M}}, \dots, t_n^{\mathfrak{M}} > \in P^{\mathfrak{M}}$.
2. если $\varphi = \neg\psi$, то $\mathfrak{M} \models \varphi[s]$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} \models \psi[s]$ не имеет места (то есть ψ не истинна).
3. $\mathfrak{M} \models \varphi \& \psi[s]$ тогда и только тогда, когда отношения $\mathfrak{M} \models \varphi[s]$ и $\mathfrak{M} \models \psi[s]$ выполнены одновременно.
4. $\mathfrak{M} \models \varphi \vee \psi[s]$ тогда и только тогда, когда выполнено $\mathfrak{M} \models \varphi[s]$ или $\mathfrak{M} \models \psi[s]$.
5. $\mathfrak{M} \models \varphi \supset \psi[s]$ в том и только в том случае, когда неверно, что $\mathfrak{M} \models \varphi[s]$ или $\mathfrak{M} \models \psi[s]$ (нетрудно понять, что это означает, что из истинности φ следует истинность ψ),или, что то же самое, $\mathfrak{M} \models \neg\varphi \vee \psi[s]$.
6. $\mathfrak{M} \models \varphi \equiv \psi[s]$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} \models \varphi \supset \psi[s]$ и $\mathfrak{M} \models \psi \supset \varphi[s]$ одновременно, то есть $\mathfrak{M} \models (\varphi \supset \psi) \& (\psi \supset \varphi)$.
7. $\mathfrak{M} \models \exists x \varphi(x, x_1, \dots x_n)[s]$ в том и только том случае, если для некоторого элемента $m \in M$ выполнено $\mathfrak{M} \models \varphi(x, x_1, \dots, x_n)[s\binom{x}{m}]$.
8. $\mathfrak{M} \models \forall x \varphi(x, x_1, \dots, x_n)$ в том и только в том случае, если для любого элемента $m \in M$ выполнено $\mathfrak{M} \models \varphi(x, x_1, \dots, x_n)[s\binom{x}{m}]$.

◇ ◇ ◇ ◇

Легко понять, что мы определили на самом деле отношение истинности формулы $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на наборе $< m_1, m_2, \dots, m_n >$ элементов алгебраической структуры. В дальнейшем мы будем писать $\mathfrak{M} \models \varphi(m_1, m_2, \dots, m_n)$ вместо
$$\mathfrak{M} \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[s\binom{x_1, x_2, \dots, x_n}{m_1, m_2, \dots, m_n}].$$

В этом случае говорят, что $m_1, m_2, \ldots, m_n$ удовлетворяют свойству φ в модели $\mathfrak{M}$

Обоснованием этого служит следующее утверждение.

Теорема 5.2.1.

Отношение $\mathfrak{M} \models \varphi[s]$ зависит только от значений интерпретации s на свободных переменных формулы φ.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

Сначала докажем, что стандартное имя любого терма зависит только от значений интерпретации на переменных, входящих в терм.

Для этого предположим, что для двух интерпретаций s_1 и s_2 имеет место $s_1(x_1) = s_2(x_1), s_1(x_2) = s_2(x_2), \ldots, s_1(x_k) = s_2(x_k)$.

Для терма вида $t = c$ – константа при любой интерпретации $t^{\mathfrak{M}} = c^{\mathfrak{M}}$, а для терма $t(x_1, \ldots, x_n) = x_l$ имеем $t^{\mathfrak{M}}[s_1] = s_1(x_l) = s_2(x_l) = t^{\mathfrak{M}}[s_2]$.

Таким образом, база индукции проверена, и мы предположим теперь, что t – произвольный терм и для термов более простого строения наше утверждение доказано.

Пусть $t = f(t_1, \ldots, t_k)$. Тогда, по определению имени терма,

$$t^{\mathfrak{M}}[s_1] = f^{\mathfrak{M}}\left(t_1^{\mathfrak{M}}[s_1], \ldots, t_k^{\mathfrak{M}}[s_1]\right).$$

Так как по индукционному предположению

$$t_1^{\mathfrak{M}}[s_1] = t_1^{\mathfrak{M}}[s_2],\ \ldots,\ t_k^{\mathfrak{M}}[s_1] = t_k^{\mathfrak{M}}[s_2],$$

получаем, что $t^{\mathfrak{M}}[s_1] = f^{\mathfrak{M}}\left(t_1^{\mathfrak{M}}[s_2], \ldots, t_k^{\mathfrak{M}}[s_2]\right) = t^{\mathfrak{M}}[s_2]$.

Тем самым первый этап доказательства теоремы завершен.

Второй этап проведем индукцией по строению формулы φ. При этом будем считать, что среди $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ содержатся все переменные, входящие в формулу φ (свободные и связанные). По-прежнему пусть $s_1(x_1) = s_2(x_1), s_1(x_2) = s_2(x_2), \ldots,$ $s_1(x_k) = s_2(x_k)$ для двух интерпретаций s_1 и s_2.

Для атомарных формул вида $P(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, учитывая доказанное выше свойство имени терма, получаем $< t_1^{\mathfrak{M}}[s_1], t_2^{\mathfrak{M}}[s_1], \ldots t_k^{\mathfrak{M}}[s_1] > \in P^{\mathfrak{M}}$ тогда и только тогда, когда $< t_1^{\mathfrak{M}}[s_2], t_2^{\mathfrak{M}}[s_2], \ldots t_k^{\mathfrak{M}}[s_2] > \in P^{\mathfrak{M}}$, что и доказывает базу индукции.

Предположим, что φ – произвольная формула и для формул более простого строения утверждение доказано.

Пусть формула φ имеет вид $\varphi_1 \& \varphi_2$. Тогда согласно определению истинности $\mathfrak{M} \models \varphi[s_1]$ равносильно одновременному выполнению отношений $\mathfrak{M} \models \varphi_1[s_1]$ и $\mathfrak{M} \models \varphi_2[s_1]$. По индукционному предположению отношения $\mathfrak{M} \models \varphi_1[s_1]$ и $\mathfrak{M} \models \varphi_2[s_1]$ равносильны отношениям $\mathfrak{M} \models \varphi_1[s_2]$ и $\mathfrak{M} \models \varphi_2[s_2]$ соответственно. Последнее, согласно определению, равносильно тому, что $\mathfrak{M} \models \varphi[s_2]$.

Пусть теперь φ имеет вид $\forall x \psi(x)$. Тогда $\mathfrak{M} \models \varphi[s_1]$ означает, что для всех элементов $m \in M$ $\mathfrak{M} \models \psi[s_1\binom{x}{m}]$. Но $s_1\binom{x}{m}(x) = m = s_2\binom{x}{m}(x)$. Таким образом, по индукционному предположению $\mathfrak{M} \models \psi[s_2\binom{x}{m}]$ для всех $m \in M$, то есть $\mathfrak{M} \models \varphi[s_2]$.

Дальнейшее доказательство оставляется читателю. $\diamond$

Доказанная теорема делает корректным следующее определение.

Определение 5.2.5.

Пусть α – высказывание в языке L, $\mathfrak{M}$ – алгебраическая структура языка L. Будем говорить, **что α истинно в** $\mathfrak{M}$ и писать $\mathfrak{M} \models \alpha$, если для некоторой (равносильно для любой) интерпретации s имеет место $\mathfrak{M} \models \alpha[s]$.

Определение 5.2.6.

Структура $\mathfrak{M}$ называется **моделью** теории T, если для любого высказвания $\alpha \in T$ будет $\mathfrak{M} \models \alpha$.

◇ ◇ ◇ ◇

Предлагаем читателю в языке теории упорядоченных полей рассмотреть термы $t_1(x,y) = s(p(x,y),e)$, $t_2(x,y) = s(p(x,y),y)$, интерпретации s_1 и s_2, имеющие значения $s_1(x) = 1$, $s_1(y) = 1$, $s_2(x) = 2$, $s_2(y) = 0$ в структуре натуральных чисел с естественными именами констант, функциональных и предикатных символов. Вычислите значения термов при этих интерпретациях, а также истинность формулы $\varepsilon(t_1, t_2)$ при данных интерпретациях. Убедитесь в том, что истинность высказывания

$$\forall x \forall y \varepsilon \left(p\left(x,y\right), p\left(y,x\right)\right)$$

не зависит от интерпретации.

Определение 5.2.7.

Две модели $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ некоторой теории называются **элементарно эквивалентными**, если в них истинны одни и те же высказывания, точнее, для любого высказывания α будет $\mathfrak{M} \models \alpha$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{N} \models \alpha$.

Факт элементарной эквивалентности моделей записывается $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$.

Таким образом, элементарно эквивалентные модели с точки зрения логики неразличимы[6]. В дальнейшем мы увидим, что некоторые свойства, невыразимые в языке теории, у этих моделей будут различными (например, существование бесконечно малых элементов в теории упорядоченных полей), что ведет к возможности использовать вложение моделей в им элементарно эквивалентные, но обладающие рядом новых свойств. При этом вложение обладает принципом переноса – свойством элементарной эквивалентности. Примером этого является принцип расширения Г. Лейбница.

[6]Обе эти модели с внутренней (изнутри модели) точки зрения адекватно описывают соответствующую теорию. Однако внешний взгляд, сравнение этих моделей с позиций некоторой другой теории (или модели) позволяет увидеть различия в строении. Так, например, язык арифметики в качестве модели имеет поле вещественных чисел. Строя нестандартное расширение, мы получаем модель той же теории. Внешний взгляд на пару этих моделей, например, с позиций аксиоматической теории множеств, позволяет увидеть бесконечно малые, отличные от нуля элементы в расширении. Кроме того, стандартное вложение, показывающее нетривиальность расширения, не принадлежит ни одной модели. Точно так же такие множества как множество конечных, бесконечно малых чисел не описываются в логике первого порядка и поэтому не являются объектами, которые можно исследовать в рамках модели и ее расширения, то есть являются внешними.

Приведем аккуратные формулировки вышесказанных идей.

Определение 5.2.8.

Алгебраические структуры $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ называются **изоморфными**, если существует биекция $F : M \longrightarrow N$ такая, что

1. для любой константы c в языке L $F\left(c^{\mathfrak{M}}\right) = c^{\mathfrak{N}}$,
2. для любого n-арного функционального символа f и любого набора $< m_1, m_2, \ldots, m_n >$ элементов M^n
$$F\left(f^{\mathfrak{M}}\left(m_1, m_2, \ldots, m_n\right)\right) = f^{\mathfrak{N}}\left(F(m_1), F(m_2), \ldots, F(m_n)\right),$$
3. для любого n-местного предиката P в L
$$< m_1, m_2, \ldots, m_n > \in P^{\mathfrak{M}} \text{ тогда и только тогда, когда}$$
$$< F(m_1), F(m_2), \ldots, F(m_n) > \in P^{\mathfrak{N}}$$
для любого набора $< m_1, m_2, \ldots, m_n > \in M^n$.

Факт изоморфизма моделей записывается $\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{N}$.

Определение 5.2.9.

Структура $\mathfrak{M}$ называется **подструктурой** структуры $\mathfrak{N}$, если

1. $M \subset N$,
2. для каждой константы c в L $c^{\mathfrak{M}} = c^{\mathfrak{N}}$,
3. для любого предиката $P \in P_n$ $P^{\mathfrak{M}} = P^{\mathfrak{N}} \cap M^n$,
4. для любого функционального символа $f \in F_n$ $f^{\mathfrak{M}} = f^{\mathfrak{N}}|_{M^n}$.

То, что $\mathfrak{M}$ является подструктурой $\mathfrak{N}$, записывается $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$. В этом случае говорят также, что $\mathfrak{N}$ является *расширением* $\mathfrak{M}$.

Комбинируя понятия изоморфизма и подструктуры, получаем следующее понятия вложения.

Определение 5.2.10.

Говорят, что структура $\mathfrak{M}$ **изоморфно вкладывается** в структуру $\mathfrak{N}$, если существует изоморфизм $\mathfrak{M}$ на некоторую подмодель структуры $\mathfrak{N}$.

Определение 5.2.11.

Говорят, что $\mathfrak{M}$ является **элементарной подструктурой** структуры $\mathfrak{N}$, если

1. $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$,
2. для любой формулы $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и любых элементов $m_1, m_2, \ldots, m_n$, принадлежащих M, выполнено $\mathfrak{N} \models \varphi(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} \models \varphi(m_1, m_2, \ldots, m_n)$.

Определение 5.2.12.

Будем говорить, что модель $\mathfrak{M}$ теории T **элементарно вкладывается** в модель $\mathfrak{N}$, если существует изоморфизм $\mathfrak{M}$ на некотороую элементарную подмодель $\mathfrak{M}'$ модели $\mathfrak{N}$.

Модель $\mathfrak{N}$ в этом случае будем называть **элементарным расширением** модели $\mathfrak{M}$ и записывать $\mathfrak{M} \subset^{\sim} \mathfrak{N}$.

Очевидным образом, модель и ее элементарное расширение являются элементарно эквивалентными.

§5.3. Добавление новых символов

Пусть T – некоторая теория в языке L. Предположим, что высказывание

$$\forall x \exists y\, (\varphi(x,y) \& \forall z\, (\varphi(x,z) \supset y = z))$$

истинно в некоторой модели теории T. Тогда мы можем ввести в язык L новый функциональный сивол F_φ, при этом исходное высказывание добавляется в число аксиом теории. Иными словами, мы расширяем теорию T в языке L до некоторой теории T' в *расширенном* языке L'. При этом, однако, "ничего нового" в исходную теорию не добавляется, ибо любая формула, использующая функциональный символ F_φ, может быть "расшифрована" и записана без него, как формула теории T в языке L. Более обще, n-арный функциональный символ f водится аналогично, если в некоторой модели истинно высказывание

$$\forall x_1 \forall x_2, \ldots, \forall x_n \exists y\, (\varphi\,(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)\, \&$$

$$\forall z\, (\varphi\,(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) \supset y = z))\,.$$

То же самое касается и добавления к языку новых предикатов: каждой формуле $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в языке L сопоставляется предикатный символ P_φ и аксиома

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n P_\varphi\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \varphi\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,.$$

Например, в язык геометрии можно ввести двухместный предикат равенства, полагая $x = y$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon(x,y) \& \varepsilon(y,x)$ и добавляя аксиому
$\forall x \forall y\, (x = y) \equiv (\varepsilon(x,y) \& \varepsilon(y,x))$.

Замечание. На самом деле вводить новые символы и сокращения в язык можно и без проверки выполнимости соответствующих формул. Все дело в том, что, вводя новый функциональный или предикатный символ, мы предполагаем его использовать при дальнейшем исследовании теории, что целесообразно в том случае, когда вводимые объекты можно "потрогать", то есть они реально существуют. Что же касается сокращенных обозначений, то они часто используются для сокращения формальных текстов. Например, определение параллельных прямых в языке геометрии (см. формулу на стр. 96) можно принять за новый двухместный предикатный символ $||(.,.)$ и использовать в дальнейшем совершенно не задаваясь вопросом реального существования параллельных прямых в какой-либо модели геометрии.

Точно так же можно вводить и новые константные символы. Пусть в некоторой модели теории T истинно высказывание

$$\exists x\, (\varphi(x) \& \forall y\, (\varphi(y) \supset y = x))\,,$$

где φ – некоторая формула. Тогда можно ввести новую константу c_φ, добавляя соответствующее высказывание к множеству аксиом теории.

Пусть $\mathfrak{M}$ – некоторая модель теории T в языке L. Добавим к множеству констант языка все элементы модели $\mathfrak{M}$, к множеству функциональных символов – множество всех функций, заданных на M^n (для всех натуральных n), принимающих значение в M, а к множеству предикатов – всевозможные n-местные отношения на множестве M.

К аксиомам теории T добавим высказывания, характеризующие свойства введенных функций и отношений, сформулированные в языке L', полученном путем добавления новых символов к языку L. Имеются в виду свойства, выраженные в языке теории T – в логике первого порядка.

Предлагаем читателю убедиться в том, что $\mathfrak{M}$ будет моделью "обогащенной" теории.

§5.4. Принцип переноса

На протяжении этого параграфа мы считаем фиксированными некоторое непустое множество I и меру Фреше μ. Наше изложение фактически идет параллельно параграфу 2.2.

Пусть L – язык исчисления предикатов и T – некоторая теория в нем. Рассмотрим класс $K = \{\mathfrak{M}_i \ : \ i \in I\}$ моделей теории T. Пусть $M = \bigcup\limits_{i \in I} M_i$ – объединение всех множеств-носителей моделей класса K. Множество функций с областью определения I, принимающих значение в M, обозначим K_I.

Определение 5.4.1.

Две функции $f, g \in K_I$ назовем **эквивалентными**, если $\mu\{i \in I \ : \ f_i \neq g_i\} = 0$, то есть функции f и g совпадают почти всюду.

Читателю предлагается убедиться в том, что введенное отношение действительно является отношением эквивалентности на K_I.

Для каждой константы c языка L определим $c^{\mathfrak{M}}$ как класс эквивалентности функции $i \mapsto c^{\mathfrak{M}_i}$.

Если F – n-арный функциональный символ, то для $i \in I$ рассмотрим функцию $\tilde{F} \ : \ I \longrightarrow M$, определенную правилом

$$\tilde{F}(i) = F^{\mathfrak{M}_i}\left(f_1(i), f_2(i), \ldots, f_n(i)\right),$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_n$ – представители классов $m_1, m_2, \ldots, m_n \in K_I$ соответственно.

Обозначим $F^{\mathfrak{M}}$ класс эквивалентности функции $\tilde{F}$.

Для n-местного предиката P будем считать, что $< m_1, m_2, \ldots, m_n > \in P^{\mathfrak{M}}$ тогда и только тогда, когда для почти всех $i \in I$ имеет место $< f_1(i), f_2(i), \ldots, f_n(i) > \in P^{\mathfrak{M}_i}$, где f_s – произвольный представитель элемента m_s.

Предлагаем читателю в качестве упражнения доказать следующее утверждение:

Лемма 5.4.1.

Объекты $F^{\mathfrak{M}}$ и $P^{\mathfrak{M}}$ не зависят от выбора представителей в классах эквивалентности. $\diamond$

Определение 5.4.2.

Структуру $\mathfrak{M}$, имеющую в качестве имен констант, функциональных и предикатных символов соответственно введенные выше объекты, назовем **ультрапроизведением** класса моделей K.

Если все модели класса K изоморфны некоторой модели $\mathfrak{N}$, то соответствующее ультрапроизведение называют **ультрастепенью** модели $\mathfrak{N}$.

Мы докажем *основную теорему об ультрапроизведениях*, принадлежащую Е. Лосю [20], из которой выведем принцип переноса и покажем, как из доказанного принципа выводится принцип Лейбница. Тем самым обоснование исчисления бесконечно малых Г. В. Лейбница будет закончено.

Естественно, мы отдаем себе отчет в том, что непротиворечивость всей нашей теории имеет место лишь относительно некоторой теории множеств.

Теорема 5.4.1.

1. *Пусть $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – терм в L, $m_1, m_2, \dots, m_n \in M$. Тогда имя терма t в структуре $\mathfrak{M}$ вычисляется по правилу:*

   Пусть $\tilde{t}$ – функция, сопоставляющая каждому $i \in I$ имя терма t в модели $\mathfrak{M}_i$ – $t^{\mathfrak{M}_i}(f_1(i), f_2(i), \dots, f_n(i))$. [7] *Тогда $t^{\mathfrak{M}}$ – класс эквивалентности функции $\tilde{t}$.*

2. *Для каждой формулы $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ теории T и любого набора элементов $m_1, m_2, \dots, m_n$ структуры $\mathfrak{M}$ справедливо*

   $$\mathfrak{M} \models \varphi(m_1, m_2, \dots, m_n)$$

   тогда и только тогда, когда

   $$\mu\{i \in I \,:\, \mathfrak{M}_i \models \varphi(f_1(i), f_2(i), \dots, f_n(i))\} = 1,$$

   где, как обычно, через f_s обозначен представитель элемента m_s.

   Иными словами, истинность в ультрапроизведении означает, что соответсвующее высказывание истинно почти в каждом сомножителе.

3. *Для любого высказывания α в L $\mathfrak{M} \models \alpha$ тогда и только тогда, когда α истинно почти во всех моделях класса K.*

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О.

1. По определению имени терма это утверждение справедливо для всякого терма вида x_k; c; $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где F – произвольный функциональный символ. Это примем за базу индукции и предположим, что t – произвольный терм и для всех термов, имеющих более простое строение теорема доказана.

   Пусть $t = F(t_1(x_1, \dots, x_n), t_2(x_1, \dots, x_n), \dots, t_m(x_1, \dots, x_n))$.

   Обозначим $g^{(k)} : g_i^{(k)} = t_k^{\mathfrak{M}_i}(f_1(i), \dots, f_n(i))$. Тогда, по индукционному предположению, $t_k^{\mathfrak{M}}$ есть класс эквивалентности функции $g^{(k)}$. Следовательно, по определению имени терма, $t^{\mathfrak{M}}(f_1, f_2, \dots, f_n) = F^{\mathfrak{M}}\left(t_1^{\mathfrak{M}}, \dots, t_m^{\mathfrak{M}}\right) = [\tilde{F}]$, где $\tilde{F}$ – функция, определенная правилом $\tilde{F}(i) = F^{\mathfrak{M}_i}\left(g_i^{(1)}, \dots, g_i^{(n)}\right)$.

[7] ($f_1, f_2, \dots, f_n$ – представители $m_1, m_2, \dots, m_n$ соответственно)

Пусть $F^{\mathfrak{M}}(f_1, \ldots, f_n)$ есть класс эквивалентности некоторой функции G. Тогда для почти всех i и любого k будет

$$F_k^{\mathfrak{M}_i} = g_i^{(k)} \text{ и}$$

$$G_i = F^{\mathfrak{M}_i}\left(g_i^{(1)}, \ldots, g_i^{(n)}\right).$$

Таким образом, функции G и F эквивалентны и первое утверждение теоремы Лося доказано.

2. Второе утверждение докажем индукцией по строению формулы φ. При этом читателю самостоятельно предлагается проверить базу индукции для атомарных формул, которая доказывается рассуждением, аналогичным рассуждению, приведенному для термов.

   Для произвольной формулы, предположив справедливость утверждения для всех формул с меньшим числом логических связок и кванторов, доказательство проведем для трех случаев: $\varphi = \neg\psi$, $\varphi = \psi_1 \& \psi_2$, $\varphi = \exists x \psi(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Рассуждения для остальных связок и квантора всеобщности предлагаем провести читателю.

   (a) В первом случае получаем: $\mathfrak{M} \models \varphi$ тогда и только тогда, когда неверно, что $\mathfrak{M} \models \psi$.

   По индукционному предположению истинность формулы $\psi(f_1, \ldots, f_n)$ в модели $\mathfrak{M}$ равносильна тому, что

$$\mu\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \psi(f_1(i), \ldots, f_n(i))\} = 1.$$

   Так как

$$\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \varphi(f_1(i), \ldots, f_n(i))\} =$$
$$= I \setminus \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \varphi(f_1(i), \ldots, f_n(i))\},$$
$$\mu\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \varphi(f_1(i), \ldots, f_n(i))\} =$$
$$= 1 - \mu\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \psi(f_1(i), \ldots, f_n(i))\}.$$

   Но, так как φ истинна,

$$\mu\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \psi(f_1(i), \ldots, f_n(i))\} = 0$$

   и, следовательно,

$$\mu\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \varphi(f_1(i), \ldots, f_n(i))\} = 1.$$

   (b) Для случая $\varphi = \varphi_1 \& \varphi_2$ истинность φ по определению означает одновременную истинность φ_1 и φ_2.

   Так как, очевидно,

$$\{i \in I : \mathfrak{M} \models \varphi(f_1(i), \ldots, f_n(i))\} =$$
$$= \{i \in I : \mathfrak{M} \models \varphi_1(f_1(i), \ldots, f_n(i))\} \cap$$

$$\{i \in I : \mathfrak{M} \models \varphi_2 (f_1(i), \ldots, f_n(i))\},$$

следовательно,

$$\mu\{i \in I : \mathfrak{M} \models \varphi (f_1(i), \ldots, f_n(i))\} =$$
$$= \mu\{i \in I : \mathfrak{M} \models \varphi_1 (f_1(i), \ldots, f_n(i))\} \cdot$$
$$\mu\{i \in I : \mathfrak{M} \models \varphi_2 (f_1(i), \ldots, f_n(i))\} = 1$$

по индукционному предположению.

(c) Рассмотрим, наконец, третий случай. По определению истинности $\mathfrak{M} \models \varphi$ означает, что для некоторого $m \in M$ имеет место $\mathfrak{M} \models \psi(m, f_1, \ldots, f_n)$, что, по индукционному предположению, равносильно тому, что

$$\mu\{i \in I \ : \ \mathfrak{M}_i \models \psi (m_i, f_1(i), \ldots, f_n(i))\} = 1.$$

Обозначая последнее множество E_ψ, получим, что для $i \in E_\psi$ будет $\mathfrak{M}_i \models \exists\, z\, (\psi(z, f_1(i), \ldots, f_n(i))$, то есть истинна формула φ для почти всех $i \in I$.

Обратно, пусть для почти всех i будет

$$\mathfrak{M}_i \models \varphi (f_1(i), \ldots, f_n(i)).$$

Тогда при $i \in E_\varphi$ $\mathfrak{M}_i \models \exists\, z \psi\, (z, f_1(i), \ldots, f_n(i))$.

Таким образом, для почти всех i получаем, что имеет место

$$\mathfrak{M}_i \models \psi\, (z_i, f_1(i), \ldots, f_n(i))$$

для некоторого $z_i \in M_i$.

Рассмотрим функцию $Z:\ Z(i) = z_i$ для всех $i \in I$. Тогда, по построению, для класса эквивалентности f функции Z имеем $\mathfrak{M} \models \exists\, x \psi(f, f_1, \ldots, f_n)$, то есть $\mathfrak{M} \models \varphi(f_1, \ldots, f_n)$. Это и доказывает теорему и в данном случае.

Суммируя все вышеприведенные рассуждения, применяя метод индукции, получаем заключение теоремы Е. Лося.

3. Последнее утверждение, являющееся ни чем иным, как принципом переноса, очевидно следует из предыдущего.

Теперь доказательство теоремы полностью завершено. $\diamond$

Следствие. Ультрастепень любой модели является ее элементарным расширением.

Для доказательства достаточно построить подмодель $\mathfrak{M}^d$, являющуюся образом $\mathfrak{M}$ при вложении $d \ : \ d(m)$ – есть класс эквиваленитности постоянной функции $i \mapsto m$. При этом, так как очевидно, что d – взаимно однозначное отображение, на $\mathfrak{M}^d$ тривиально вводится структура модели теории T, изоморфной исходной модели $\mathfrak{M}$. То, что она элементарно эквивалентна ультрастепени, следует из принципа переноса. $\diamond$

Покажем теперь, каким образом из доказанной теоремы получается принцип Лейбница.

Рассмотрим теорию упорядоченных полей F_P. Добавим к множеству функциональных символов всевозможные функции с $\mathrm{dom} f \subset \mathbb{R}^n$ с вещественными значениями. Отнесем к аксиомам всевозможные свойства этих функций. Нетрудно понять, что множество вещественных чисел с естественными алгебраическими операциями и отношением порядка будет моделью полученой теории. Рассмотрим любую ее ультрастепень $^*\Re$.

Тогда по теореме Лося $^*\Re$ является элементарным расширением модели $\mathbb{R}$. Принцип же Лейбница становится просто фактом одновременной истинности некоторой формулы в языке нашей теории. Детали предоставляем читателю.

Рекомендуем читателю разобраться, как теорема Е. Лося "работает" при переходе от стандартной модели арифметики к множеству гипернатуральных чисел, а также от рациональных к гиперрациональным числам.

Литература

[1] Альбеверио С. Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике/С. Альбеверио, Й. Фенстад, Р. Хеэг-Крон, Т. Линдстрем (S. Albeverio, J. E. Fenstad, R. Høegh-Krohn, T. Lindstrøm). – М: Мир, 1997. – 616 с.

[2] Биркгоф Г. (Birkhoff G.). Теория структур. – М.: ИЛ, 1952. – 407 с.

[3] Варден Б. Л. ван дер (Waenden B. L. van der). Алгебра. – М.: Наука, 1979. – 623 с.

[4] Голдблатт Р. (R. Goldblatt). Топосы: Категорный анализ логики. – М.:Мир, 1983. – 486 с.

[5] Выготский М. Я. Основания исчисления бесконечно-малых. – М.-Л., Гостехиздат, 1931. – 452 с.

[6] Девис М. (Davis M.). Прикладной нестандарный анализ. – М.: Мир, 1980. – 236 с.

[7] Карно Л. (Carnot L. N.). Размышления о метафизике бесконечно-малых. – М.-Л.: ОНТИ, 1936. – 327 с.

[8] Кантор И. Л. Гиперкомплексные числа. /И. Л. Кантор, А. С. Солодовников. – М.: Наука, 1973. – 144 с.

[9] Keisler H. J. (Кейслер Х. Дж.). Elementary Calculus. – Prindle: Weber & Schmidt, 1976. – 556 p.

[10] Keisler H. J.(Кейслер Х. Дж.). Foundations of infinitesimal Calculus. – Prindle: Weber & Schmidt, 1976. – 572 p.

[11] Кейслер Х. Дж. Теория моделей /Х. Дж. Кейслер, Ч. Ч. Чэн (H. J. Keisler, C. C. Chang). – М: Мир, 1977. – 614 с.

[12] Кеплер И. (Kepler I.) Новая стереометрия винных бочек. – М.-Л.: ИЛ, 1935. – 176 с.

[13] Косовский Н. К. Логики конечнозначных предикатов на основе неравенств: Учебное пособие./Н. К. Косовский, А. В. Тишков – СПб.: С.-Петербургский ун-т, 2000. – 268 с.

[14] Куратовский К. Теория множеств. /К. Куратовский, А. Мостовский (K. Kuratowski, A. Mostowski). – М.: Мир, 1970. – 416 с.

[15] Кусраев А. Г. Нестандартные методы в анализе /А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990. – 344 с.

[16] Лейбниц Г. В. (Leibniz G. W.) Новый метод для максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не являются препятствием дробные и иррациональные количества, и особый вид исчисления для этого// УМН. – 1948. – Т. 3 (23). – С. 165 – 205.

[17] Ловягин Ю. Н. Теория моделей: Учеб. пособие – Сыктывкар: СыктГУ, 1992. – 92 с.

[18] Ловягин Ю. Н. Математика: Учеб. пособие для студентов нематематических специальностей. Ч. 1 /Ю. Н. Ловягин, О. П. Матвеева. – Сыктывкар: СыктГУ, 1998. – 73 с.

[19] Ловягин Ю. Н. Математика: Учеб. пособие для студентов нематематических специальностей. Ч. 2/Ю. Н. Ловягин, О. П. Матвеева. – Сыктывкар: СыктГУ, 1998. – 65 с.

[20] Los J. (Лось Е.). Quelques remarqes, théoréms et problemes sur les classes définisables d'algebres// Math. Interpr. of Formal Systems, Studies in Log and Found of Math. – Amsterdam, 1955. – P. 98 – 113.

[21] Мальцев А. И. Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970. – 342 с.

[22] Марков А. А. Теория алгорифмов /А. А. Марков, Н. М. Нагорныйю – М.: Наука, 1984. – 432 с.

[23] Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

[24] Нащокин В. В. Техническая термодинамика и теплопередача: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1975. – 496 с.

[25] Nelson E. (Нельсон Е.). Internal set theory. A new approach to non standard analysis// Bull. Amer. Math. Soc. – 1977. – V. 83, №6. – P. 1165 – 1198.

[26] Нельсон Э. (Nelson E.). Радикально элементарная теория вероятностей. – Новосибирск: СО РАН. , 1995. – 124 с.

[27] Робинсон А. (Robinson A.). Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. – М.: Мир, 1967. – 375 с.

[28] Robinson A. (Робинсон А.). Non-Standard Analysis// Proc. of the Royal Acad. of Sci. Amsterdam. Ser. A. – 1961. – P. 432 – 440.

[29] Robinson A. (Робинсон А.). Non-Standard Amalysis. – Amsterdam: North-Holland publ. comp., 1966. – 293 p.

[30] Рудин У. (Rudin W.). Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975. – 443 с.

[31] Tarski A. (Тарский А.). Une contribution a la theorie de la meassure// Fund. Math. 15. – 1920. – P. 42 – 50.

[32] Успенский В. А. Что такое нестандартный анализ. – М.: Наука, 1987. – 128 с.

[33] Фор Р. Современная математика /Р. Фор, А. Кофман, М. Дени-Папен (Faure R., Kaufmann A., Denis-Papin M.). – М: Мир, 1966. – 271 с.

[34] Френкель А. А. Основания теории множеств /А. А. Френкель, И. Бар-Хиллел (Fraenkek A. A., Bar-Hillel Y). – М.: Мир, 1966. – 555 с.

Замечание. Приведенный список литературы не является полным. Мы остановились лишь на источниках либо в той или иной степени использованных при написании книги, либо представляющих интерес для приложений, как, например, книга [1]. В фундаментальной работе [15] имеется не только серьезное и полное изложение основ нестандартного анализа, но и глубокий философский анализ становления понятия бесконечно малого.

Указатель имен

Указатель терминов