История «Арифметики» Диофанта

ок. 250

τῆς πραγματείας αὐτῶν ἐν τρισκαίδεκα βιβλίοις γεγενημένης
их исследование будет изложено в тринадцати книгах

I II III IV V VI VII VIII IX X XI XII XIII

ок. 400

Греческий Комментарий (вероятно Гипатии)

I II III IV V VI VII

ок. 860

Куста ибн Лука (قسطا ابن لوقا) переводит этот комментарий на арабский язык

ок. 1300

Всё ещё в Бизантийской империи

I II III **VIII IX X**

ок. 1460

Первое упоминание «Арифметики» в Европе

I II III **VIII IX X**

ок. 1969

Открытие арабской рукописи «Арифметики»

IV V VI VII

В наше время

I II III ***IV V VI VII*** **VIII IX X**

Диофант как алгебраист

x	ς	ΑΡΙΘΜΟΣ
x^2	Δ^{Υ}	$\underline{\Delta\Upsilon}$ΝΑΜΙΣ
x^3	K^{Υ}	$\underline{\mathrm{K}\Upsilon}$ΒΟΣ
x^4	$\Delta\Delta^{\Upsilon}$	$\underline{\Delta}$ΥΝΑΜΟ$\underline{\Delta\Upsilon}$ΝΑΜΙΣ
x^5	$\Delta\mathrm{K}^{\Upsilon}$	$\underline{\Delta}$ΥΝΑΜΟ$\underline{\mathrm{K}\Upsilon}$ΒΟΣ
x^6	KK^{Υ}	$\underline{\mathrm{K}}$ΥΒΟ$\underline{\mathrm{K}\Upsilon}$ΒΟΣ
x^7	$\Delta\Delta\mathrm{K}^{\Upsilon}$	
x^8	$\Delta\mathrm{KK}^{\Upsilon}$	
x^9	KKK^{Υ}	
$=$	I^{Σ}	$\underline{\mathrm{I}\Sigma}$ΟΣ
$-$	⋔	

$$\boxed{5x^4 + 18x^2 - 11x^3 = 16x^2}$$

(1) Ἐὰν ἀπὸ προβλήματός τινος γένηται εἴδη τινὰ ἴσα εἴδεσι τοῖς αὐτοῖς, (…) δεήσει προσθεῖναι τὰ λείποντα εἴδη ἐν ἀμφοτέροις τοῖς μέρεσιν, ἕως ἂν ἑκατέρων τῶν μερῶν τὰ εἴδη ἐνυπάρχοντα γένηται.

Если из некоторой задачи получится равенство одних членов таким же, (…) надо прибавлять к обеим сторонам вычитаемые члены, пока в каждой стороне не останутся (исключительно) аддитивные члены.

$$\boxed{5x^4 + 18x^2 = 16x^2 + 11x^3}$$ (الجبر)

(2) καὶ πάλιν ἀφελεῖν τὰ ὅμοια ἀπὸ τῶν ὁμοίων, ἕως ἂν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν ἓν εἶδος καταλειφθῇ.

а ещё отнимать подобные от подобных пока к обеим сторонам не станет один член равен одному члену.

$$\boxed{5x^4 + 2x^2 = 11x^3}$$ (المقابلة)

(3) ان نقسم الجميع على واحد من اقعد الناحيتين حتّى يخرج لنا نوع واحد يعدل عددًا

а всё делить на один член наименьшего степени пока к обеим сторонам не станет один член равен числу.

$$\boxed{5x^2 + 2 = 11x}$$ (الرّد)

Φιλοτεχνείσθω δὲ τοῦτο ἐν ταῖς ὑποστάσεσι τῶν προτάσεων, ἐὰν ἐνδέχηται, ἕως ἂν ἓν εἶδος ἑνὶ εἴδει ἴσον καταλειφθῇ.

Старайся применять это, если возможно, н в образовании предложений так, чтобы получилось равенство одного члена другому тоже одному.

Ὕστερον δέ σοι δείξομεν καὶ πῶς δύο εἰδῶν ἴσων ἑνὶ καταλειφθέντων τὸ τοιοῦτον λύεται.

Потом мы покажем тебе, как получается решение, когда один член будет равен двум оставшимся.

Решение неопределённых уравнений в положительных и рациональных числах

$$\boxed{ax^2 + bx + c = \square}$$

(1) $a\ /c = 0$:

$$bx + c = \square : \qquad \square = m^2, \qquad bx = m^2 - c, \qquad x = \frac{m^2 - c}{b}$$

$$ax^2+bx=\Box: \qquad \Box=m^2x^2, \qquad bx=m^2x^2-ax^2, \qquad x=\frac{b}{m^2-a}$$

(2) a / c квадратный :

$$a^2x^2+bx+c=\Box: \qquad \Box=(ax+m)^2, \quad bx+c=2amx+m^2, \qquad x=\frac{m^2-c}{b-2am}$$

$$ax^2+bx+c^2=\Box: \qquad \Box=(mx+c)^2, \quad ax^2+bx=m^2x^2+2cmx, \quad x=\frac{2cm-b}{a-m^2}$$

(3) $b=0$:

$$ax^2+c=\Box \qquad \Box=m^2x^2, \quad c=m^2x^2-ax^2, \qquad x^2=\frac{c}{m^2-a}$$

$$\Box=m^2, \qquad ax^2=m^2-c, \qquad x^2=\frac{m^2-c}{a}$$

(4) c квадратный $c=\pm d^2$:

$$ax^2=\Box-d^2, \qquad a=\frac{\Box}{x^2}-\frac{d^2}{x^2} \qquad \text{(всегда разрешится)}$$

$$ax^2=\Box+d^2, \qquad a=\frac{\Box}{x^2}+\frac{d^2}{x^2} \qquad \text{(иногда не разрешится)}$$

$$15x^2-36=\Box \qquad \textbf{(X. 14)}$$

Καὶ αὕτη μὲν ἡ ἰσότης ἀδύνατός ἐστι διὰ τὸ τὸν $\overline{\iota\epsilon}$ μὴ διαιρεῖσθαι εἰς δύο τετραγώνους.

$$\begin{cases} a^2=a_1+a_2 \\ a^2+a_1=\Box \\ a^2+a_2=\Box' \end{cases} \qquad \textbf{(VII. 11)}$$

لم يمكن ان نجد عددًا مربّعًا اذا قسمناه بقسمين وزدنا عليه كلّ واحد منهما كان مربّعًا.

$$15=\frac{36}{x^2}+\frac{\Box}{x^2}, \qquad 3=\frac{\Box}{a^2}+\frac{\Box'}{a^2}$$

$$N=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$$

$$(p_i^{\alpha_i} \;=\; 2,\ 4k+1,\ 4k+3)$$

(II. 22) Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὁ ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν τετράγωνος, προσλαβὼν συναμφότερον, ποιῇ τετράγωνον.

Найти два таких числа, чтобы квадрат каждого из них вместе с суммой обоих составлял квадрат.

$$\left[\ \begin{cases} a^2+(a+b)=\Box \\ b^2+(a+b)=\Box' \end{cases}\ \right]$$

Τετάχθω ὁ μὲν ἐλάσσων ς$\overline{\alpha}$, ὁ δὲ μείζων ς$\overline{\alpha}\overset{\circ}{M}\overline{\alpha}$, ἵνα ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος $\Box^{\text{ος}}$, τουτέστι $\Delta^{\Upsilon}\overline{\alpha}$, προσλαβοῦσα συναμφότερον, τουτέστιν ς$\overline{\beta}\,\overset{\circ}{M}\overline{\alpha}$, ποιῇ $\Box^{\text{ον}}$.

$$\left[\ a=x,\ \ b=x+1 \qquad \Longrightarrow \qquad a^2+(a+b)=x^2+(2x+1)=(x+1)^2\equiv\Box\ \right]$$

λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ μείζονος $\square^{\text{ον}}$ προσλαβόντα συναμφότερον ποιεῖν $\square^{\text{ον}}$· ἀλλ᾿ ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ μείζονος $\square^{\text{ος}}$ προσλαβὼν συναμφότερον γίνεται $\Delta^{\Upsilon}\,\overline{α}\,ς\,\overline{δ}\,\mathring{M}\,\overline{β}$· ταυτα $ι^{σ}$ $\square^{ω}$.

$$\left[\ b^2 + (a+b) = (x+1)^2 + (2x+1) = x^2 + 4x + 2 = \square'\ \right]$$

πλάσσω τὸν $\square^{\text{ον}}$ ἀπὸ ς$\overline{α}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{β}$· αὐτὸς ἄρα ὁ $\square^{\text{ος}}$ ἔσται $\Delta^{\Upsilon}\,\overline{α}\,\mathring{M}\,\overline{δ}$ ⋔ ς$\overline{δ}$,

$$\left[\ x^2 + 4x + 2 = \square' \equiv (x-2)^2 = x^2 + 4 - 4x\ \right]$$

καὶ γίνεται ὁ ς $β^{η}$.
ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων $β^{η}$, ὁ δὲ μείζων $ι^{η}$, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

$$\left[\ a = x = \frac{2}{8}, \quad b = x + 1 = \frac{10}{8}.\ \right]$$

(II. 8) «Заданный квадрат разложить на два квадрата.
Пусть надо разложить 16 на два квадрата. Положим, что 1-й x^2.
Тогда другой будет $16 - x^2$. Надо тогда, $16 - x^2$ равно квадрату.
Составляю (этот) квадрат из любых x [ἀπὸ $ς^{\tilde{ω}ν}$ ὅσων δήποτε] минус столько единиц, сколько найдётся в стороне 16-ти; пусть это будет $2x - 4$.
Тогда сам этот квадрат будет $4x^2 + 16 - 16x$; это равно $16 - x^2$.
(Прибавим) с обеих сторон вычитаемые и (отнимаем) подобные из подобных.
Тогда $5x^2$ равно $16x$; и x окажется равным 16 пятым.
Один (квадрат) будет $\frac{256}{25}$, а другой $\frac{144}{25}$; оба вместе дают $\frac{400}{25}$, т.е. 16, и каждый будет квадратом.»

[1] $a^2 + b^2 = k^2$

$$a = x \qquad \Longrightarrow \qquad k^2 - x^2 = b^2 \equiv (mx - k)^2$$

$$k^2 - x^2 = m^2x^2 - 2kmx + k^2$$

$$x = a = \frac{2km}{m^2+1}, \quad b = mx - k = \frac{k(m^2-1)}{m^2+1}$$

[2] $x = 2pq \cdot t, \quad y = (p^2 - q^2) \cdot t, \quad z = (p^2 + q^2) \cdot t.$

$$(2pq \cdot t)^2 + [(p^2 - q^2) \cdot t]^2 = [(p^2 + q^2) \cdot t]^2 \qquad \cdot \frac{1}{[(p^2+q^2)t]^2}$$

$$\left(\frac{2pq}{p^2+q^2}\right)^2 + \left(\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}\right)^2 = 1 \qquad \cdot k^2$$

$$\left(\frac{2kpq}{p^2+q^2}\right)^2 + \left(\frac{k(p^2-q^2)}{p^2+q^2}\right)^2 = k^2 \qquad \frac{p}{q} = m$$

$$\left(\frac{2km}{m^2+1}\right)^2 + \left(\frac{k(m^2-1)}{m^2+1}\right)^2 = k^2$$

ИСТОЧНИКИ

P. Tannery, *Diophanti Alexandrini Opera omnia cum graecis commentariis* (2 T.), Leipzig (Teubner) 1893-95 [греческий текст с латинским переводом]

J. Sesiano, *Books IV to VII of Diophantus' Arithmetica in the Arabic translation attributed to Qusṭā ibn Lūqā*, New York (Springer) 1982 [арабский текст с английским переводом и математическем комментарием]

И. Г. Башмакова, «Диофант Александрийский. Арифметика (...)», Москва (Наука) 1976 [перевод (только греческой части) с математическем комментарием]